

Zahlentheorie und Zahlenspiele

Hartmut Menzer, Ingo Althöfer

ISBN: 978-3-486-72030-3

© 2014 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH

Abbildungsübersicht / List of Figures

Tabellenübersicht / List of Tables

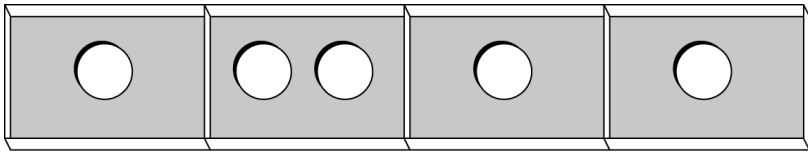


Abbildung 1.1: $n = 5$ Objekte in $m = 4$ Kategorien verteilt

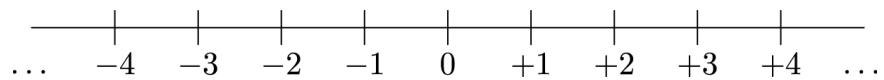


Abbildung 1.2: Anordnung ganzer Zahlen auf einer Geraden

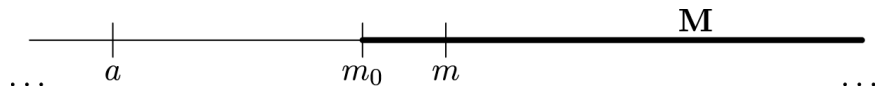


Abbildung 1.3: Darstellung der kleinsten Zahl m_0 einer nach unten beschränkten Menge M



Abbildung 1.4: Anordnung von einigen Brüchen auf einer Geraden

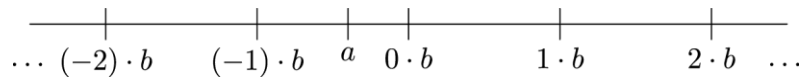


Abbildung 1.5: Multiplikation von einigen ganzen Zahlen auf einer Geraden

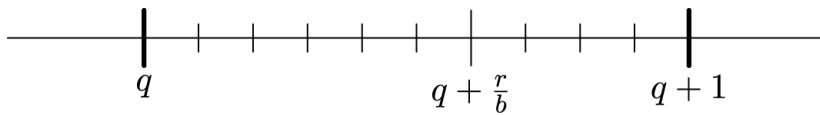


Abbildung 1.6: Anordnung von einigen Brüchen auf einer Geraden

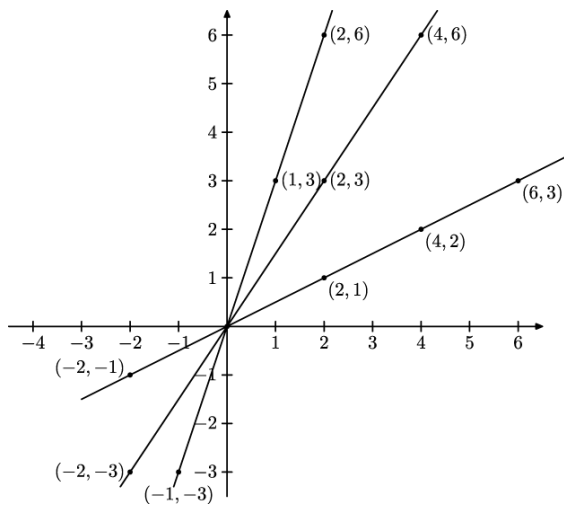


Abbildung 1.7: Anordnung von einigen Brüchen als Zahlenpaare

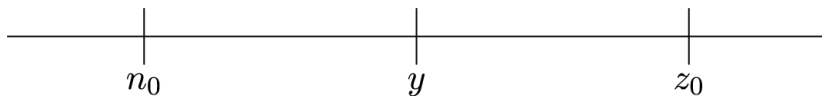


Abbildung 1.8: Prinzip der ordnungstheoretischen Induktion

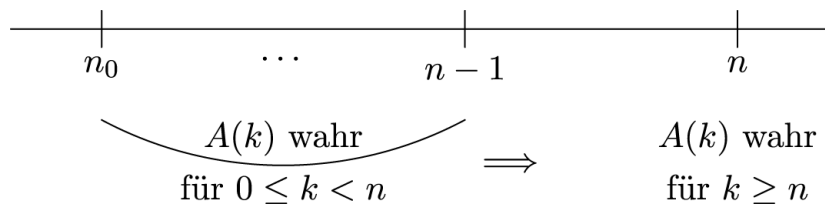


Abbildung 1.9: Methode der ordnungstheoretischen Induktion mit $n_0 = 0$

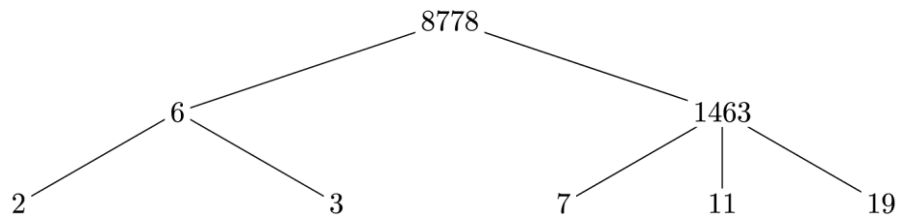


Abbildung 2.1: Primfaktorzerlegung der Zahl 8778

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	...	$\overline{m-1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	...	$\overline{m-1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	...	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	...	$\bar{1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\overline{m-1}$	$\overline{m-1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	...	$\overline{m-2}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Im Folgenden soll eine Übersicht über den Status der ersten 20 Fermatschen Zahlen gegeben werden (P=Primzahl, Z=zusammengesetzte Zahl, U=Status unbekannt).

