



Mathematik 1 für Nichtmathematiker

Grundbegriffe – Vektorrechnung –
Wahrscheinlichkeitsrechnung – Kombinatorik
Lineare Algebra und Matrizenrechnung

von
Prof. Dr. Manfred Precht
Dipl.-Math. Karl Voit
Dr. Roland Kraft

7., verbesserte Auflage

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

© 2006 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Stephanie Schumacher-Gebler
Herstellung: Anna Grosser
Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-27407-4
ISBN 978-3-486-27407-3

Inhalt

Vorwort	1
1 Grundbegriffe der Mathematik	3
1.1 Mengenlehre	3
1.1.1 Verknüpfung von Mengen	5
1.1.2 Mengenalgebra	7
1.1.3 Kartesische Produktmengen	8
1.1.4 Relationen und Funktionen	9
1.2 Verknüpfung von Aussagen	13
1.3 Beweisverfahren in der Mathematik	16
1.3.1 Der direkte Beweis	16
1.3.2 Der indirekte Beweis	16
1.3.3 Die vollständige Induktion	17
1.4 Summen- und Produktzeichen	20
1.4.1 Das Summenzeichen	20
1.4.2 Das Produktzeichen	25
1.5 Binomialkoeffizienten	28
1.6 Aufbau des reellen Zahlensystems	31
1.7 Ungleichungen und Absolutbetrag	33
1.7.1 Ungleichungen	33
1.7.2 Intervalle	35
1.7.3 Vorzeichen und Absolutbetrag	36
1.8 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	42
1.8.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	42
1.8.2 Potenzen mit rationalen Exponenten, Wurzeln	44
1.8.3 Potenzen mit reellen Exponenten	46
1.8.4 Logarithmen, Logarithmensysteme	47
1.8.5 Umrechnung von Potenzen und Logarithmen	49
1.9 Die komplexen Zahlen	55
1.9.1 Definition und Rechenregeln der komplexen Zahlen	55

1.9.2	Geometrische Veranschaulichung komplexer Zahlen . . .	56
1.10	Darstellung von Zahlen in Rechnern	60
1.10.1	Festpunktdarstellung	60
1.10.2	Gleitpunktdarstellung	61
1.11	Rechnen mit Näherungswerten	65
1.11.1	Absoluter und relativer Fehler	65
1.11.2	Fehlerfortpflanzung	68
2	Vektorrechnung	75
2.1	Vektoren und Koordinatensysteme	75
2.2	Vektoroperationen	78
2.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	78
2.2.2	Das Skalarprodukt	81
2.2.3	Das Vektorprodukt	83
2.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren	86
2.4	Analytische Geometrie im \mathbb{R}^3	88
2.4.1	Geraden	88
2.4.2	Ebenen	89
3	Lineare Algebra und Matrizenrechnung	95
3.1	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	95
3.1.1	Vektoren im \mathbb{R}^n , Vektoroperationen	95
3.1.2	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	98
3.2	Matrizenrechnung	102
3.2.1	Der Begriff der Matrix	102
3.2.2	Das Rechnen mit Matrizen	106
3.2.3	Transponieren von Matrizen	114
3.2.4	Die Inverse einer quadratischen Matrix	116
3.2.5	Der Rang einer Matrix	117
3.3	Lineare Gleichungssysteme	122
3.4	Determinanten	126
3.5	Lösung linearer $n \times n$ -Gleichungssysteme	131

3.5.1	Der Gaußsche Algorithmus	131
3.5.2	Das Gauß-Verfahren als Dreieckszerlegung	135
3.5.3	Berechnung der Inversen nach Gauß-Jordan	142
3.5.4	Numerische Probleme	145
3.6	Lösung allgemeiner linearer Gleichungssysteme	153
4	Kombinatorik	157
4.1	Permutationen	158
4.1.1	Permutationen ohne Wiederholung	158
4.1.2	Permutationen mit Wiederholungen	159
4.2	Variationen	161
4.2.1	Variationen ohne Wiederholung	161
4.2.2	Variationen mit Wiederholungen	162
4.3	Kombinationen	164
4.3.1	Kombinationen ohne Wiederholung	164
4.3.2	Kombinationen mit Wiederholungen	165
4.4	Zusammenfassung	166
5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	171
5.1	Zufallseignisse	171
5.2	Verknüpfung von Zufallseignissen	174
5.3	Der Borelsche Mengenkörper	176
5.4	Unvereinbare Ereignisse	177
5.5	Sicheres und unmögliches Ereignis	177
5.6	Die mathematische Wahrscheinlichkeit	178
5.7	Die klassische Wahrscheinlichkeit	180
5.8	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	184
5.9	Unabhängige Ereignisse	187
5.10	Das Bayessche Theorem	192
5.11	Interpretation von Wahrscheinlichkeiten	194
5.12	Das Gesetz der großen Zahlen	196
5.13	Zufallsvariablen	198

5.14 Die Verteilungsfunktion	201
5.15 Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	205
5.15.1 Diskrete Zufallsvariablen	205
5.15.2 Stetige Zufallsvariablen	208
5.15.3 Fraktilen und Grenzen einer Verteilung	212
5.16 Maßzahlen einer Verteilung	216
5.16.1 Der Mittelwert oder Erwartungswert einer Verteilung .	216
5.16.2 Die Varianz einer Verteilung	218
5.16.3 Momente einer Verteilung	219
5.16.4 Schiefe und Kurtosis	221
Literatur	227
Sachregister	228

