BWL kompakt QR-Code-Aufgabe 5

QR-Code-Aufgabe 5: Minimalkostenkombination

Gegeben sei die folgende substitutionale Produktionsfunktion: $M = r_1^2 \cdot 2r_2$. Die Preise der beiden Einsatzfaktoren betragen $q_1 = 7$ und $q_2 = 28$.

a) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution des Faktors 2 durch den Faktor 1 ($GRS_{2,1}$) für die angegebene Produktionsfunktion, und ermitteln Sie anschließend den Expansionspfad! Geben Sie dazu die Beziehung an, die im Kostenminimum zwischen $GRS_{2,1}$ und den Faktorpreisen q_1 und q_2 gilt!

b) Mit welchen Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 wird die Menge M = 128 kostenminimal hergestellt? Wie hoch sind die minimalen Kosten?

Lösung zu QR-Code-Aufgabe 5 a)

Zur Bestimmung der $GRS_{2,1}$ ist zunächst die Isoquantengleichung aufzustellen:

$$r_2 = \frac{M}{2r_1^2} = \frac{M}{2} \cdot r_1^{-2}.$$

Die erste Ableitung dieser Gleichung nach r_1 liefert $GRS_{2,1}$:

$$GRS_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{M}{2} \cdot 2r_1^{-3} = -\frac{M}{r_1^3}.$$

Zur Bestimmung des Expansionspfads muß die Beziehung, die im Kostenminimum zwischen der $GRS_{2,1}$ und den Faktorpreisen q_1 und q_2 gilt, bekannt sein.

$$\text{Diese lautet: } \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

$$-\frac{M}{r_1^3} = -\frac{7}{28} = -\frac{r_1^2 \cdot 2r_2}{r_1^3} = -\frac{1}{4} = -\frac{2r_2}{r_1} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Expansionspfad: } r_2 = \frac{1}{8} r_1.$$

Lösung zu QR-Code-Aufgabe 5 b)

Die Menge M = 128 kann mit folgenden Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 kostenminimal erzeugt werden:

$$M = r_1^2 \cdot 2r_2 = r_1^2 \cdot \frac{1}{4} r_1 = \frac{1}{4} r_1^3 = 128.$$

$$r_1 = 8 \text{ und } r_2 = \frac{1}{8} r_1 = 1.$$

Die sich dabei ergebenden minimalen Kosten betragen:

$$K = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 = 7 \cdot 8 + 28 \cdot 1 = 84.$$