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 3 = P \\
 F_1 &= 5 = P \\
 F_2 &= 17 = P \\
 F_3 &= 257 = P \\
 F_4 &= 65537 = P \\
 F_5 &= 641 \cdot 6700417 \\
 F_6 &= 274177 \cdot 67280421310721 \\
 F_7 &= 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721 \\
 F_8 &= 1238926361552897 \cdot P \\
 F_9 &= 2424833 \cdot \\
 &\quad 7455602825647884208337395736200454918783366342657 \cdot P \\
 F_{10} &= 45592577 \cdot 6487031809 \cdot \\
 &\quad 4659775785220018543264560743076778192897 \cdot P \\
 F_{11} &= 319489 \cdot 974849 \cdot \\
 &\quad 167988556341760475137 \cdot 3560841906445833920513 \cdot P \\
 F_{12} &= 114689 \cdot \\
 &\quad 26017793 \cdot 63766529 \cdot 190274191361 \cdot 1256132134125569 \cdot Z \\
 F_{13} &= 2710954639361 \cdot 2663848877152141313 \cdot \\
 &\quad 3603109844542291969 \cdot 319546020820551643220672513 \cdot Z \\
 F_{14} &= Z \\
 F_{15} &= 12142510009 \cdot 2327042503868417 \cdot \\
 &\quad 168768817029516972383024127016961 \cdot Z \\
 F_{16} &= 825753601 \cdot 188981757975021318420037633 \cdot Z \\
 F_{17} &= 31065037602817 \cdot Z \\
 F_{18} &= 13631489 \cdot 81274690703860512587777 \cdot Z \\
 F_{19} &= 70525124609 \cdot 646730219521 \cdot Z
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 M_2 = 2^2 - 1 & M_{1279} = 2^{1279} - 1 & M_{86243} = 2^{86243} - 1 \\
 M_3 = 2^3 - 1 & M_{2203} = 2^{2203} - 1 & M_{110503} = 2^{110503} - 1 \\
 M_5 = 2^5 - 1 & M_{2281} = 2^{2281} - 1 & M_{132049} = 2^{132049} - 1 \\
 M_7 = 2^7 - 1 & M_{3217} = 2^{3217} - 1 & M_{216091} = 2^{216091} - 1 \\
 M_{13} = 2^{13} - 1 & M_{4253} = 2^{4253} - 1 & M_{756839} = 2^{756839} - 1 \\
 M_{17} = 2^{17} - 1 & M_{4423} = 2^{4423} - 1 & M_{859433} = 2^{859433} - 1 \\
 M_{19} = 2^{19} - 1 & M_{9869} = 2^{9869} - 1 & M_{1257787} = 2^{1257787} - 1 \\
 M_{31} = 2^{31} - 1 & M_{9941} = 2^{9941} - 1 & M_{1398269} = 2^{1398269} - 1 \\
 M_{61} = 2^{61} - 1 & M_{11213} = 2^{11213} - 1 & M_{2976221} = 2^{2976221} - 1 \\
 M_{89} = 2^{89} - 1 & M_{19937} = 2^{19937} - 1 & M_{3021377} = 2^{3021377} - 1 \\
 M_{107} = 2^{107} - 1 & M_{21701} = 2^{21701} - 1 & M_{6972593} = 2^{6972593} - 1 \\
 M_{127} = 2^{127} - 1 & M_{23209} = 2^{23209} - 1 & M_{13466917} = 2^{13466917} - 1 \\
 M_{521} = 2^{521} - 1 & M_{44497} = 2^{44497} - 1 & M_{20996011} = 2^{20996011} - 1 \\
 M_{607} = 2^{607} - 1 & &
 \end{array}$$

Im Folgenden soll eine Übersicht über einige bekannte **mersennesche Primzahlen** gegeben werden.

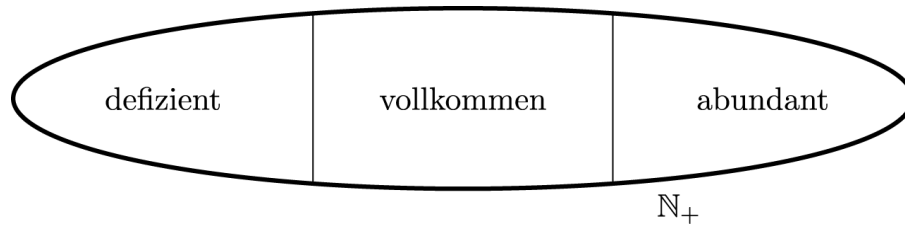


Abbildung 2.2: Zerlegung von $\mathbb{N}_+$ in drei Äquivalenzklassen

Index	Vollkommene Zahl	Stellenzahl	Jahr der Entdeckung
1	6	1	—
2	28	2	—
3	496	3	—
4	8128	4	—
5	33550336	8	1461
6	8589869056	10	1603
7	$2^{18} \cdot (2^{19} - 1)$	12	1603
8	$2^{30} \cdot (2^{31} - 1)$	19	1753
9	$2^{60} \cdot (2^{61} - 1)$	37	1883
10	$2^{88} \cdot (2^{89} - 1)$	54	1911
11	$2^{106} \cdot (2^{107} - 1)$	65	1914
12	$2^{126} \cdot (2^{127} - 1)$	77	1876
13	$2^{520} \cdot (2^{521} - 1)$	314	1952
14	$2^{606} \cdot (2^{607} - 1)$	366	1952
⋮			
34	$2^{1257786} \cdot (2^{1257787} - 1)$	757263	1996
35	$2^{1398268} \cdot (2^{1398269} - 1)$	841842	1996
36	$2^{2976220} \cdot (2^{2976220} - 1)$	895932	1997
37	$2^{3021376} \cdot (2^{3021376} - 1)$	1819050	1998
⋮			
48	$2^{57885160} \cdot (2^{57885161} - 1)$	...	2013

Abschließend soll noch eine Übersicht über einige bekannte geraden vollkommenen Zahlen und deren Entdeckungsjahr gegeben werden.

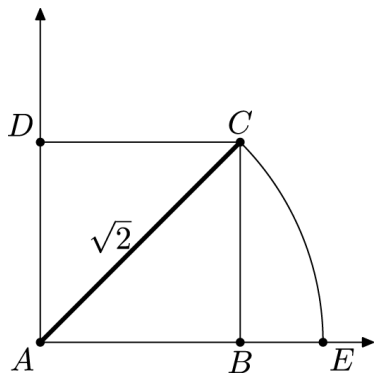


Abbildung 3.1: Darstellung der Zahl $\sqrt{2}$

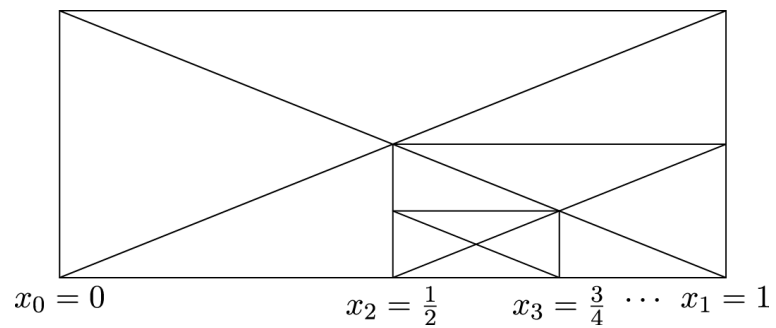


Abbildung 3.2: Halbierungsmethode eines Intervalls

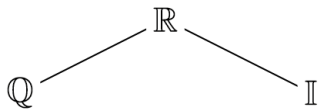


Abbildung 3.3: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in rationale und irrationale Zahlen

