

Józef Sidorowicz

ТЕПЛОВАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ГЛАДКОЙ И ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ В R^3

Сначала рассмотрим пример явления "тепловой дифракции" по отношению к внешности цилиндрической поверхности ∂D области $D \subset R^3$ (см. рис.1). Пусть w_t - винеровский процесс в R^3 ; точки x, y лежат в зоне глубокой тени по отношению к D , т.е. отрезок $[x, y]$ пересекает область D ; $p_D^+(t, x, y)$ - переходная плотность w_t из точки x в точку y с условием отражения на ∂D , $p_D^-(t, x, y)$ - переходная плотность w_t из x в y с условием поглощения на ∂D .

Найдем логарифмическую асимптотику $p_D^+(t, x, y)$ при фиксированных x, y и $t \rightarrow 0$.

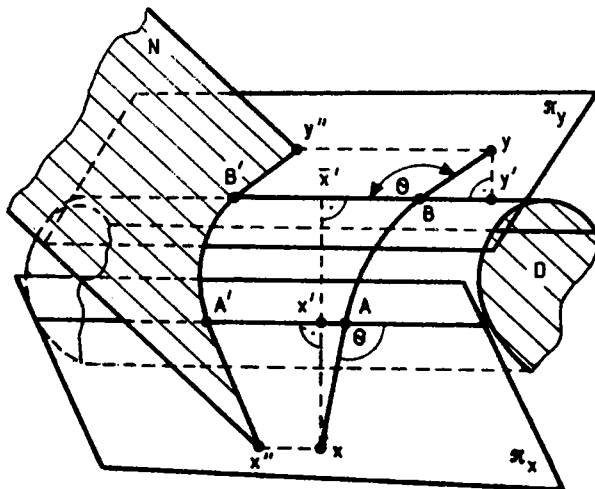


Рис.1

Предположим, что кратчайший путь γ_{xy} , соединяющий x и y по внешности области D , единственный. Очевидно, что γ_{xy} состоит из дуги $\widetilde{AB}$ винтовой линии ($\widetilde{AB} \subset \partial D$) и отрезков $[x, A]$, $[B, y]$ касательных к $\widetilde{AB}$ соответственно в точках A и B . Пусть

$$\hat{\rho}(x, y) = |\gamma_{xy}| = |[x, A]| + |\widetilde{AB}| + |[B, y]|.$$

Отметим еще, что плоскости π_x, π_y (см. рис.1) касательные к ∂D содержат соответственно точки x, y и образующие AA', BB' . Так же отметим, что $[x, A] \subset \pi_x, [B, y] \subset \pi_y$.

Здесь удобно рассматривать процесс w_t как сумму двух винеровских процессов. Один из них - это одномерный процесс $\bar{w}_t$, протекающий по направлению образующей поверхности ∂D (см. рис.1) из точки $\bar{x}'$ в точку y' , т.е. вдоль отрезка $[\bar{x}', y']$. Здесь $\bar{x}', y'$ - перпендикулярные проекции соответственно точек x, y на образующую BB' . Очевидно, что

$$|[\bar{x}', y']| = \gamma_{\bar{x}'y'} = \hat{\rho}(x, y) \cos \theta,$$

где θ - угол между $[x, A]$ и образующей AA' . (Этот результат легко можно доказать воспользовавшись инвариантностью геодезической при изгибании поверхности).

Согласно Цесельскому [1] процесс $\bar{w}_t$ имеет плотность

$$p_D^+(t, \bar{x}', y') \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{\hat{\rho}^2(\bar{x}', y')}{2t} \right].$$

Второй процесс $\bar{\bar{w}}_t$ - это двумерный, протекающий в плоскости N ортогональный к образующим поверхности ∂D вдоль пути $\gamma_{x''y''}$, который является прямоугольной проекцией γ_{xy} на плоскость N . Очевидно, что длина

$$\hat{\rho}(x'', y'') = |\gamma_{x''y''}| = |[x'', A']| + |\widetilde{A'B'}| + |[B', y'']| = \hat{\rho}(x, y) \sin \theta.$$

Используя результат дифракции винеровского процесса на гладкой кривой в R^2 , имеем

$$\ln p_D^+(t, x'', y'') = -\frac{\hat{\rho}^2(x'', y'')}{2t} - \frac{\lambda_1^{\pm} \sqrt{\hat{\rho}^4(x'', y'')}}{\sqrt{2t}} \int_{A'}^{B'} K_1^{\frac{2}{3}}(u) du + O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right),$$

где $K_1(u)$ - кривизна дуги $\widehat{A'B'}$ или же главная кривизна поверхности ∂D не равная нулю, $\lambda_1^{\pm}$ - младшие собственные значения задачи

$$-\frac{d^2 y^{\pm}}{dx^2} + xy^{\pm} = \lambda y^{\pm}, \quad y^-(0) = 0, \quad \frac{dy^+}{dx}(0) = 0.$$

Складывая оба процесса $\bar{w}_t$ и $\bar{\bar{w}}_t$, получаем окончательный результат

$$\begin{aligned} \ln p_D^+(t, x, y) &= \ln p_D^+(t, x', y') + \ln p_D^+(t, x'', y'') = \\ &= -\frac{\hat{\rho}^2(x, y)}{2t} - \frac{\lambda_1^{\pm} \sqrt{\hat{\rho}^4(x, y)}}{\sqrt{2t}} \int_A^B K^{\frac{2}{3}}(u) du + O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right), \end{aligned}$$

где $K(u)$ - кривизна винтовой линии.

