

Sekundärströmungen in viskoelastischen Flüssigkeiten – ein Rückblick

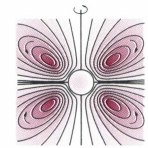
Beiträge
Papers

Secondary flows in viscoelastic fluids – a retrospect

Es wird ein – den Zeitraum von rund zwanzig Jahren (1956–76) umfassender – geschichtlicher Überblick über die theoretische Voraussage und die experimentelle Realisierung verschiedener Typen von Sekundärströmungen in viskoelastischen Flüssigkeiten gegeben [1], [2]. Dies sind zuerst die stationären Strömungen um rotierende Körper, durch gerade und gekrümmte Rohre sowie in konischen und Keilspalt-Düsen, doch wird abschließend auch kurz auf solche in oszillatorischen Strömungen eingegangen.

This paper provides a historical overview of theoretical and experimental developments related to a variety of secondary flows in viscoelastic fluids, covering the critical years from 1956 to 1976 [1], [2]. Types of flows described include steady flow around rotating bodies, flow through straight and curved pipes and through conical and slit dies. Finally oscillatory flows are briefly discussed in the closing section.

H. Giesekus,*
Dortmund,
Germany



1 Einleitung

Als in den frühen fünfziger Jahren die ersten Informationen über Normalspannungseffekte durch die als Folge des Krieges Deutschland noch umgebenden Isolationswände hindurchdiffundierten, waren das erregende Neuigkeiten. Insbesondere traf dies für *M. Reiners* theoretische Voraussagen [3] der Existenz einer Flüssigkeit mit „Querviskosität“ und noch mehr für die von *K. Weissenberg* 1948 auf dem ersten Rheologie-Kongreß vorgestellten Experimente [4] zu. Nicht nur waren Phänomene wie z. B. das Hochklettern von Flüssigkeiten an einer Rührerwelle als solche verblüffend, sondern die Vorstellung von Normalspannungen, die den Stromlinien quasi den Charakter von gespannten Gummifäden verleihen, eröffnete ganz neue Gesichtspunkte für das Nachdenken über die Möglichkeit weiterer absonderlicher Effekte in Strömungen sog. nicht-newtonscher Flüssigkeiten.

Zwar wußte man längst, daß durch eine scherzgeschwindigkeitsabhängige Viskosität die Strömungsprofile beeinflußt werden können, aber die Strömungsform selbst blieb dabei doch erhalten. Nun aber erhob sich die Frage, ob infolge von Normalspannungen nicht weitergehende Veränderungen des Strömungscharakters möglich sein könnten, d. h. ob sich der Primärströmung, wie sie unter vorgegebenen Randbedingungen in einer newtonschen Flüssigkeit in Erscheinung treten würde, nicht noch eine das Strömungsbild qualitativ verändernde Sekundärströmung überlagern könnte.

Natürlich kannte man auch in newtonschen Flüssigkeiten sekundärströmungsartige Effekte längst als Folge der Massenträgheit, z. B. der Zentrifugalkräfte, doch spielten solche bei den durchweg sehr zähen nicht-newtonschen Flüssigkeiten zumeist nur eine untergeordnete Rolle. Bei diesen müßte man den

1 Introduction

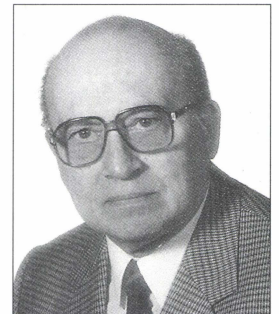
As the first news of normal stress effects penetrated the post-war isolation surrounding Germany in the early 1950s, it generated considerable excitement. Such effects supported *M. Reiner's* theoretical predictions about the existence of fluids with “cross viscosity” [3] and were particularly applicable to the experimental results shown by *K. Weissenberg* in 1948 at the first International Congress on Rheology [4]. Not only were the newly observed effects such as rod-climbing astounding, the notion of normal stresses, which cause flow lines to attain a character somewhat like stretched rubber threads, provided a new perspective for considering other peculiar flow effects exhibited by non-Newtonian fluids.

Of course, it had long been known that the flow profile could be influenced by a shear rate dependent viscosity, even while the form of the flow remained the same. Now however, the question arose whether normal stresses could cause more extensive changes to the flow character. For instance, could the primary flow, i. e., that exhibited by a Newtonian fluid under the given boundary conditions, be superimposed with a secondary flow that differed qualitatively from the primary flow?

Prof. em. Dr. rer. nat. Hanswalter Giesekus

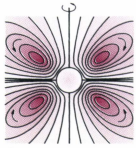
geb. 1922 in Hückeswagen (Bergisches Land), studierte an der Universität Göttingen Physik. Nach der Promotion war er von 1950 bis 1970 wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Bayer AG in Leverkusen und von 1970 bis 1987 Inhaber des Lehrstuhls für Strömungsmechanik im FB Chemietechnik der Universität Dortmund.

born in 1922 in Hückeswagen (Bergisches Land), studied physics at the University of Göttingen. After completing his doctorate he worked for Bayer AG in Leverkusen from 1950 to 1970. From 1970 to 1987 he occupied the Chair of Fluid Mechanics in the Chemical Engineering Department at the University of Dortmund.



* Stark gekürzte Fassung des Hauptvortrages auf der Jahrestagung der Fachgruppe Rheologie in der Polymer-Gruppe der Schweiz am 28. März 1996 in Basel – zu Ehren von Prof. Dr. Joachim Meissner aus Anlaß seiner Emeritierung.

* Condensed version of the plenary lecture given at the Annual Meeting of the Rheology Section of the Polymer Group, Switzerland in Basel on March 28, 1996. Dedicated to Prof. Joachim Meissner on the occasion of his award of Emeritus Professor status.



viskoelastischen Normalspannungskräften, wenn sie qualitativ ähnliche Veränderungen hervorrufen würden, erheblich größere Wirkungen zutrauen können.

Der theoretische Einstieg in diese Problemstellung erfolgte durch eine 1956 veröffentlichte Untersuchung von J. L. *Ericksen* [5]. Darin wurde gezeigt, daß in geraden Rohren eine geradlinige Strömung nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen existieren kann. Die nahezu triviale Konsequenz davon ist, daß man zusätzlich zu der geradlinigen Primärströmung in der Querschnittsebene des Rohres verlaufende Sekundärströmungskomponenten annehmen muß, und deren Form wurde für den Fall eines elliptischen Rohrquerschnitts unter Zugrundelegung des Modells einer sogenannten Reiner-Rivlin-Flüssigkeit auch kurz darauf von A. E. *Green* und R. S. *Rivlin* [6] berechnet. Diese Rechnungen ließen allerdings erkennen, daß für derartige Sekundärströmungen in erster Näherung nur die zweite Normalspannungsdifferenz eine Rolle spielt, die stets klein gegenüber der ersten ausfällt, und daß der Effekt mit der vierten Potenz des treibenden Druckes zunimmt. Daher sollte man a priori erwarten, daß solche Effekte nur eine sehr geringe Intensität aufweisen.

2 Sekundärströmungen um rotierende Körper

Nun veröffentlichte aber J. G. *Oldroyd* [7] 1958 ähnliche Betrachtungen, wie sie zuvor von *Ericksen* für geradlinige Strömungen durchgeführt worden waren, für Strömungen um rotationssymmetrische stationär rotierende Körper. Dabei fand er, daß auch bei Vernachlässigung von Zentrifugaleffekten eine kreisförmige Strömung nicht existieren kann, wenn Normalspannungen vorhanden sind. Eine einfache Analyse ließ weiterhin erkennen, daß die als Folge davon in der Meridianebene entstehende Sekundärströmung bereits als ein Effekt zweiter Ordnung in der relativen Umdrehungsgeschwindigkeit auftreten und dabei auch die erste Normalspannungsdifferenz von Einfluß sein müßte.