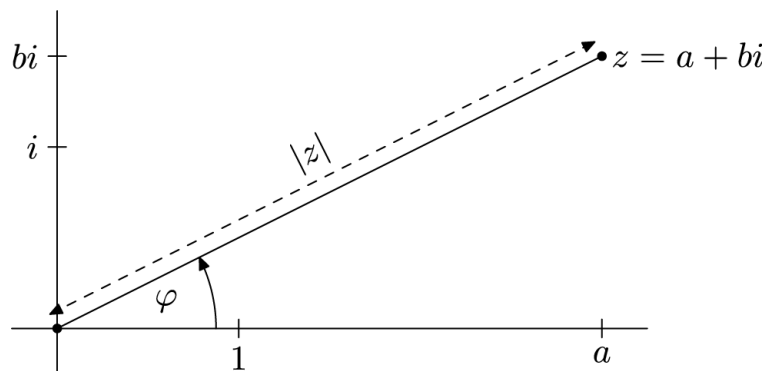


Abbildung 3.4: Komplexe Zahlenebene

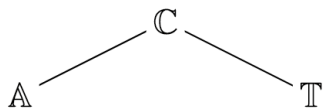


Abbildung 3.5: Zerlegung von $\mathbb{C}$ in algebraische und transzendente Zahlen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathbb{Z}} & \rightarrow & \overline{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Abbildung 3.6: Einbettung von Zahlenmengen

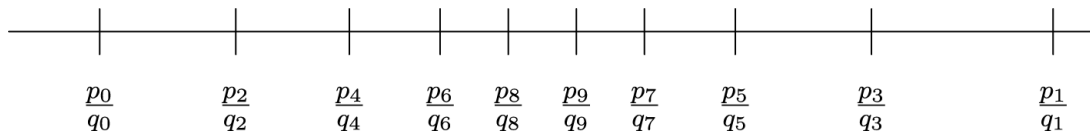


Abbildung 3.7: Darstellung von einigen Näherungsbrüchen $\frac{p_k}{q_k}$

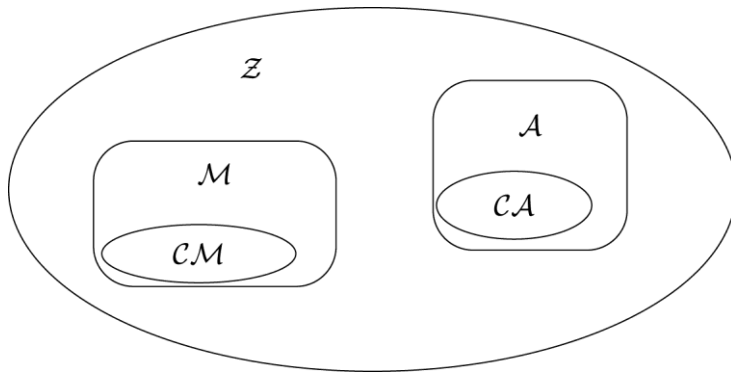


Abbildung 4.1: Multiplikative und additive zahlentheoretische Funktionen

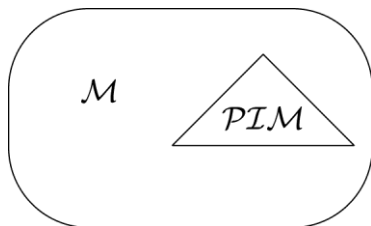


Abbildung 4.2: Primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktionen

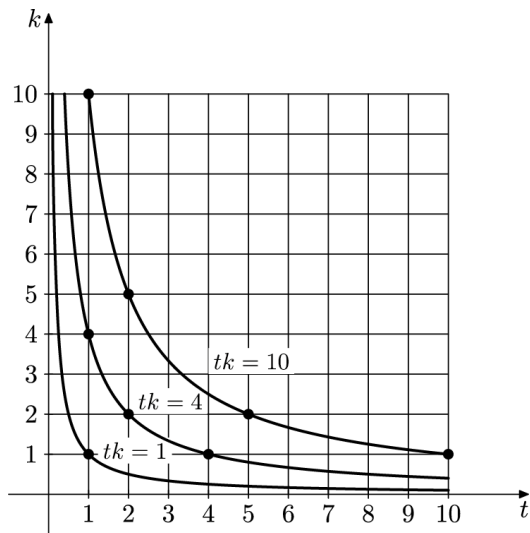


Abbildung 4.3: Gitterpunkte auf den Hyperbeln $t \cdot k = n$ für $n = 1, 4, 10$

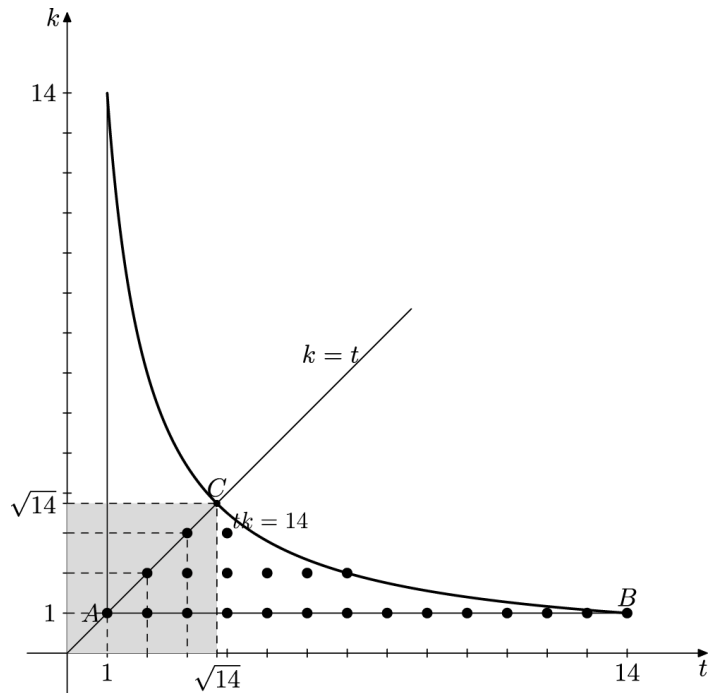


Abbildung 4.4: Gitterpunkte im Gebiet (A, B, C)



a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\text{ind}_3 a$	0	14	1	12	5	15	11	10	2	3	7	13	4	9	6	8

Tabelle 5.1: Indextafel für den Modul $m = 17$.

