Symbolik und Übungsaufgaben zur Vorlesung „Versuchsplanung“ von Dieter Rasch

Symbolik

Die folgende Symbolik entspricht mit kleineren Änderungen der in

Anhang A von

Rasch, D., Verdooren L.R.; Gowers, J.I. (2007)

Planung und Auswertung von Versuchen und Erhebungen, R.Oldenbourg Verlag München Wien.

bzw.

Rasch, D., Verdooren L.R. ; Gowers, J.I. (2007)

Design and Analysis of Experiments and Surveys, R.Oldenbourg Verlag München Wien.

Anhang A Symbolik

$Y_{i.} = y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$	Ein Punkt an der Stelle eines Suffix bezeichnet die Summierung über diesen Suffix. Zusätzlich kann der Buchstabe groß geschrieben werden
p	Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses, Grundwahrscheinlichkeit
f, FG	Freiheitsgrade
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\chi}^2, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}^2, \boldsymbol{r}$	Zufallsvariable werden fett gedruckt, ihre Realisationen durch dieselben normalen Buchstaben charakterisiert
$u = \frac{y-\mu}{\sigma}$	Standardisierte Zufallsvariable
$\boldsymbol{e}$	Zufälliger Fehler, Fehlerkomponente in Modellen
n	Stichprobenumfang, Versuchsumfang
N	Umfang einer endlichen Grundgesamtheit, Gesamtumfang mehrerer Stichproben
ln	Natürlicher Logarithmus
$f(y)$	Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$

$\Phi(u)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung
$\phi(u)$	Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung
$N(\mu; \sigma^2)$	Kurzbezeichnung für eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert (Mittelwert) μ und der Varianz σ^2
N(0;1)	Kurzbezeichnung für die standardisierte Normalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$)
$u(P)$	P-Quantil der $N(0;1)$-Verteilung
$t(f;P)$	P-Quantil der t-Verteilung mit f Freiheitsgraden
$\chi^2(f;P)$	P-Quantil der χ^2-Verteilung mit f Freiheitsgraden
$F(f_1;f_2;P)$	P-Quantil der F-Verteilung mit f_1 und f_2 Freiheitsgraden
θ	Bezeichnung für einen nicht näher festgelegten Parameter oder den Intraklasskorrelationskoeffizienten
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Schätzfunktion von (Schätzung von) θ
$\hat{\theta}$	Schätzwert von θ (Realisation von $\hat{\boldsymbol{\theta}}$)
$E(\boldsymbol{y}) = \mu_y = \mu$	Erwartungswert (Mittelwert) der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$
$var(\boldsymbol{y}) = \sigma_y^2 = \sigma^2$	Varianz der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$
$\bar{y}_. = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$	Arithmetischer Mittelwert der Stichprobenwerte
$\bar{\boldsymbol{y}}_. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i$	Arithmetischer Mittelwert der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}_i$, Schätzfunktion für μ
$s = \sqrt{s^2}$	Schätzwert von $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
$\sigma_y = \sigma$	Standardabweichung der Zufallsvariablen $\boldsymbol{y}$
$s_y = s$	Schätzwert von σ_y
$\mu_r = E[(\boldsymbol{y}-\mu)^r]$	r-tes zentrales Moment bei eindimensionalen Zufallsvariablen
$\boldsymbol{m_r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}}_.)^r$	r-tes zentrales Stichprobenmoment, Schätzfunktion von μ_r
$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$	Schiefe
$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\boldsymbol{m}_3}{\boldsymbol{m}_2^{3/2}}$	Stichprobenschiefe, Schätzungsfunktion von γ_1, in SPSS, siehe S. 35

$\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$	Exzess
$\boldsymbol{g}_2 = \dfrac{\boldsymbol{m}_4}{\boldsymbol{m}_2^2} - 3$	Stichprobenexzess, Schätzfunktion von γ_2, in SPSS, siehe S. 36
$\text{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sigma_{xy}$	Kovarianz zwischen Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{s}_{xy} = \hat{\text{cov}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Schätzfunktion von σ_{xy}
ρ	Einfacher (Produkt-Moment-)Korrelationskoeffizient
$\boldsymbol{r}$	Einfacher Stichprobenkorrelationskoeffizient, Schätzfunktion von ρ
σ_a^2	Varianzkomponente des Faktors A
$\boldsymbol{s}_a^2$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_a^2$	Schätzfunktion der Varianzkomponente des Faktors A
MQF	Mittlerer quadratischer Fehler $E[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta)^2]$
β_i	Regressionskoeffizient
$\boldsymbol{b}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$	Stichprobenregressionskoeffizient, Schätzung von β_i
H_0	Nullhypothese
H_A	Alternativhypothese
α	Risiko 1. Art eines statistischen Tests (Irrtumswahrscheinlichkeit)
$1-\alpha$	Konfidenzkoeffizient
β, β^*	Risiko 2. Art, Risiko bei Selektionsproblemen
β^*	Vorgegebene obere Schranke für β
$1-\beta$	Güte eines Tests, Wahrscheinlichkeit der richtigen Auswahl bei Selektionsproblemen
δ	Praktisch interessierende Mindenstdifferenz bei Tests für Lageparameter, halbe erwartete Breite von Konfidenzintervallen für Lageparameter
$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$	Konfidenzintervall mit den Grenzen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$
$(a;b)$	Realisation des Konfidenzintervalles $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$
$A \succ B, B \prec A$	Der Faktor A ist dem Faktor B hierarchisch übergeordnet, d.h., B ist A hierarchisch untergeordnet