Dies war eine Anregung, solche Strömungen experimentell zu realisieren und auf Sekundäreffekte zu untersuchen. Als geeignete Versuchsflüssigkeit erwiesen sich wäßrige Lösungen von Polyacrylamid. Als wir zum ersten mal eine Kugel in einer Flasche mit Versuchsflüssigkeit, in der eine Anzahl Luftblasen verteilt waren, rotieren ließen, bekamen diese momentan ganz spitze „Schnauzen“ und bewegten sich – jedenfalls in einer Umgebung der Äquatorebene – nahezu radial auf die Achse der Kugel zu. Bei den anschließend in einem Plexiglasgefäß mit quadratischem Grundriß durchgeführten Versuchen konnten deshalb die Stromlinien durch Injektion eines Fadens mit angefarbter Flüssigkeit sichtbar gemacht und photographisch erfaßt werden. Es wurden nicht nur Strömungen um eine rotierende Kugel untersucht, sondern auch solche

Natürlich, sekundäre Flow-Effekte in Newtonian fluids due to inertial forces such as centrifugal effects had also long been known. However, these effects were only marginally important in non-Newtonian fluids, which typically have a very high viscosity. For such fluids, viscoelastic normal stresses, if imparting qualitatively similar peculiarities as inertial forces, were capable of causing considerably larger effects.

The theoretical entry into this field was accomplished in a study published in 1956 by J. L. *Ericksen* [5]. This work showed that obtaining a precisely rectilinear flow for non-Newtonian fluids flowing through straight pipe was possible only under very restricted conditions. The almost trivial consequence is that, in addition to the linear primary flow, one must assume existence of a secondary flow component in the cross-sectional plane of the pipe. The form of this component was calculated by A. E. *Green* and R. S. *Rivlin* [6] for the case of an elliptical pipe cross-section using the so-called Reiner-Rivlin fluid model. From these calculations it was apparent that, for this type of secondary flow, to a first approximation the effect depends only on the second normal stress difference, which is always much smaller than the first normal stress difference. The calculations also showed that the effect increased proportionally to the applied pressure raised to the fourth power. One could therefore a priori conclude that such effects would be of very limited intensity.

2 Secondary flows around rotating bodies

In 1958 J. G. *Oldroyd* [7] published theoretical predictions similar to those *Ericksen* had presented for linear flows, but this time considered flow around axially symmetric steadily rotating bodies. He found that even when centrifugal effects were ignored, a circular flow cannot exist when normal stresses are present. A simple analysis also showed that the secondary flow (which originates in the meridian plane) is a second order function of the angular velocity and that the first normal stress difference is also of controlling influence in this phenomenon.

These theoretical predictions stimulated experimental efforts to realize such flows and to look for secondary effects. Aqueous solutions of polyacrylamide proved to be a suitable test fluid. The first time we placed a sphere into a glass bottle of test fluid in which a large number of air bubbles was distributed and began rotating the system, the bubbles adopted a stretched out form with sharply defined tips (at least near the equatorial plane) and moved about radially up to the sphere axis. In follow-on experiments conducted with a Plexiglas vessel with square bottom, it was possible to visualize and photograph the flow lines by injecting a thread of dyed fluid. Using this method other flows

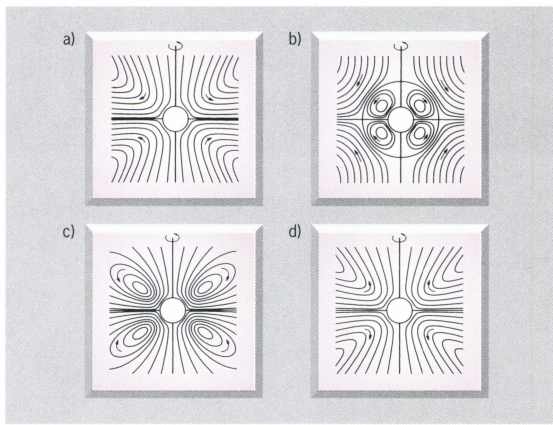


Abb. 1:
Meridianschnitt des Sekundärströmungsfeldes um eine rotierende Kugel gemäß der Approximation zweiter Ordnung für verschieden stark viskoelastische Flüssigkeiten. Nach [1]

Fig. 1.
Meridional section of the secondary flow field around a rotating sphere based on the second order approximation for fluids with varying degrees of viscoelasticity (from [1])

in einer Kegel-Platte-Geometrie sowie – im Hinblick auf Probleme des Rührens und Mischens in viskoelastischen Flüssigkeiten – um einige Rührer. Dank der Geschicklichkeit des mit diesen Experimenten betrauten Diplomanden *K. Feldkamp* konnte ein Farbfilm hergestellt werden, der die beobachteten Strömungsphänomene noch viel eindrucksvoller vorzuführen gestattete. Er wurde 1963 auf dem 4. Internationalen Rheologie-Kongreß vorgeführt und erregte dort – als die wohl erste Demonstration von Sekundärströmungsphänomenen überhaupt – einiges Aufsehen [8].

Hier sei noch kurz auf die parallel verlaufende theoretische Analyse eingegangen. Für die umströmte Kugel wurde das Strömungsfeld von uns zuerst unter Vernachlässigung, kurz darauf aber auch unter Einbeziehung der Trägheit für eine sog. „Flüssigkeit zweiter Ordnung“ berechnet. Der trägheitslose Fall war schon kurz zuvor von *W. E. Langlois* [9] für die etwas kompliziertere Strömung zwischen zwei relativ zueinander rotierenden konzentrischen Kugeln behandelt worden. Das Problem war offenbar reif für eine Lösung: So zeigte mir *K. Walters* auf dem o. g. Kongreß seine noch unveröffentlichten Ergebnisse [10], die er mit Hilfe eines anderen Flüssigkeitsmodells und einer anderen mathematischen Methode gewonnen hatte, und diese erwiesen sich als mit den unsrigen äquivalent. Auch *R. K. Bhatnagar* [11] hatte in Indien etwa zur selben Zeit das gleiche Ergebnis erhalten.

Das mittels der Approximation zweiter Ordnung berechnete Sekundärströmungsfeld ist in *Abb. 1* im Meridianschnitt dargestellt. Je nach der Größe des Verhältnisses von Viskoelastizität und Massendichte – die erstere gekennzeichnet durch eine zeitartige Konstante (analog einer sog. „Relaxationszeit“) – ergeben sich vier wesentlich verschiedene Typen. Für eine newtonsche Flüssigkeit (a) dominiert im gesamten Feld der Einfluß der Zentrifugalkräfte, welche die Strömung in einem gewissen symmetrisch zur Äquatorebene gelegenen Winkelbereich nach außen und außerhalb desselben nach innen fördern. Wird indessen ein kritischer Wert des genannten Verhältnisses überschritten, wird das Strömungsfeld in zwei Zonen aufgeteilt (b), die durch eine zur rotierenden Kugel konzentrische Kugelfläche gegeneinander abgegrenzt werden: in der inneren dominieren die viskoelastischen Normalspannungen, welche die Flüssigkeit in Äquaturnähe nach innen ziehen, in der äußeren dagegen die Zentrifugalkräfte. Mit zunehmender Viskoelastizität wird die innere Zone stetig vergrößert und füllt von einem zweiten kritischen Wert ab den ganzen Außenraum (c); anders

were also examined such as cone and plate flow and, with a view to understand stirring and mixing problems, flows created by various stirrers. Through the skill of the student conducting these experiments, *K. Feldkamp*, a color film was produced that dramatically demonstrated the flow phenomena. This film was presented at the 4th International Congress on Rheology. As the first public demonstration of secondary flow phenomena, it created a sensation [8].