$\text{ind}_3 a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Tabelle 5.2: Indextafel für den Modul $m = 17$.

Restzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Zustand	G	G	G*	G	V	G	G	V	G	G	V	G	G	V	...

Abbildung 6.1: G- und V-Stellungen beim (1, 2, 4)-Spiel

Restzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Zustand	G	G*	G	G	V	G	V	G	G	G	G	V	G	V	...

Abbildung 6.2: G- und V-Stellungen beim (1, 3, 4)-Spiel

7	22	45	76	115	162
15	23	31	39	47	
8	8	8	8		
0	0	0			

Abbildung 6.3: Differenzen-Schema zu den ersten sechs Periodenlängen bei der $(n, 2n+1, 3n+1)$ -Familie. Die p -Werte stehen in der ersten Zeile.

0	6	9	12	15	18	21	24	27
6	3	3	3	3	3	3	3	3
-3	0	0	0	0	0	0	0	
	3	0	0	0	0	0	0	
		-3	0	0	0	0		
			3	0	0	0		
				-3	0	0		

Abbildung 6.4: Differenzen-Schema zu den Vorperiodenlängen bei der $(n, 2n, 3n + 1)$ -Familie. Die q -Werte stehen in Zeile 1.

3	3	13	17	21	25	29	33	37
0	10	4	4	4	4	4	4	4
10	-6	0	0	0	0	0	0	0
-16	6	0	0	0	0	0	0	0
22	-6	0	0	0	0	0	0	0

Abbildung 6.5: Differenzen-Schema zu den Periodenlängen bei der $(n, 2n, 3n + 1)$ -Familie

118	675	2008	4453	8346	14023
557	1333	2445	3893	5677	
	776	1112	1448	1784	
	336	336	336		

Abbildung 6.6: Differenzen-Schema zu den ersten sechs Periodenlängen der Bültermann-Familie

Haufengröße	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Alice	A	A	B	A	A	B	A	A	...
Bob	B	B	A	B	B	A	B	B	...

Abbildung 6.7: „A-B“, Alice und Bob ziehen abwechselnd

Haufengröße	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Alice1	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	B	B	...
Alice2	A	A	B	B	B	A	A	A	B	B	B	A	...
Bob1	B	B	B	B	A	A	B	B	B	B	A	A	...
Bob2	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	B	...

Abbildung 6.8: Zur symmetrischen Zugreihenfolge „A-A-B-B“

Haufengröße	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
Alice1	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	...	
Alice2	A	A	B	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	...
Bob1	B	B	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A	...
Alice3	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	B	...	
Bob2	B	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	...
Bob3	B	B	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	A	...	
Alice 1	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	...

Abbildung 6.9: Zur Zugreihenfolge „A-A-B-A-B-B“

Haufengröße	1	2	3	4	5	...	Haufengröße	1	2	3	4	5	...
Alice1	A	A	A	A	A	...	Alice1	A	A	B	A	A	...
Alice2	A	A	B	A	A	...	Bob	B	B	A	A	A	...
Bob	B	B	A	A	A	...	Alice2	A	A	A	A	A	...

Abbildung 6.10: Zu den Zugreihenfolgen „A-A-B“ und „A-B-A“

Haufengröße	1	2	3	4	5	...
Alice1	A	A	A	A	A	...
Alice2	A	A	A	A	A	...
Alice3	A	A	B	A	A	...
Bob2	B	B	A	A	A	...

Abbildung 6.11: Zu der Zugreihenfolge „A-A-A-B“

Alice1	AAAAAAAAAAAAAABBAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAA
Alice2	AABAAAAAAAAABBAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAABA
Bob1	BBAAAAAAAAABBBAAAAAAAAAAAAAABBAAAAAAAAAAAAABBAA
Alice3	AAAAAAAAABBBAAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAAAAAAAABAAAA
Alice4	AABAAAABBBBAAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAAAAAAAABBAAAA
Bob2	BBAAABBBBBAAAAAAAAAAAAAABBBBAAAAAAAAAAAAABBBAAAAA
Alice5	AAAABBBBAAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAAAAAAAABBAAAAAA
Alice6	AABBBBAAAAAAAAAAAAAABBBBAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAA
Bob3	BBBBBBAAAAAAAAAAAAAABBBBAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAA
Bob4	BBBBAAAAAAAAAAAAAABBBBAAAAAAAAAAAAABBBAAAAAAA
Bob5	BBAAAAAAAAAAAAAABBBBAAAAAAAAAAAAABBAAAAAAAA
Alice 1	AAAAAAAAAAAAAABBAAAAAAAAAAAAAABAAAAAAAAAAAAA

Abbildung 6.12: Zur Zugreihenfolge „A-A-B-A-A-B-A-A-B-B-B“

Alice1	AAAAAAAAAAAAA BB AAAAAAAAAAAAA B AAAAAAAAAAAAA
Alice2	A A AAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AAAAAAAAAAAAA B A
Bob1	BB AAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AA
Alice3	AAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AAAAAAAAAAAAA B AAAA
Alice4	A A AAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AAAA
Bob2	BB AA BBBB AAAAAAAAAAAAA BBBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAA
Alice5	AAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AAAAAA
Alice6	A BBBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAA
Bob3	BBBBB AAAAAAAAAAAAA BBBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAA
Bob4	BBBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAA
Bob5	BB AAAAAAAAAAAAA BBB AAAAAAAAAAAAA BB AAAAAA