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть ∂D - регулярная строго выпуклая гиперповерхность области $D \subset R^{\nu}$; точки x, y находятся во внешности D в зоне глубокой тени по отношению к D ; γ_{xy} - кратчайший путь, соединяющий точки x, y ; дуга $\widehat{AB}$ - кратчайшая геодезическая, соединяющая точки касания A и B отрезков $[x, A]$ и $[y, B]$ соответственно.

Введем полугеодезическую систему координат по отношению к ∂D . Пусть $\{u_1\}$, $1 = 1, 2, \dots, \nu-1$, координаты точки u на поверхности ∂D , v - евклидово расстояние по нормали к ∂D .

Если $\vec{n}$ - единичный вектор нормальный к ∂D в точке u , тогда любая точка z , находящаяся во внешности области D , имеет представление

$$z = \vec{r}(u) + v \vec{n}(u),$$

где $\vec{r}(u)$ - ведущий вектор поверхности ∂D .

Отсюда

$$\begin{aligned} d\vec{z} &= d\vec{r} + v d\vec{n} + \vec{n} dv, \\ d\vec{z}^2 &= d\vec{r}^2 + 2v d\vec{r} d\vec{n} + v^2 d\vec{n}^2 + dv^2, \end{aligned}$$

где $d\vec{r}^2$, $d\vec{r} d\vec{n}$, $d\vec{n}^2$ - соответственно первая, вторая и третья квадратические формы поверхности. Последнее равенство преобразуем так

$$d\vec{z}^2 = d\vec{r}^2 \left[1 + 2v \frac{d\vec{r} d\vec{n}}{d\vec{r}^2} + v^2 \frac{d\vec{n}^2}{d\vec{r}^2} \right] + dv^2.$$

По формуле Эйлера [3]

$$\frac{d\vec{r} d\vec{n}}{d\vec{r}^2} = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(u) \cos^2 \varphi_j(u) = K_N(u),$$

где λ_j - главные кривизны поверхности ∂D в точке u , φ_j - углы вектора $d\vec{r}$ с главными направлениями, $K_N(u)$ - кривизны нормального сечения в направлении $d\vec{r}$.

При тех же обозначениях для λ_j и φ_j получаем так же, что

$$\frac{d\vec{n}^2}{d\vec{r}^2} = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j^2(u) \cos^2 \varphi_j(u).$$

Учитывая, что v^2 значительно мало, то в ε - окрестности ∂_{xy} можно считать

$$d\vec{z}^2 = \sum_{i,j}^{p-1} g_{ij}(u) [1 + v K_N(u)]^2 du^i du^j + dv^2.$$

Если еще учесть формулу Картана

$$g_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{k,l=1}^{n-1} R_{ikjl}(u) u_k u_l + O(|u|^3)$$

и то, что движение процесса w_t детерминировано вдоль кратчайшей геодезической, тогда имеем

$$d\vec{x}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \left[1 + vK\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}\right) \right]^2 du_j^2 + dv^2,$$

где $K\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}\right)$ — кривизна общей части кратчайшей геодезической γ_{xy} с ∂D . Соответствующий оператор Лапласа-Бельтрами имеет вид

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left[1 + vK\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}\right) \right]^2} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Сравнивая этот оператор с соответствующим оператором в R^2 (см. [2]), получаем результат.

Т е о р е м а . Если точки x и y находятся в зоне глубокой тени по отношению к гладкой строго выпуклой поверхности ∂D области $D \subset R^n$ и кратчайший путь γ_{xy} по внешней стороне D единственный, то при введенных выше обозначениях для $\hat{\rho}$, λ_1^+ , A , B , K и при $t \rightarrow 0$ имеем

$$\ln p_D^+(t, x, y) = - \frac{\hat{\rho}^2(x, y)}{2t} - \frac{\lambda_1^+ \sqrt[3]{\hat{\rho}^4(x, y)}}{\sqrt[3]{2t}} \int_A^B K^{\frac{2}{3}}(u) du + O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right).$$

В заключение автор хочет поблагодарить С.А. Молчанова за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Z. Ciesielski : Heat conduction and the principle of not feeling the boundary, Bull. Acad. Polon. Ser. Math. 14 (1966) 435-440.
- [2] J. Sidorowicz : Тепловая дифракция на гладкой выпуклой области, Demonstratio Math. 2 (1985) 527-536.
- [3] Г.В. Шилов : Математический анализ. Ч. I и II, Москва, 1972.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HIGHER ENGINEERING SCHOOL,
75-620 KOSZALIN, POLAND

Received March 13, 1987.