Here I will briefly discuss some of the theoretical analysis that was occurring in parallel to the experimental work. In our initial analysis of the flow field surrounding the immersed sphere we neglected inertial effects; these were later included wherein we considered the model of a so-called “second-order fluid.” The case without inertia had already been solved by *W. E. Langlois* [9] a short time earlier for the more complicated flow between two concentric spheres in opposed rotation. The problem was obviously ripe to be solved: at the Rheology Congress mentioned above *K. Walters* showed me unpublished calculations [10] obtained using a different fluid model and different mathematical method; these proved to be identical to our results. Around the same time *R. K. Bhatnagar* [11] in India also produced the same results.

The secondary flow field calculated using the second-order fluid approximation is shown in *Fig. 1* for the meridional cross-section. Depending on the magnitude of the viscoelasticity to mass density ratio (where the former is characterized by a time constant analogous to a relaxation time), essentially four types of flow fields may exist. For the Newtonian fluid shown in (a), centrifugal forces dominate over the entire flow region, forcing flow within certain angular regions (symmetric with respect to the equatorial plane) outward, and drawing the flow inward outside these regions. If the viscoelasticity/mass density ratio exceeds a critical value, the flow field consists of two adjacent zones divided along a spherical perimeter concentric to the rotating sphere, as shown in (b). In the inner zone viscoelastic normal stresses dominate – these stresses pull the fluid inward near the equatorial plane. In the outer zone centrifugal forces dominate and the flow lines are analogous to those of the Newtonian liquid. As the viscoelasticity increases, the size of the inner zone also steadily increases until, at a second critical value of the ratio, it occupies the entire outer region as shown in (c). In contrast to a Newtonian fluid, the flow line projections lie on closed curves around common centres, and only extend to infinity when inertial effects are ignored completely, as shown in (d).

Aren't you also looking for the ultimate solution in rheology?

Physica has set new standard in rheology. As a creative partner of research and industry, Physica has developed, in close cooperation with its customers, problem solutions for all sectors of rheology. More than 50 employees work together to produce a product and a service which can't be matched.

The result: Modular rheology systems that meet your growing demands. And so it isn't just by chance that you can get a very definite idea of all we do for you. See opposite page.

Physica competes by performing. And that is your gain.

We would be pleased to prove this to you. You can discover more in our new brochure "On Physica in Germany".

Just call us or send us a fax.

The expandable laboratory rheometer system

a for measuring the viscosity and for recording and evaluating flow curves:
PHYSICA VISCOLAB LC 3 and LC 100 for rotational tests with controlled shear rate

b for measuring the viscosity and the yield point and for recording and evaluating the flow behaviour:
PHYSICA-RHEOLAB MC 10 for rotational tests with controlled shear rate or shear stress

c for measuring viscous and elastic material properties and for recording and evaluating the flow and strain behaviour:
PHYSICA-RHEOLAB MC 20, MC 100, MC 120 for rotational, creep and oscillation tests with controlled shear rate or shear stress

The right measuring system for your applications

1. in quality control and product development, for safe absolute measurements, yet easy to handle:
Standard measuring drive system
PHYSICA SM-LM for cylinder measuring systems

2. in quality control and product development for small sample quantities, short temperature control times and quick cleaning:
Standard measuring drive system
PHYSICA SM-KP for cone/plate and plate/plate measuring systems

3. in research and product development as a modular design system, adaptive to all applications over a wide temperature range:
Universal measuring drive system
PHYSICA UM for cylinder, cone/plate and plate/plate measuring systems

The compact rheometer for the low stress sector

4. A CSS rheometer with measuring drive system with air bearing and computer-controlled gap setting for measuring viscous and elastic material properties at extremely low shear stresses and for recording and evaluating the flow and strain behaviour:
PHYSICA Low Stress LS 100 for rotational, creep and oscillation tests; with Peltier temperature control device for cone/plate and plate/plate measuring systems and a liquid temperature control device for cylinder measuring systems

The first portable rheometer of its class

5. The first portable rheometer for quality control and product development, for measuring the viscosity and yield point and for recording and evaluating the flow behaviour:
PHYSICA-RHEOLAB MC 1
Portable for rotational tests with controlled shear rate and shear stress - expandable with temperature-control and measuring drive systems for cylinder, cone/plate and plate/plate measuring systems

The special system for your special wishes

6. A dynamic capillary rheometer with integrated oscillating U-tube for measuring viscous and elastic material properties as a function of frequency or strain on low-viscosity fluids, as well as the density:
PAAR DCR

7. A viscometer for automatically measuring the viscosity of low to medium-viscosity fluids with highest reproducibility; connecting option for the autosampler SPV; can be combined with PAAR density meters:
Rolling ball viscometer PAAR AMV 200/SPV

8. An automatic falling ball viscometer for determining viscoelastic material properties at extremely low shear rates on high-viscosity materials:
Magnetoviscometer PAAR MVM

9. A viscometer for measuring the viscosity and for determining the flow behaviour of substances under extreme shear stresses:
High-shear capillary viscometer PAAR HVA 6

10. A favourably priced, standard method for manually measuring the viscosity of fluids:
Falling-ball viscometer according to Höppler
PHYSICA KF 10

The reliable process viscometer for your production

as a flow-through, built-in or immersion system for continuous measurement and control of the viscosity in the processing and production

11. of inhomogeneous, abrasive or strain-sensitive substances in steady or turbulent flow:
Oscillation rheometer
PHYSICA RHEOSWING

12. of homogeneous fluids and meltings in steady flow under test conditions corresponding to those in the laboratory:
Rotational viscometer
PHYSICA RHEOFLOW PV 100

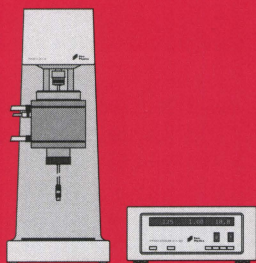
13. of very low to low-viscous fluids with highest measuring value resolution:
Capillary viscometer
PHYSICA VISCOFLOW KV 100

Physica

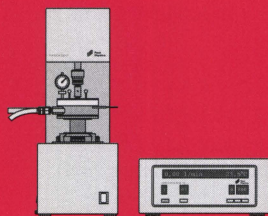
Meßtechnik GmbH
Vor dem Lauch 6
D 70567 Stuttgart
Germany