Abbildung 6.13: Hervorgehobene B-Siege bei „A-A-B-A-A-B-A-A-B-B-B“

Alice1	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·	AAAAAA	· · · · ·	AAAAAAA	· · ·
Alice2	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·	AAAAAA	· · · ·
Bob1	· · · · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·
Alice3	· · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·	AAAAAA	· · · · ·
Alice4	· · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·
Bob2	· ·	AA	· · · · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·
Alice5	·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·
Alice6	AA	· · · · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAA
Bob3	· · · · ·	AA	· · · · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·
Bob4	· · · · ·	AAA	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·
Bob5	· · · · ·	AAAA	· · · · ·	AAAAA	· · · · ·	AAAAAA	· · · · ·

Abbildung 6.14: Alice6-Siege zur Zugreihenfolge „A-A-B-A-A-B-A-A-B-B-B“

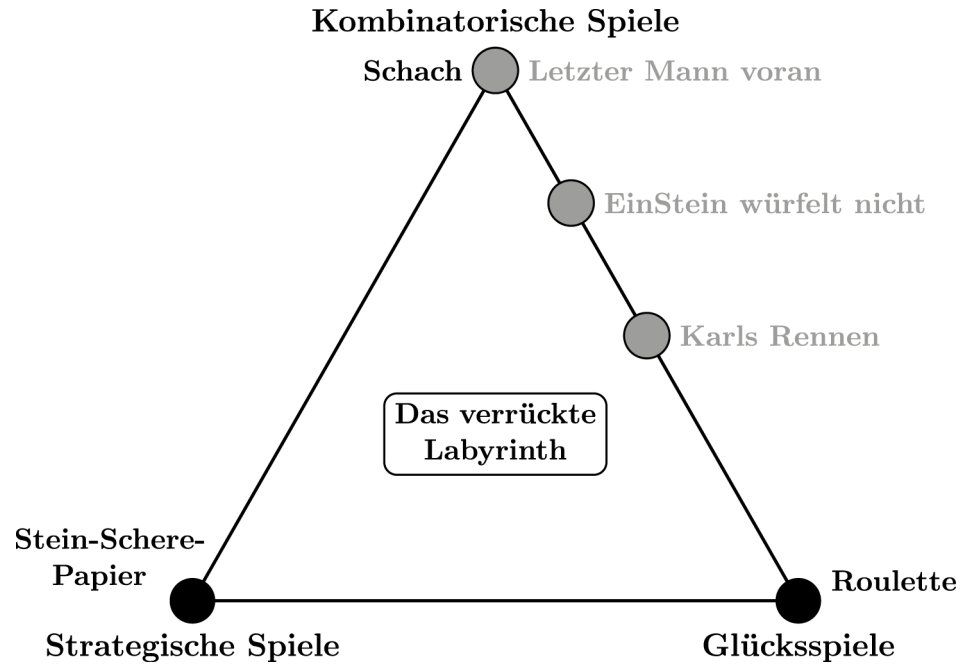


Abbildung 7.1: Die drei Spiele im Bewersdorff-Dreieck

	a	b	c	d	e	
5			S	S		5
4				S	S	4
3	W				S	3
2	W	W				2
1		W	W			1
	a	b	c	d	e	

Abbildung 7.2: Koordinaten und eine Startstellung zu „Letzter Mann voran“

	a	b	c	d	e
5			S	S	
4				S	S
3	W				S
2	W	W	W		
1			W		

1. b1-c2

	a	b	c	d	e
5			S	S	
4				S	
3	W				S
2	W	W	W		
1			W		

2. e4xe3

Abbildung 7.3

	a	b	c	d	e
5			S	S	
4				S	
3	W	W			S
2		W	W		
1			W		

3. a2-b3

	a	b	c	d	e
5			S		
4				S	
3	W	W			S
2		W	W		
1			W		

4. d5xc5

Abbildung 7.4

	a	b	c	d	e
5			S		
4				S	
3	W	W	W		S
2			W		
1			W		

5. b2-c3

	a	b	c	d	e
5					
4		S		S	
3	W	W	W		S
2			W		
1			W		

6. c5-b4

Abbildung 7.5

	a	b	c	d	e
5					
4		W		S	
3		W	W		S
2			W		
1			W		

7. a3xb4

	a	b	c	d	e
5					
4		W		S	
3		W	W	S	
2			W		
1			W		

8. e3-d3

Abbildung 7.6

	a	b	c	d	e
5					
4		W		S	
3		W	W	S	
2			W	W	
1					

9. c1-d2

	a	b	c	d	e
5					
4		W	S		
3		W	W	S	
2			W	W	
1					

10. d4-c4

Abbildung 7.7

	a	b	c	d	e
5					
4		W	W		
3			W	S	
2			W	W	
1					

11. b3xc4

	a	b	c	d	e
5					
4		W	W		
3			W		
2			S	W	
1					

12. d3xc2

Abbildung 7.8

	a	b	c	d	e
5					
4		W	W		
3					
2			S	W	
1					

13. c3xc4

	a	b	c	d	e
5					
4		W	W		
3					
2			/	W	
1		S			

14. c2-b1

Abbildung 7.9

	a	b	c	d	e
5					
4		—	W		
3					
2				W	
1		S			

15.b4xc4

	a	b	c	d	e
5					
4			W		
3					
2				W	
1	S	—			

16.b1-a1

Abbildung 7.10

				S	S	S	
						S	S
							S
							S
W							
W							
W	W						
	W	W	W				

Abbildung 7.11: „Letzter Mann voran“ auf 8×8 -Brett mit je 7 Figuren

	R	R	S	S	
R	R			S	S
R					S
W					B
W	W			B	B
	W	W	B	B	

Abbildung 7.12: Startstellung für die Vierer-Version von „Letzter Mann voran“

	a	b	c	d	e	
5	1*	6	3			5
4	5	2				4
3	4				2	3
2				3	1	2
1			4	6	5	1
	a	b	c	d	e	

Abbildung 7.13: Die ausgeloste Anfangsstellung der Partie zwischen Theo van der Storm (Schwarz) und Ingo Althöfer (Weiß). Weiß beginnt.