$A \times B$	Die Faktoren A und B sind kreuzklassifiziert
$\boldsymbol{SQ}_x$, $\boldsymbol{SQ}$	Summe der Quadrate der Abweichungen bezüglich der Variablen x
$\boldsymbol{MQ}$	Mittleres Abweichungsquadrat
E($\boldsymbol{MQ}$)	Erwartungswert der $\boldsymbol{MQ}$
BUB	Balancierte unvollständige Blockanlage
TBUB	Teilweise balancierte unvollständige Blockanlage
CEIL(x)	Rundungsoperator, ist x ganzzahlig, ergibt sich x, sonst wird CEIL(x) zum ganzzahligen Anteil von $x + 1$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Formulieren Sie eine Aufgabenstellung aus Ihrer Studienrichtung und diskutieren Sie die Schritte (i) bis (iv) und den Plan für (vi)!

Aufgabe 2
Ist eine BUB eine zusammenhängende Blockanlage?

Aufgabe 3
Wieviele Lottoscheine muss man mindestens ausfüllen, um evtl. mit Sicherheit bei jeder denkbaren Ziehung einen Zweier zu haben? Hier steht evtl., da die Existenz nicht gesichert sein muss.

Aufgabe 4
Konstruieren Sie einen faktoriellen Versuchsplan mit 5 Faktoren mit je 2 Stufen!

Aufgabe 5
Berechnen Sie Mittelwerte, Varianzen, Schiefen und Exzesse der beiden Datenreihen der Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1 *Die Wurfgewichte von Labormäusen (in g).*

i	x_i	y_i
1	7,6	7,8
2	13,2	11,1
3	9,1	16,4
4	10,6	13,7
5	8,7	10,7
6	10,6	12,3
7	6,8	14,0
8	9,9	11,9
9	7,3	8,8
10	10,4	7,7
11	13,3	8,9
12	10,0	16,4
13	9,5	10,2

Aufgabe 6

Leiten Sie aus der Genauigkeitsforderung für Konfidenzintervalle die Bedingung für *n ab*

$$E(H) = H = u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \delta \Rightarrow n = \mathrm{CEIL}\left\{\mathrm{u}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma^2}{\delta^2}\right\}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die 0,99 – Konfidenzintervalle für die Grundgesamtheiten der beiden Messreihen in Tabelle 3.1!

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Stichprobenumfänge für eine Intervallschätzung bei folgenden Genauigkeitsvorgaben.

Tabelle Ü1 *Stichprobenumfang n für einige α und c.*

$d = c \cdot \sigma$	$\frac{1}{2{,}5}\sigma$	$\frac{1}{3}\sigma$	$\frac{1}{4{,}5}\sigma$	$\frac{1}{8}\sigma$
$\alpha = 0{,}02$ $\alpha = 0{,}05$ $\alpha = 0{,}08$				

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Stichprobenumfänge in Tabelle Ü2 für eine Intervallschätzung der Differenz der Erwartungswerte bei gepaarten Beobachtungen aus den Differenzen der Werte der Tabelle 3.1

Tabelle Ü2 *Stichprobenumfang n für einige α und c.*

$d = c \cdot \sigma$	$\frac{1}{2}\sigma$	$\frac{1}{3}\sigma$	$\frac{1}{4}\sigma$	$\frac{1}{8}\sigma$
$\alpha = 0{,}01$ $\alpha = 0{,}05$ $\alpha = 0{,}1$				

Aufgabe 10

Berechnen Sie das 0,99 – Konfidenzintervall bei gepaarten Beobachtungen (Interpretation 1) für die Erwartungswertdifferenz der beiden Messreihen in Tabelle 3.1!

Aufgabe 11

Berechnen Sie das 0,99 – Konfidenzintervall bei unabhängigen Stichproben (Interpretation 2) für die Erwartungswertdifferenz der beiden Messreihen in Tabelle 3.1! Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 10 und 11. Was fällt Ihnen auf?