Tel. (49) 711.72091-0
Fax (49) 711.72091-30
Telex 7255257

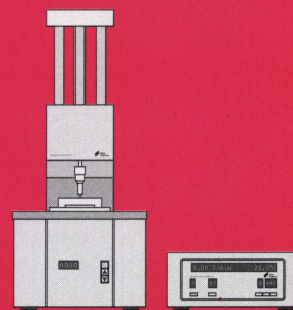




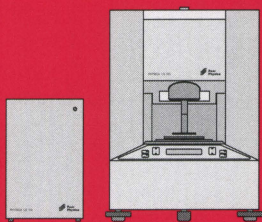
1 **a b c**



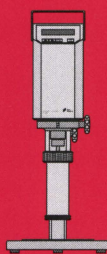
2 **a b c**



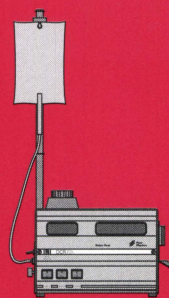
3 **a b c**



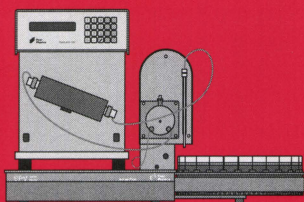
4



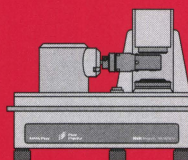
5



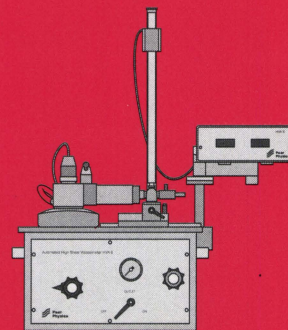
6



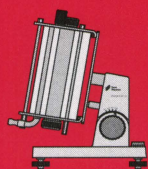
7



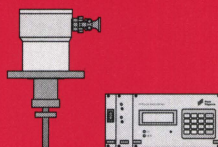
8



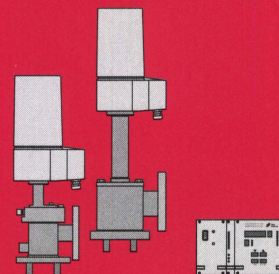
9



10



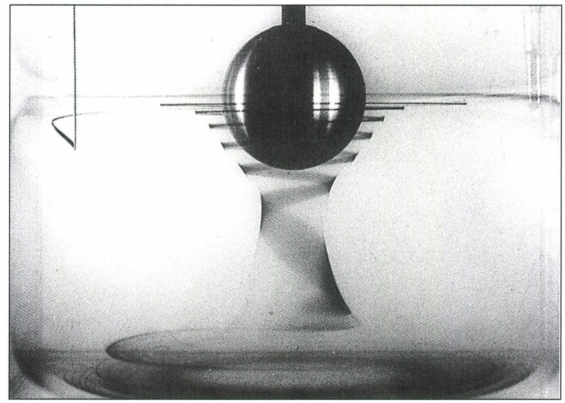
11



12 13

Abb. 2:
Stromlinie bei der Umströmung einer mit 10 rad/min
rotierenden Kugel (Durchmesser: 48 mm) in einer
5%igen wäßrigen Polyacrylamid-Lösung. Nach [8]

Fig. 2.
Streamlines for flow past a sphere with
a diameter of 48 mm rotating at 10 rad/min
in a 5% aqueous polyacrylamide solution (from [8])



als bei der newtonschen Flüssigkeit verlaufen die Projektionen der Stromlinien aber auf geschlossenen Kurven um gemeinsame Mittelpunkte, die erst bei völliger Vernachlässigung des Trägheitseinflusses ins Unendliche rücken (d).

Bei den oben beschriebenen Experimenten mit Polyacrylamid-Lösungen konnte nur der wegen der Kastenbegrenzung nicht von Fall (d) zu unterscheidende Fall (c) realisiert werden, s. Abb. 2. Dagegen wurde ein Strömungsfeld gemäß obigem Fall (b) zuerst von K. Walters und J. G. Savins [12] experimentell realisiert, später aber auch von uns genauer untersucht [13]. Dabei wurde gefunden, daß bis zu einer gewissen Rotationsgeschwindigkeit die Voraussage gemäß der Approximation zweiter Ordnung gut erfüllt ist, sich bei höheren Drehzahlen allerdings in zunehmendem Maße Abweichungen bemerkbar machen, die als Effekte höherer Ordnung interpretiert werden müssen.

Auch bei den schon früher untersuchten stärker viskoelastischen Polyacrylamid-Lösungen waren bei den höchsten Drehzahlen Effekte höherer Ordnung beobachtet worden. Es bildete sich dann unmittelbar um die Kugel herum eine Zentrifugalzone in Form eines Doppeltorus aus, während weiter außen der Einfluß der Normalspannungen unverändert dominierte. Unter günstigen Umständen ließen sich in einem beschränkten Drehzahlbereich sogar gleichzeitig eine innere und eine äußere Zentrifugalzone realisieren, s. Abb. 3.

Die etwas aufwendigere Berechnung der Strömung in einer Kegel-Platte-Geometrie unter ähnlichen Voraussetzungen, wie sie für die Kugel gemacht worden waren, wurde zuerst von P. L. Bhatnagar und S. L. Rathna [14] in Angriff genommen, von D. K. M. Rao [15] vervollständigt und später von uns bezüglich eines dort vorhandener Rechenfehlers korrigiert [16]. Ein grundsätzlicher Unterschied zu den Ergebnissen für die Kugel-Umströmung besteht darin, daß hier für jedes Verhältnis von Viskoelastizität zu Dichte eine Einteilung in zwei Zonen gefunden wird: In einer Umgebung um die Kegelspitze dominieren die viskoelastischen Normalspannungen, weiter außen dagegen die Zentrifugalkräfte.

In der anfangs erwähnten Untersuchung [8] wurde hauptsächlich der Fall analysiert, in der die viskoelastischen Normalspannungen im gesamten Flüssigkeitsvolumen dominierten bzw. eine Zentrifugalzone sich gerade auszubilden begann, vgl. Abb. 4a und b. Zwar wurden auch hier schon mit verdünnten Lösungen von Polyacrylamid Strömungsformen gemäß der theoretischen Voraussage beobachtet, doch wurden diese erst 1966 in Verbindung mit einer von K.-O. Falke ausgeführten Diplomarbeit [16] detaillierter untersucht und zur Abschätzung der viskoelastischen Kenngrößen von Polysiloxanen und deren Lösungen in Dekalin herangezogen.

In the experiments described above with polyacrylamide solutions, only the flow field shown in (c) was realized (see Fig. 2). The flow field shown in (b) was first realized experimentally by K. Walters and J. G. Savins [12], and was later examined in more detail in our work [13]. Up to a certain rotation rate the second order approximation yielded good predictions of the flow behavior. However, as the rotation rate increased, deviations became more pronounced, indicating that higher order effects become significant.

Higher order effects had also been observed at higher rotation rates in previous investigations of polyacrylamide solutions with higher viscoelasticity. A centrifugal zone in the shape of a double torus formed immediately next to the sphere. Outside this centrifugal zone, normal stresses dominate. Under favourable conditions, over a limited range of rotation rate both inner and outer centrifugal zones were obtained, as seen in Fig. 3.

P. L. Bhatnagar and S. L. Rathna [14] were the first to perform the more complicated calculation of cone and plate flow under the same conditions described above for the sphere. Their calculation was generalized by D. K. M. Rao [15], of whom we corrected a calculation error in a later publication [16]. A fundamental difference in the results for this flow field compared to flow around a sphere was that always two flow zones exist, independent of the viscoelasticity to density ratio. Near the cone tip viscoelastic normal stresses dominate, while the outer region is controlled by centrifugal forces.

The investigation mentioned previously [8] mainly analyzed the case in which viscoelastic normal stresses dominated the entire flow region, or the centrifugal zone was just beginning to form (compare Figures 4a and 4b). More diluted polyacrylamide solutions were also shown to exhibit flow fields consistent with theoretical predictions. However, these flow fields were only later examined in more detail in K.-O. Falke's 1966 diploma thesis [16]. His results were used to estimate the viscoelastic parameters of polysiloxane and solutions of polysiloxane in decalin.

3 Secondary flows in straight and curved pipes

For investigating secondary flows in straight pipes it appeared to us that pipes with an elliptical cross-section would be most suitable. For this case the form of the flow field had already been predicted by Green and Rivlin as mentioned above. In addition, W. E. Langlois and R. S. Rivlin [17] had used an

3 Sekundärströmungen in geraden und gekrümmten Rohren

Für die Untersuchung von Sekundärströmungen in geraden Rohren schienen uns Rohre von elliptischem Querschnitt am geeignetsten zu sein, war doch hierfür die Form des Strömungsfeldes nicht nur, wie oben erwähnt, schon von *Green* und *Rivlin* vorausgesagt, sondern auch von *W. E. Langlois* und *R. S. Rivlin* [17] anhand eines verbesserten Modells in vierter Näherung berechnet worden. Unter Einsatz einer 5%-igen wäßrigen Lösung von sehr hochmolekularem Polyacrylamid wurden deutliche Effekte erzielt, die qualitativ der theoretischen Voraussage entsprachen [18]. Eindrucksvolle Versuche dieser Art wurden bald danach von *V. Semjonow* im Deutschen Kunststoff-Institut Darmstadt auch an verschiedenen Polymer-schmelzen durchgeführt und ganz ähnliche Ergebnisse erhalten [19].