	a	b	c	d	e	
5		6	3			1
4	1*	2				
3	4				2	
2				3	1	
1			4	6	5	

1. 1-a5xa4

	a	b	c	d	e	
5		6	3			
4	1	2				
3	4				2	
2				6*	1	
1			4		5	6

2. 6-d1xd2

Abbildung 7.14

	a	b	c	d	e	
5			3			5
4	1	6*				
3	4*				2	
2				6	1	
1			4		5	

3. 5-b5xb4

	a	b	c	d	e	
5			3			
4	1	6		2*		
3	4					
2				6	1	
1			4*		5	3

4. 3-e3-d4

Abbildung 7.15

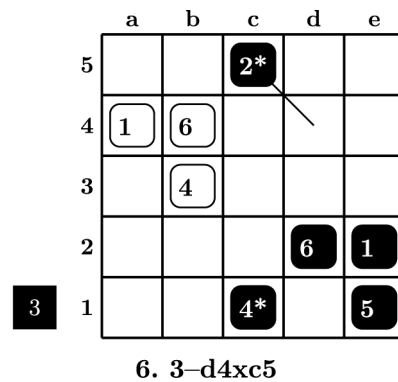
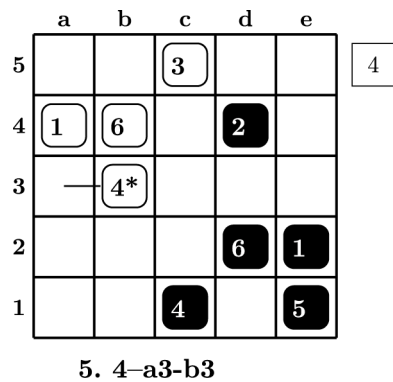


Abbildung 7.16

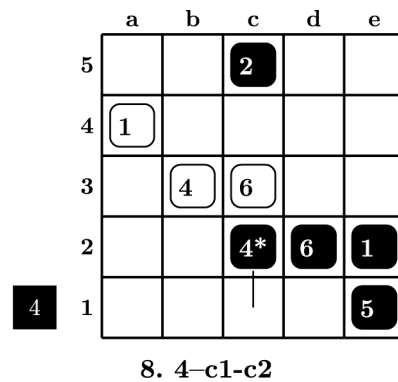
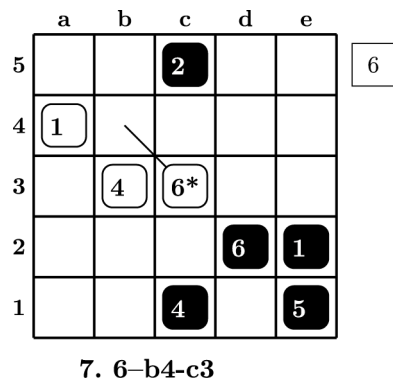


Abbildung 7.17

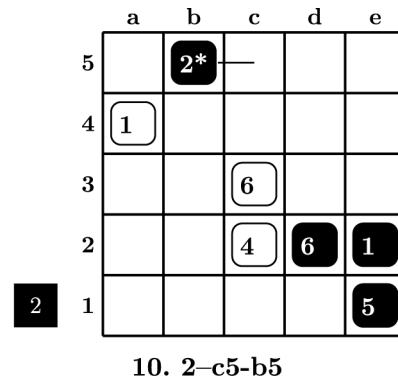
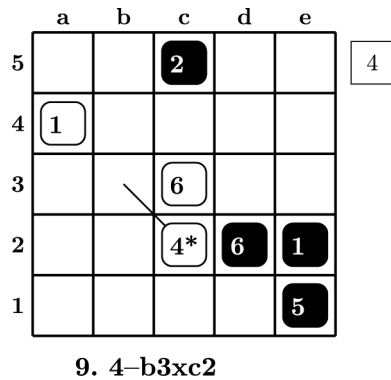


Abbildung 7.18

	a	b	c	d	e	
5		2				1
4	—	1*				
3			6			
2			4	6	1	
1					5	

11. 1-a4-b4

	a	b	c	d	e	
5		2				
4		1				
3			6			
2			6*	—	1	
1					5	6

12. 6-d2xc2

Abbildung 7.19

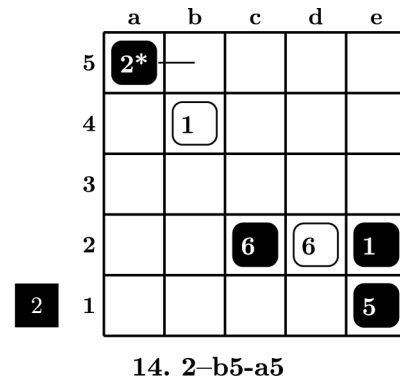
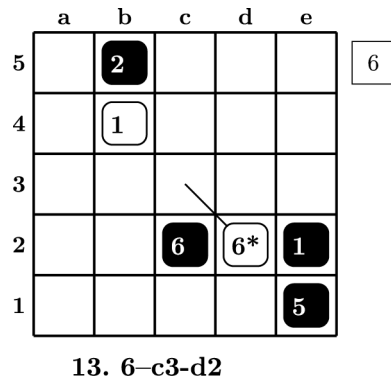


Abbildung 7.20

	a	b	c	d	e	f	
6	W2	W1	W6	B6	B3	B4	6
5	W4	W3			B1	B2	5
4	W5					B5	4
3	R3					S2	3
2	R2	R4			S5	S3	2
1	R1	R5	R6	S4	S1	S6	1
	a	b	c	d	e	f	

Abbildung 7.21: Startstellung für die Vierer-Version von Ewn

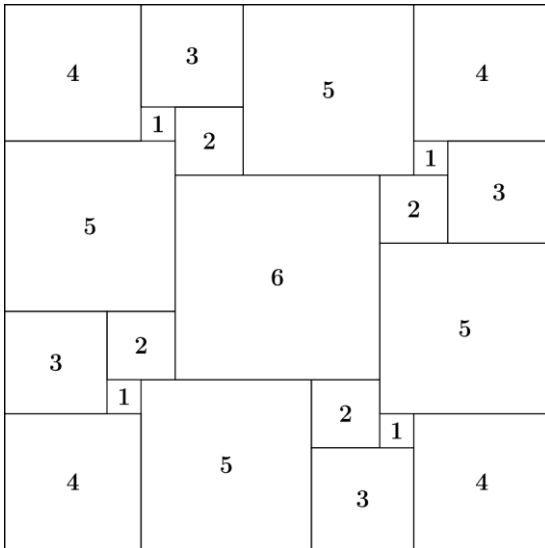


Abbildung 7.22: Die Zahlen in den kleinen Quadraten sind ihre Seitenlängen.