Vorwort zur 1. Auflage

In vielen Einzelwissenschaften wie z.B. Biologie, Medizin, Soziologie, Wirtschaftswissenschaften usw. tritt mit fortschreitender Entwicklung eine immer deutlicher werdende Mathematisierung zutage. Um die neueren Methoden in seinem Fachgebiet zu beherrschen, muß sich der betreffende Wissenschaftler in zunehmendem Maße mit mathematischen und statistischen Methoden beschäftigen. Die Mathematik ist daher zu einem wichtigen Hilfsmittel dieser Disziplinen geworden, während sie diese Rolle früher fast ausschließlich für die Physik und die Ingenieurwissenschaften gespielt hat. Diese Tatsache spiegelt sich u.a. darin wider, daß Mathematik für agrarwissenschaftliche und medizinische Fachbereiche scheinpflichtig oder Prüfungsfach geworden ist.

Nun ist die Mathematikausbildung für Nichtmathematiker (gemeint sind in erster Linie Vertreter der eingangs genannten Disziplinen) in mancher Hinsicht problematisch. Viele Studienanfänger sehen nicht richtig ein, warum sie Mathematik lernen sollen. Andererseits sind einer Behandlung der Mathematik z.B. zu Beginn eines Agrarstudiums sowohl vom zeitlichen Umfang als auch von der "Einbettung" in andere, mehr anwendungsbezogene Fächer gewisse Grenzen gesetzt. Notwendige Voraussetzungen für eine Motivation der Studierenden ist unseres Erachtens die Betonung des Anwendungsaspektes und damit einhergehend eine nicht zu starke Abstraktion des Stoffes, natürlich nicht auf Kosten der mathematischen Exaktheit. Anders ausgedrückt: Das Grundsätzliche sollte nur soviel Platz haben wie unbedingt nötig, das Beispielhafte und die Anwendungsbezogenheit soviel Platz wie möglich.

Die vorliegende "Mathematik für Nichtmathematiker" entstand aus Vorlesungen und Übungen, welche die Verfasser an der TU München-Weihenstephan für Studierende der Agrarwissenschaften, des Erwerbsgartenbaues, des Brauwesens, der Lebensmitteltechnologie sowie der Ökotrophologie gehalten haben bzw. halten. Der Inhalt entspricht in etwa einer zweisemestrigen Vorlesung.

Wir haben uns bemüht, den Stoff so darzustellen, daß er auch bei geringeren Mathematik-Vorkenntnissen aus der Schule bewältigt werden kann. Natürlich verlangen die einzelnen Fachrichtungen einen unterschiedlich tiefen Einstieg in die Mathematik. Daher ist der Umfang so gewählt, daß möglichst viele Anforderungen abgedeckt werden. Je nach Bedarf kann sich der Leser seine, für ihn wichtigen Kapitel herausuchen.

Dieses Skriptum soll den Studenten von einer eigenen Vorlesungsniederschrift weitgehend befreien und ihm somit Gelegenheit geben, dem Vortrag des Dozenten mit kritischer Aufmerksamkeit zu folgen.

Weihenstephan, im Oktober 1978

Manfred Precht
Karl Voit

Vorwort zur 4. Auflage

Die 4. Auflage unterscheidet sich inhaltlich von den vorhergehenden durch die Aufnahme weiterer Beispiele und Übungsaufgaben. Dabei wurde besonderer Wert auf Anwendungen der Mathematik in den biologischen Disziplinen, in einigen Fällen auch in der Physik und der Chemie gelegt. Das Kapitel Kombinatorik wurde unmittelbar vor die Wahrscheinlichkeitsrechnung gestellt, da bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Bereich der Glücksspiele bzw. ähnlicher Versuchsanordnungen die Zahl von Zusammenstellungen verschiedener Objekte bestimmt werden muß. Die statistische Fehlerbehandlung wurde herausgenommen und wird an anderer Stelle erscheinen.

Darüberhinaus wurde die vorliegende Auflage in druckreifer Form neu erstellt. Infolgedessen sind Fehler trotz sorgfältiger Korrekturlesung nicht völlig ausgeschlossen. Wir sind für jeden Hinweis sehr dankbar.

Die Verfasser danken Frau Petra Volke für das Tippen von Manuskriptteilen und Herrn Markus Mühlbauer für die Programmierung zur automatischen Erstellung des Sachregisters. Außerdem gilt unser Dank Herrn M. John vom Oldenbourg Verlag für die gute Zusammenarbeit, insbesondere für die Möglichkeit, die 4. Auflage in attraktiver Satzgestaltung mit dem wissenschaftlichen Textformatierungsprogramm \LaTeX herauszubringen.

Freising-Weihenstephan, im März 1990

Manfred Precht
Karl Voit
Roland Kraft

Vorwort zur 6. Auflage

Die 6. Auflage ist inhaltlich identisch mit der 5. Auflage. Bekannt gewordene Fehler wurden korrigiert.

Freising-Weihenstephan, im November 1999

Manfred Precht
Karl Voit
Roland Kraft