In der Zwischenzeit hatte sich das Interesse der theoretischen Analyse von Sekundärströmungen in gekrümmten Kreisrohren zugewandt, bei denen sowohl die Trägheit als auch die erste Normalspannungsdifferenz wirksam werden. So hatte 1960 *J. R. Jones* [20] diese Strömung für eine Reiner-Rivlin-Flüssigkeit in zweiter Näherung berechnet, und diese Analyse wurde 1963 von *R. H. Thomas* und *K. Walters* [21] für das Modell einer viskoelastischen Flüssigkeit wiederholt. Dabei ergab sich, daß – anders als bei der Strömung um rotierende Körper – hier die Zentrifugalkräfte und die Viskoelastizität im gleichen Sinne wirken und die Strömung in der Mitte vom Krümmungsradius weg, an den Rändern aber entsprechend zu diesem hin bewegen. Die Viskoelastizität bewirkt lediglich, daß bei im übrigen ganz ähnlich geformten Stromlinienfeldern der Mittelpunkt der Sekundärströmung ein wenig mehr zum Rand hin verschoben wird.

In analoger Weise wie bei den Experimenten mit dem geraden elliptischen Rohr wurde versucht, solche Effekte an gekrümmten kreiszylindrischen Rohren

improved fourth order model to calculate the flow field for this geometry. Using a 5% aqueous solution of very high molecular weight polyacrylamide, obvious viscoelastic effects were observed that agreed qualitatively with theoretical predictions [18]. Soon thereafter, impressive experiments of this type were conducted by *V. Semjonow* at the Deutschen Kunststoff-Institut Darmstadt [19]. He examined various polymer melts and obtained results similar to ours.

Meanwhile, there was increasing interest in performing theoretical analyses of secondary flows in curved pipes of circular cross-section, for which both inertial forces and the first normal stress difference are effective. In 1960 *J. R. Jones* [20] calculated this flow to second order for a Reiner-Rivlin fluid. This analysis was accomplished for a viscoelastic fluid by *R. H. Thomas* and *K. Walters* [21] in 1963. From these results it was learned that – unlike flow around a rotating sphere – in this case the centrifugal forces and viscoelasticity act in concert. The fluid in the middle of the curved pipe is pushed outwards, while fluid along the walls moves in the opposite direction. The sole effect of viscoelasticity is that the centre of the secondary flow is shifted somewhat towards the outer wall; otherwise the flow lines are nearly identical to the case without viscoelasticity.

In analogous fashion to the experiments with straight pipe of elliptical cross-section, attempts were made to observe such effects using curved circular cylindrical pipes. Wave-shaped and spiraled pipes of various geometries were used. At sufficiently high flow rates one could observe spread out of dye that was injected through the pipe wall opposite the curvature radius. Even under absolutely laminar flow conditions, rather intensive cross mixing occurred, at least over half of the cross-section. Indeed, after a certain flow distance the fluid became colored throughout the pipe [18].

4 Secondary flow in conical and slit dies

For the cases considered previously, the secondary flow component was always oriented perpendicularly to the primary flow. In the case of viscoelastic fluids entering a conical or a slit die, the secondary and primary flows are in the same plane.

The first theoretical predictions of secondary flows in conical dies was presented in 1959 by *W. E. Langlois* and *R. S. Rivlin* [22]. They conducted a perturbation calculation of second order using the Reiner-Rivlin fluid model and assumed that the outlet could be idealized as a point sink. Somewhat later the same type of analysis was done by *P. N. Kaloni* [23] for a viscoelastic Oldroyd fluid. The same general results were obtained in each of these studies, i. e., the secondary flow exists in the form of vortices adjacent to the cone

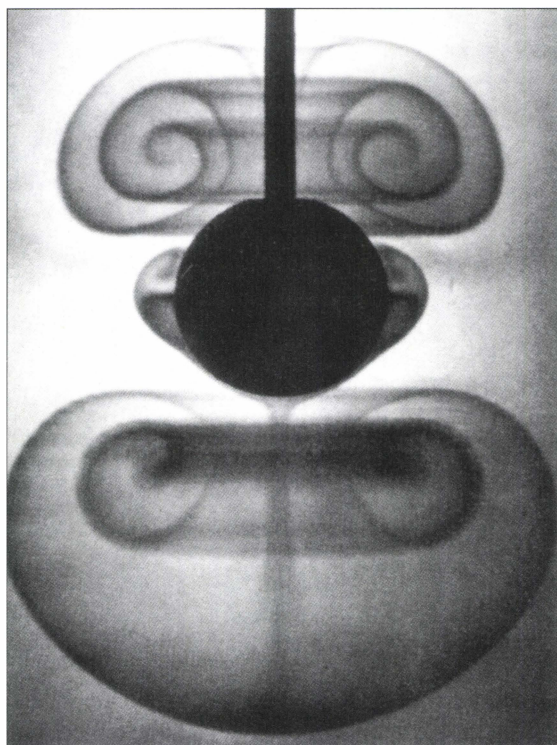
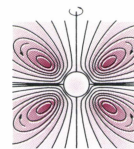


Abb. 3:
Strömungsfeld mit innerer und äußerer Zentrifugalzone bei der Umströmung einer mit 150 rad/min rotierenden Kugel (Durchmesser: 20 mm) in einer 1,3%-igen Lösung von Polyisobuten in Dekalin. Nach [13]

Fig. 3:
Flow field with inner and outer centrifugal zone for flow past a sphere with a diameter of 20 mm rotating at 150 rad/min in a 1.3% solution of polyisobutylene in decalin [from [13]]

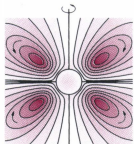
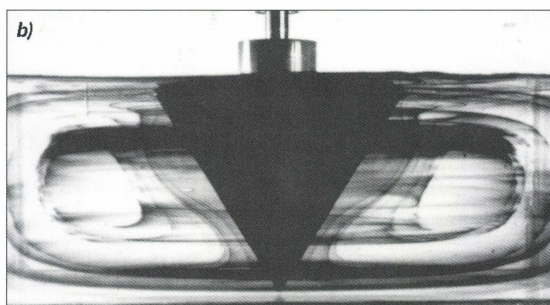
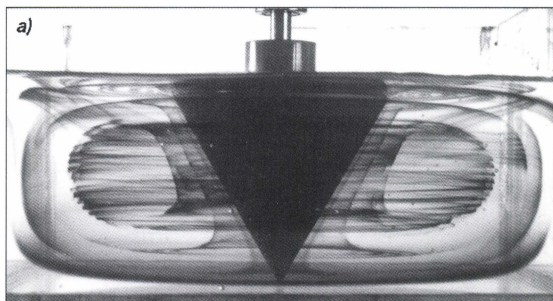


Abb. 4:
Strömungsfeld bei einem (a) mit 250 rad/min und
(b) mit 400 rad/min rotierenden Kegel in einer
5%-igen wäßrigen Polyacrylamid-Lösung. Nach [8]

Fig. 4.
Flow field around a rotating cone in a
5% aqueous polyacrylamide solution. Rotation rate:
(a) 250 rad/min; (b) 400 rad/min; (from [8])



nachzuweisen, wobei sowohl wellenförmig gebogene als auch gewendelte Rohre mit verschiedener Steigung eingesetzt wurden. Bei hinreichenden Durchsätzen ließ sich in allen Fällen eine Verbreiterung der injizierten Farbfäden an der dem Krümmungsradius entgegengesetzten Seite der Rohrwand beobachten; ebenfalls fand bei absolut laminaren Strömungsbedingungen eine recht intensive Quervermischung zumindest über den halben Querschnitt statt, so daß nach einer gewissen Laufstrecke keine ungefärbte Flüssigkeit mehr zu beobachten war [18].