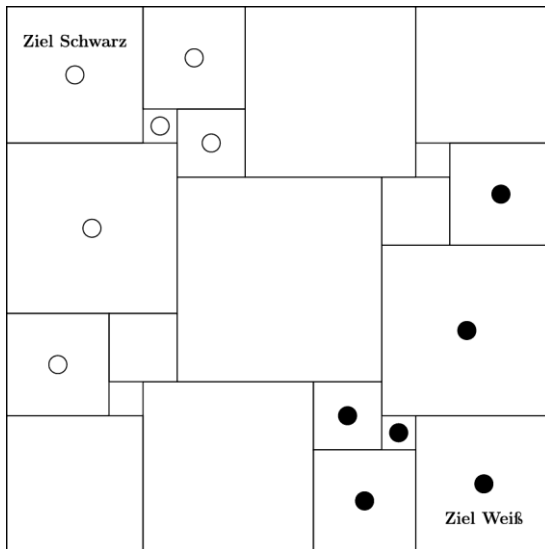


Abbildung 7.23: So sind die Felder zu Beginn mit sechs weißen und sechs schwarzen Steinen besetzt.

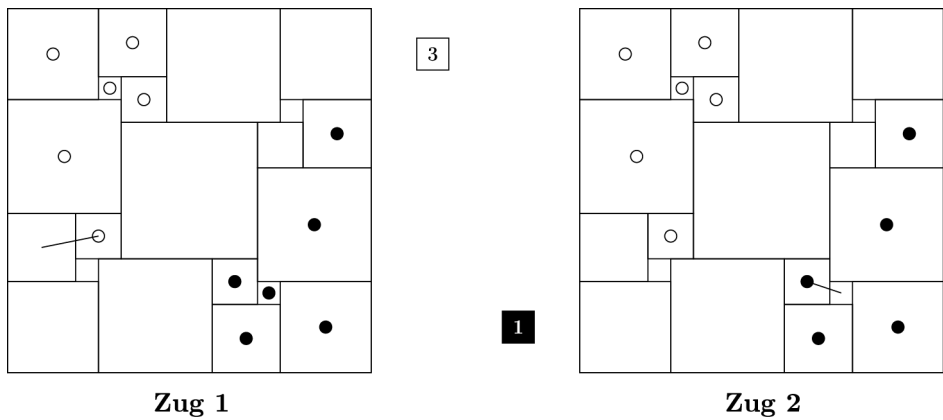
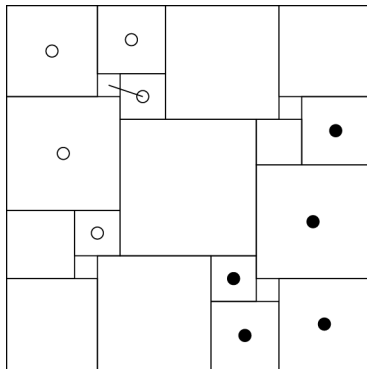
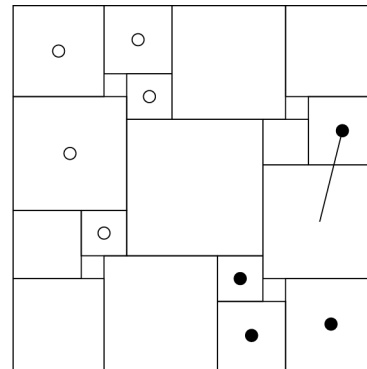


Abbildung 7.24



Zug 3

1



Zug 4

6

Abbildung 7.25

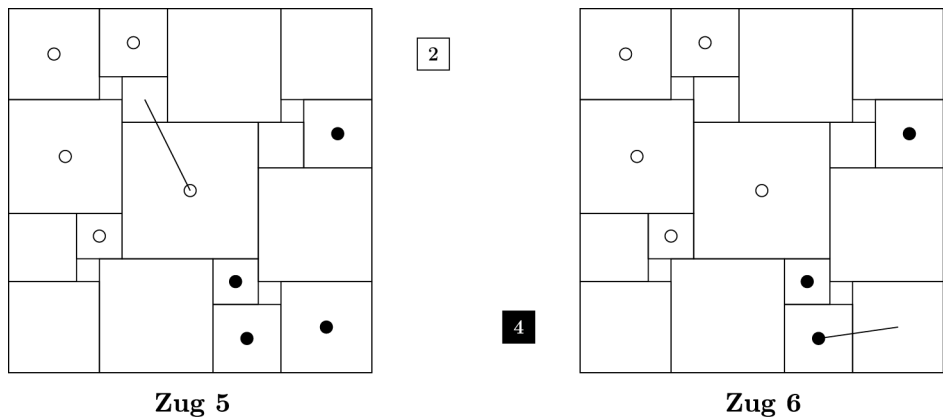


Abbildung 7.26

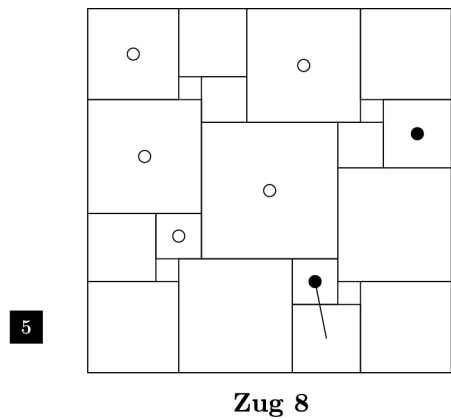
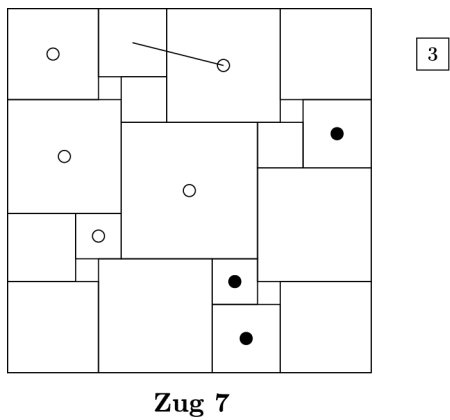