4 Sekundärströmungen in konischen und Keilspaltdüsen

Stand in den bisher behandelten Fällen die Sekundärströmungskomponente stets senkrecht auf der Primärströmung, so sind bei der Einströmung viskoelastischer Flüssigkeiten in konische bzw. Keilspaltdüsen beide in der gleichen Ebene angeordnet.

Die älteste theoretische Voraussage einer Sekundärströmung in der konischen Düse wurde schon 1959 von *W. E. Langlois* und *R. S. Rivlin* [22] vorgestellt, und zwar war diese mit Hilfe einer Störungsrechnung zweiter Näherung unter Verwendung des sog. Reiner-Rivlin-Modells erhalten worden, wobei die Ausflußöffnung durch eine punktförmige Senke idealisiert wurde. Einige Zeit später wiederholte *P. N. Kaloni* [23] diese Untersuchung für eine viskoelastische Oldroyd-Flüssigkeit und erhielt dabei im wesentlichen das gleiche Ergebnis, nämlich eine Sekundärströmung in Form eines dem Kegelmantel anliegenden Wirbelrings, durch den der effektive Auslaufquerschnitt eingeengt wird. Zwar wurde die Vertrauenswürdigkeit dieses Ergebnisses aus verschiedenen Gründen in Frage gestellt, insbesondere deshalb, weil zumindest in einem gewissen Bereich um die Senke herum die Sekundärströmung die Primärströmung überkompensiert und daher nicht mehr den Charakter einer „kleinen Störung“ hat. Dieser Einwand kann aber entschärft werden, wenn man – wie es etwa *P. Schümmer* [24] getan hat – das Approximationsverfahren noch eine Ordnung weiterführt und dabei zeigt, daß hierdurch das Ergebnis nicht wesentlich beeinflusst wird.

envelope, which effectively narrow the cross-sectional area at the die outlet. The validity of these results was questioned at the time, because at specific regions around the sink the secondary flow overcompensates for the primary flow, causing the “small disturbance” character to be lost. This criticism can be countered however, by carrying out the approximation to third order, as was done by *P. Schümmer* [24]. His results verified the validity of the second order calculations.

Experimentally, the flows described above had been observed in the late 1950s as a result of the search for the origins of the “melt-fracture” effect. *J. P. Tordella* [25] was apparently the first to recognize that such irregularities in extruded melt strands are related to fluctuations in the area above the die; such fluctuations are induced by the secondary flows described above. It was not until years later that *P. Schümmer* and *U. Werner* [26] showed that the phenomenon was not specific to polymer melts. They found that the ring-shaped secondary flows (corresponding to the theoretical predictions discussed above), as well as the resulting instabilities could also be seen in dilute polymer solutions.

These findings stimulated our interest in examining the flow phenomena. The results of our first experiments using dilute solutions in flat bottomed hole-type dies produced astonishment: the extension of the circulation rings in this type of flow was extraordinary [27]. Such flows have since been comprehensively examined, both theoretically (in particular with numerical methods) and experimentally; see, for example, the collection of impressive flow photographs in the book by *Boger* and *Walters* [2].

One might assume that flow of a viscoelastic fluid into a slit die would be simpler theoretically than the previously discussed case of flow into a conical die, because the former case represents a planar problem. However, this is a false assumption because the calculation for the slit die must be carried out to third order, whereas a second order calculation yields correct results for the conical die. According to a theory developed by *R. I. Tanner* [28], in planar flows a second order perturbation calculation does not produce flow effects, but instead predicts only that the pressure field is modified. Nevertheless, this problem was solved earlier in the previously cited work by *Langlois* and *Rivlin* [22], using the same limiting conditions.

Experimentell waren derartige Strömungen schon in den späten fünfziger Jahren beobachtet worden und zwar bei der Suche nach dem Ursprung des sogenannten „Schmelzenbruch-Phänomens“. Als erster erkannte wohl J. P. Tordella [25], daß die Ungleichmäßigkeiten im extrudierten Schmelzenstrang mit Schwankungen im Raum oberhalb der Düse in Verbindung stehen, die sich aus solchen Sekundärströmungen heraus entwickeln. Aber erst Jahre später – zuerst wohl von P. Schümmer und U. Werner [26] – wurde gezeigt, daß es sich dabei nicht um ein für Schmelzen spezifisches Phänomen handelt, sondern daß ringförmige Sekundärströmungen der theoretisch vorausgesagten Art wie auch deren Instabilwerden bereits in verdünnten Polymerlösungen beobachtet werden können.

Dies weckte unser eigenes Interesse an der Untersuchung solcher Düsenströmungsphänomene, und wir untersuchten solche zuerst in Flachboden-Lochdüsen, wobei die schon mit verdünnten Lösungen erhaltene außergewöhnliche Ausdehnung der Zirkulationsringe Erstaunen hervorrief [27]. Seitdem sind solche Strömungen sowohl theoretisch, insbesondere mit numerischen Methoden, als auch experimentell eingehend untersucht worden, vgl. diesbezüglich insbesondere die Sammlung eindrucksvoller Strömungsbilder bei Boger und Walters [2].

Man könnte meinen, daß die Einströmung einer viskoelastischen Flüssigkeit in eine Keilspaltdüse theoretisch einfacher zu behandeln wäre als die vorstehend behandelte Einströmung in eine konische Düse, da hierbei ja ein ebenes Problem vorliegt. Dies ist aber ein Trugschluß, denn man muß nun die Approximation bis zur dritten Ordnung durchführen, während oben schon die zweite das gewünschte Ergebnis brachte. Gemäß einem Theorem von R. I. Tanner [28] beschreibt nämlich für eine ebene Strömung die zweite Ordnung der Störungsrechnung keinerlei Strömungseffekte, sondern lediglich eine Modifikation des Druckfeldes. Desungeachtet wurde dieses Problem in der schon zitierten Untersuchung von Langlois und Rivlin [22] unter den gleichen einschränkenden Bedingungen gelöst.

Anders als bei der Einströmung in eine konische Düse, wo unter realistischen Bedingungen immer ein der Wand anliegender Zirkulationsring vorausgesagt wird, werden nun je nach der Wahl der beiden in der Approximation dritter Ordnung auftretenden Stoffkonstanten zwei qualitativ verschiedene Strömungstypen erhalten. Entweder erfolgt gemäß Abb. 5a die Einströmung nur in den wandnahen Bereichen, wohingegen in einem mittleren Bereich zwei symmetrisch angeordnete Zirkulationswirbel auftreten, oder aber die Situation ist entsprechend Abb. 5b umgekehrt: Die Einströmung erfolgt – in einer gewissen Analogie zu den Verhält-

For flow into a conical die, circulation rings along the wall are predicted under all realistic conditions. In contrast, in the slit die two qualitatively different types of flow are obtained, depending on the values assigned to the two material constants in the third order approximation equation. The first possibility is the flow field shown in Fig. 5a, in which the entrance flow comes only from the regions along the wall, and two symmetric vortex flows exist in the centre region. The second possibility, shown in Fig. 5b, is exactly the opposite: the entrance flow comes only from the centre region, while the two circulation vortices exist next to the wall. This latter case is somewhat analogous to the conical die flow.