Abbildung 7.27

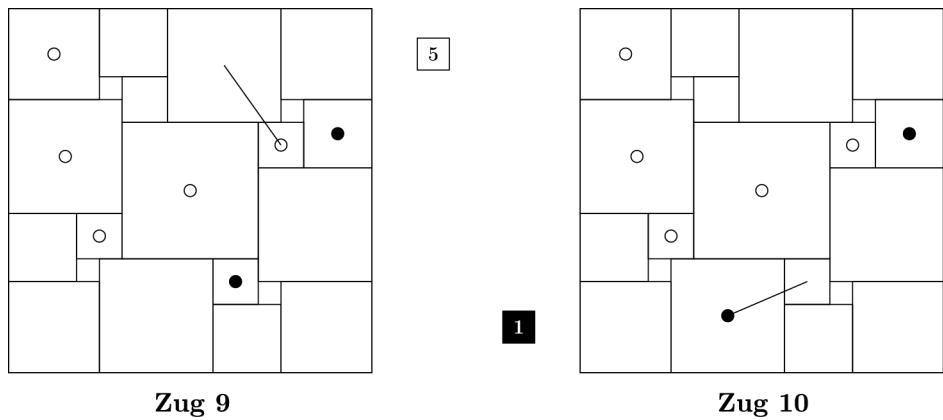
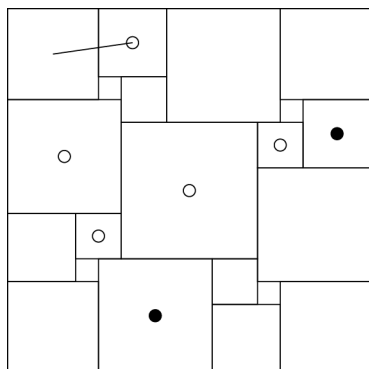
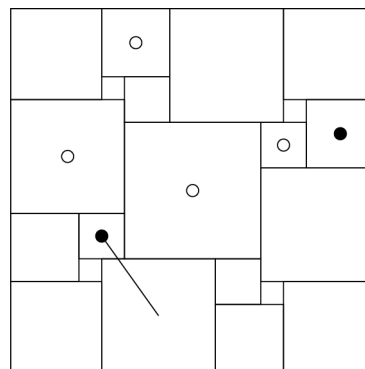


Abbildung 7.28



Zug 11

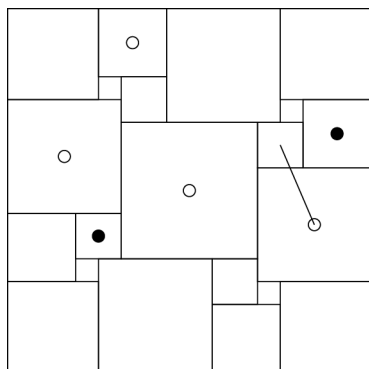
4



Zug 12

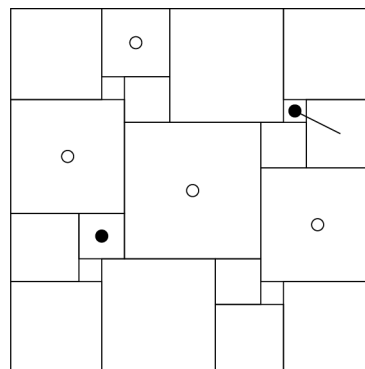
6

Abbildung 7.29



Zug 13

2



Zug 14

4

Abbildung 7.30

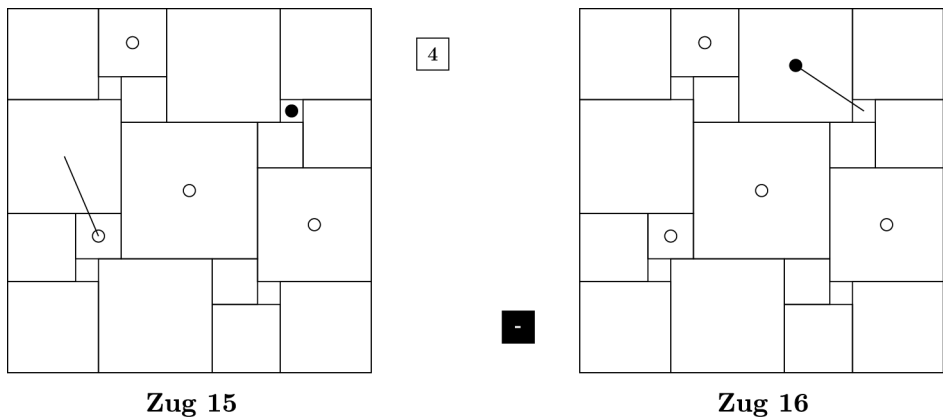


Abbildung 7.31

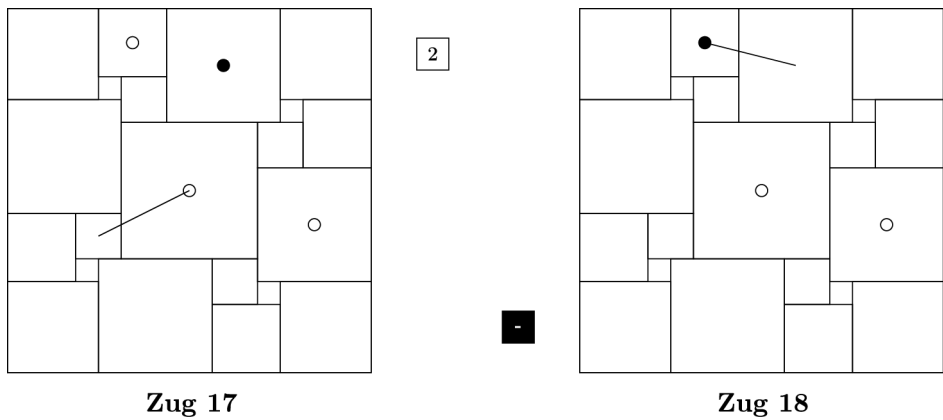


Abbildung 7.32

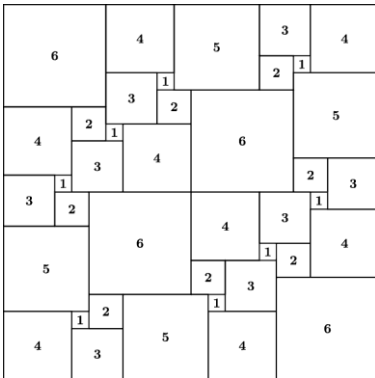


Abbildung 7.33: Karl Scherers alternierendes quadratisches Parkett mit Seitenlänge 22