Flow fields such as shown in Fig. 5b were first realized in our laboratory [27]. They were observed in various slit dies, including those with a flat base and those with different types of entrance openings. Of particular interest was the size of the circulation zones (and the conditions under which they became unstable) as a function of the flow rate and the geometry of the die. While flows of this type were commonly observed and systematically examined afterwards (see, for example Boger and Walters [2]) the flow shown in Fig. 5a was only observed on a single occasion in 1974 by K. Strauss and R. Kinast [28].

5 Secondary flow phenomena in oscillatory flows

To this point we have discussed secondary flows that occur in steady situations. In this section we will briefly mention some phenomena that occur in oscillatory experiments. Such processes were examined theoretically between 1960 and 1965, for instance by A. C. Pipkin [30], who studied oscillatory flow in a straight pipe with an elliptical cross-section. He found that secondary flows similar to those in the steady flow case were also predicted for oscillatory flow. In the latter situation, the secondary flows are a second order effect from the product of amplitude

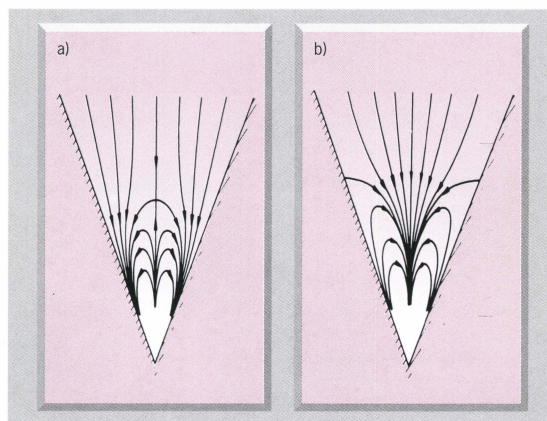
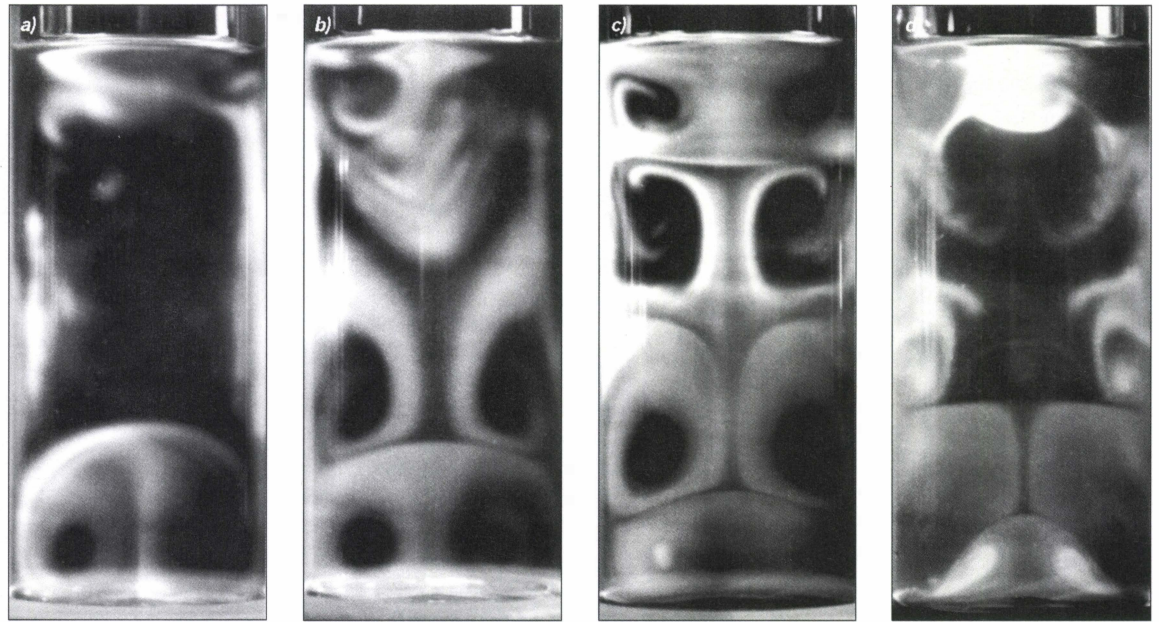


Abb. 5: Einströmung in einer Keilspaltdüse gemäß der Approximation dritter Ordnung mit (a) zentralen und (b) wandnahen Zirkulationszonen. Nach [22]

Fig. 5. Calculations based on the third order approximation for entrance flow in a slit die. Location of circulation zones: (a) central; (b) near the wall; (from [22])

Abb. 6:
Sekundärströmung einer
1,67%-igen wäßrigen Poly-
acrylamid-Lösung in einem
mit einer Amplitude von ca. 40°
oszillierenden Zylinder. Die
Frequenz beträgt (a) 75,
(b) 100, (c) 175, (d) 250 min⁻¹.
Nach [18]

Fig. 6.
Secondary flow of a
1.67% aqueous polyacrylamide
solution in a cylinder oscillating
with an amplitude of about 40°.
Frequency in min⁻¹:
(a) 75; (b) 100; (c) 175; (d) 250;
(from [18])



nissen bei der konischen Düse – nur in einem mittleren Bereich, während nun zwei Zirkulationswirbel den Wänden anliegen.

Strömungen des zweiten Typs wurden erstmalig wohl von uns realisiert [27], und zwar sowohl an einer Schlitzdüse mit flachem Boden als auch an solchen mit unterschiedlich spitz zulaufenden Einstromöffnungen. Von besonderem Interesse waren dabei die Größe der Zirkulationszonen in Abhängigkeit von Durchsatz und Gestalt der Düse als auch die Bedingungen ihres Instabilwerdens. Während Strömungen dieses Typs in der Folgezeit immer wieder beobachtet und systematisch untersucht worden sind – vgl. *Boger und Walters* [2] – wurden solche vom ersten Typ nur in einem einzigen Fall 1974 von *K. Strauss* und *R. Kinast* [29] beobachtet.

5 Sekundärströmungsphänomene in oszillatorischen Strömungen

Während bei den bisher behandelten Sekundärströmungen stets eine stationäre Erregung zugrunde lag, sollen abschließend noch einige Andeutungen über Phänomene erfolgen, die durch eine periodische Bewegung verursacht werden. Auch bezüglich solcher Vorgänge wurden zwischen 1960 und 1965 schon theoretische Untersuchungen angestellt, so etwa von *A. C. Pipkin* [30] für die oszillierende Strömung in einem geraden Rohr mit elliptischem Querschnitt. Dabei wurde gefunden, daß auch hier eine Sekundärströmung ähnlich der bei der stationären Strömung vorausgesagten auftritt, allerdings nun schon als ein Effekt zweiter Ordnung im Produkt aus Amplitude und Frequenz. Derartige Strömungen dürften aber schwer zu realisieren sein und sind – soweit bekannt – bisher nicht untersucht worden.

Günstigere Bedingungen liegen bei der Untersuchung von Sekundärströmungen um oszillierende Rotationskörper vor. Hier hatte *K. Frater* [31] den Fall der oszillierenden Kugel theoretisch analysiert und dabei ein interessantes Wechselspiel zwischen den Einflüssen von Zentrifugal- und Normalspannungskräften auf die stationäre Sekundärströmungskomponente in Abhängigkeit von der Oszillationsfrequenz vorausgesagt.

and frequency. Such flows would be very difficult to realize and, to our knowledge, have never been experimentally investigated.

More easily attainable conditions exist for secondary flows around an oscillating rotational body. *K. Frater's* [31] theoretical analysis of an oscillating sphere yielded interesting predictions about the interplay of centrifugal and normal stress influences on the secondary flow component as a function of oscillation frequency.

Following our experiments with steady rotating spheres, we also conducted oscillatory experiments [18]. We found that near the equatorial plane the periodic component of the azimuthal motion decreased very rapidly as a function of distance from the sphere. At these outer regions, only the inward directed steady secondary flow component was influential. In consequence of a slightly unharmonic excitation this steady flow also contained an azimuthal component that increased with increasing frequency. Because the average rate of the sphere in oscillation is zero, the steady azimuthal flow is a secondary effect that, at a minimum, is third order, arising from the product of the oscillation amplitude and frequency.

The phenomena described here are closely related to those discussed earlier. One can in fact consider secondary flows under steady conditions to be the limiting case of oscillatory flow as the frequency tends to zero. There are also unsteady flows, for which such a limiting transition is completely absent. Such cases have no steady analogue; an example system is a fluid with a free surface contained in an upright cylinder that oscillates around its axis [18]. Such an experiment was suggested by *K. Weissenberg* [18], who observed interesting effects, but did not further investigate these. As expected, in a Newtonian fluid undergoing such oscillatory motion extended centrifugal vortices form. On the other hand, a fluid with sufficient viscoelasticity will, as a result of normal forces, develop a compact vortex that rotates in the opposite direction. The vortex is, however, short lived: as shown in *Fig. 6*, with increasing frequency additional vortices form, also originating at the fluid surface, until finally the

Wir führten daher im Anschluß an unsere Experimente mit stationär rotierenden Körpern auch solche mit oszillierender Erregung durch [18]. Bei der Kugel zeigte sich dabei, daß in der Nähe der Äquatorebene die periodische Komponente der Azimutalbewegung sehr rasch mit der Entfernung von der Kugel abklingt und weiter außen nur noch die nach innen gerichtete stationäre Sekundärströmungskomponente von Einfluß ist. Infolge der durch ein System von Kurbel- und Pleuelstange erzeugten nicht streng symmetrischen Oszillationsbewegung wies diese stationäre Strömung aber ebenfalls eine azimutale Komponente auf, die noch dazu mit wachsender Frequenz immer ausgeprägter in Erscheinung trat. Da die Geschwindigkeit der Kugel zwar selbst den Mittelwert Null besitzt, nicht aber mehr eine ungerade Potenz derselben, muß die beobachtete stationäre Azimutalbewegung als ein Sekundärströmungseffekt von in niedrigster Näherung dritter Ordnung in dem Produkt aus Oszillationsamplitude und -frequenz gedeutet werden.

Die hier genannten Phänomene hängen mit den früher betrachteten eng zusammen, insofern man die Sekundärströmungen unter stationären Bedingungen als Grenzfälle derer mit oscillatorischer Erregung bei gegen Null gehender Frequenz auffassen kann. Es gibt aber auch instationäre Strömungen, die bei einem solchen Grenzübergang vollständig verschwinden, so daß es hierfür kein stationäres Analogon gibt. Dies ist z. B. der Fall in einer Flüssigkeit, die bei Vorhandensein einer freien Oberfläche in einem aufrecht stehenden Zylinder um dessen Achse oszilliert. Die mit einer solchen Anordnung durchgeführten Experimente [18] waren durch einen Bericht von K. Weissenberg angeregt worden, demzufolge er unter ähnlichen Bedingungen merkwürdige Effekte beobachtet, dies aber nicht weiter verfolgt habe. Wie nicht anders zu erwarten, bildet sich bei einer solchen schwingenden Bewegung in einer newtonschen Flüssigkeit über dem Zylinderboden ein ausgedehnter Zentrifugalwirbel aus. Bei einer hinreichend viskoelastischen Flüssigkeit entsteht dagegen – durch die Normalspannungen hervorgerufen – über dem Boden ein gedrungener Wirbel mit entgegengesetztem Drehsinn. Es bleibt aber nicht dabei, sondern – wie Abb. 6 zeigt – bilden sich mit wachsender Frequenz darüber zuerst ein weiterer und schließlich – auch von der freien Oberfläche her – eine ganze Folge solcher Wirbel aus, die den Flüssigkeitsraum vollständig ausfüllen. Am Boden macht sich dann allerdings bei höheren Frequenzen wiederum der Einfluß der Zentrifugalkräfte in zunehmendem Maße bemerkbar, wodurch der Bodenring nach innen zu abgedrängt wird. Solche Phänomene sind unseres Wissens bisher aber noch nicht theoretisch untersucht worden.



entire fluid is filled with such vortices. At the base, however, the influence of centrifugal forces is increasingly discernible, and the bottom ring is pulled towards the centre. To our knowledge, such phenomena have not yet been analyzed theoretically.



- [1] Giesekus, H.: „Phänomenologische Rheologie“, Springer Verlag, Berlin (1994).
- [2] Boger, D. V., Walters, K.: „Rheological Phenomena in Focus“, Elsevier, Amsterdam (1993).
- [3] Reiner, M., Amer. J. Math. 68 (1946), p. 672.
- [4] Weissenberg, K., Proc. Intern. Congr. Rheology Scheveningen 1948, North-Holland, Amsterdam, 1, (1949) p. 29.
- [5] Ericksen, J. L., Quart. Appl. Math. 14 (1956), p. 318.
- [6] Green, A. E., Rivlin, R. S., Quart. Appl. Math. 14, (1956), p. 299.
- [7] Oldroyd, J. G., Proc. Roy. Soc. (London) A 245 (1958), p. 278.
- [8] Giesekus, H., Proc. 4th Intern. Congr. Rheology Providence (R. I.) 1963, Vol. 1, (1965), p. 249.
- [9] Langlois, W. E., Quart. Appl. Math. 21 (1963), p. 61.
- [10] Thomas, R. H., Walters, K., Quart. J. Mech. Appl. Math. 17 (1964), p. 39.
- [11] Bhatnagar, R. K., Proc. Indian Acad. Sci. A 60 (1964), p. 99.
- [12] Walters, K., Savins J. G., Trans. Soc. Rheology 9 (1965), p. 407.
- [13] Giesekus, H., Rheol. Acta 9 (1970), p. 30.
- [14] Bhatnagar, P. L., Rathna, S. L., Quart. J. Mech. Appl. Math. 16 (1963), p. 329.
- [15] Rao, D. K. M., Proc. Indian Acad. Sci. A 56 (1962), p. 198.
- [16] Giesekus, H., Rheol. Acta 6 (1967), p. 339.
- [17] Langlois, W. E., Rivlin, R. S., Rend. Matematica die Roma 22 (1963), p. 169.
- [18] Giesekus H., Rheol. Acta 4 (1965), p. 85.
- [19] Semjonow, V., Rheol. Acta 6 (1967), p. 171.
- [20] Jones, J. R., Quart. J. Appl. Math. 13 (1960), p. 428.
- [21] Thomas, R. A., Walters, K., J. Fluid Mech. 16 (1963), p. 228.
- [22] Langlois, W. E., Rivlin R. S., Techn. Report No. DA-4725/3, (1959), Div. Appl. Mathem. Brown Univ. (Providence, R. I.).
- [23] Kaloni, P. N., J. Phys. Soc. Japan 20 (1965), p. 132, 610.
- [24] Schümmer, P., Rheol. Acta 6 (1967), p. 192.
- [25] Tordella, J. P., Trans. Soc. Rheology 1 (1957), p. 203.
- [26] Schümmer, P., Werner, U., Chem. Ing. Techn., 38 (1966), p. 373.
- [27] Giesekus, H., Rheol. Acta 7 (1968), p. 127.
- [28] Tanner, R. I., Phys. Fluids 9 (1966), p. 1246.
- [29] Strauß, K., Kinast, R., (1974) J. Colloid & Polym. Sci. 252 (1974), p. 753.
- [30] Pipkin, A. C., Arch. Rational Mech. Anal. 15 (1964), p. 1.
- [31] Frater, K., J. Fluid Mech. 20 (1964), p. 369.

