

Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung mit einem Impedanztomographen

Reconstruction of Conductivity Distributions by Means of an Impedance Tomograph

C. Mrakawa, K. Schilcher und G. Schuhfried^a

Institut für Physik, Johannes-Gutenberg-Universität, Staudinger Weg 7, D-55099 Mainz

^a Dr. G. Schuhfried GmbH, Hyrtlstr. 45, A-2340 Mödling

Sonderdruckanforderungen an Prof. K. Sch.; E-mail: karl.schilcher@uni-mainz.de

Z. Naturforsch. **55 a**, 877–882 (2000); received August 8, 2000

We have built an electrical impedance tomograph which makes it possible to reconstruct impedance distributions in the interior of a cylinder by means of measurements of currents and potentials on its boundary. The reconstruction algorithm is based on Newton's algorithm for the solution of non-linear integral equations, where the electric fields are calculated by the methods of finite elements and finite integrals. The results can be represented graphically on a PC. The resolution is fine enough to envisage applications in medical diagnostics.

Key words: Tomography; Electrical Impedance Tomography; EIT; Impedance Imaging.

1. Einleitung

Die Elektrische Impedanztomografie (EIT) erweist sich als ein vielversprechendes bildgebendes Verfahren für die medizinische Diagnostik [1] und im Bereich industrieller Anwendungen [2]. In diesem Verfahren wird die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit im Inneren eines Objektes durch Strom- und Spannungsmessungen an der Oberfläche bestimmt. In der Vergangenheit wurden zur Bildrekonstruktion fast ausschließlich zweidimensionale Algorithmen verwendet. Der Grund dafür ist, dass bei gleicher Auflösung die Komplexität der numerischen Rechnung im dreidimensionalen Fall um Größenordnungen zunimmt. Im hier betrachteten Fall eines dreidimensionalen zylindrischen Tomographen lässt sich eine annähernd zweidimensionale Stromführung durch geeignete Gardelektroden erreichen.

Das Hauptproblem für die praktische Brauchbarkeit der EIT stellt die Tatsache dar, dass selbst stark unterschiedliche Leitfähigkeitsverteilungen im Inneren eines Körpers zu sehr ähnlichen Spannungsverteilungen an der Oberfläche führen. Daher müssen hohe Anforderungen an die Modellierungsgenauigkeit bei der numerischen Berechnung der Felder gestellt werden. Es wurde versucht, dies durch ein möglichst feines zweidimensionales Diskretisierungsnetz zu erreichen. Diese feine Diskretisierung ist auch notwen-

dig, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass das konstante Potential auf der metallischen Elektrodenoberfläche zu einer nichtkonstanten, am Rand der Elektrode singulären Stromdichte führt [3].

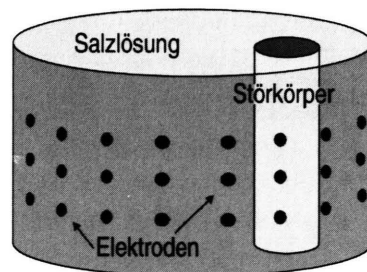


Abb. 1. Schematische Versuchsanordnung.

2. Experimenteller Aufbau

Abbildung 1 zeigt schematisch die Versuchsanordnung, die zur Meßdatenerfassung verwendet wurde. Sie besteht aus einem zylindrischen Kunststoffgefäß mit einem Durchmesser von 21.5 cm, welches mit einem leitfähigen Elektroden-Gel oder einer Kochsalzlösung gefüllt werden kann. Am Rand des Zylinders sind $N_{\text{Elec}} = 32$ Elektrodenysteme zur Potentialwertmessung und Stromeinspeisung gleichmäßig verteilt angebracht. Ein Elektrodenystem besteht aus

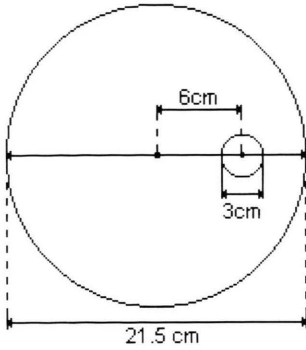


Abb. 2. Abmessungen der Versuchsanordnung.

3 übereinanderliegenden Goldelektroden mit einem Durchmesser von 0,6 cm, die vertikal an den Seitenwänden der Meßzelle eingelassen und mit Epoxiharz befestigt sind. Die beiden äußeren Elektroden dienen dabei zur Stromeinspeisung, die mittlere Elektrode als Meßelektrode für die Potentialwerte. Die von uns gewählte Auftrennung in Meß- und Einspeiseelektroden erlaubt eine von Übergangswiderständen unverfälschte Potentialmessung. Außerdem wird eine gewisse zweidimensionale Ausrichtung der Stromfäden erreicht. Als Stromquelle und -senke diente jeweils ein Elektrodenpaar, so dass insgesamt $N_{\text{Elec}} \cdot (N_{\text{Elec}} - 1) = 992$ Stromkonfigurationen mit den zugehörigen 32 Potentialen gemessen werden konnten. Das Gefäß wurde zunächst mit Elektroden-Gel gefüllt. Dieser Leiter zweiter Klasse ähnelt in seinen elektrischen Eigenschaften organischen Geweben. Als Meßobjekt wurde in dieses Gel ein zylindrischer Körper mit einem Durchmesser von 3 cm eingebracht, dessen Positionierung in Abb. 2 gezeigt ist.

Die Messungen und Datenerfassungen erfolgen computergesteuert. Über Multiplexer wird je ein Elektrodenpaar als Stromquelle und -senke ausgewählt. Einspeist wird Wechselstrom mit einer Frequenz von 30 kHz, dessen Stromstärke gemessen wird. Die an den Mittelelektroden anliegenden Spannungen werden über Verstärker mit hochohmigen Eingängen und einem Multiplexer zu einem Vollweggleichrichter und Integrator geführt, dem ein 12-bit ADC nachgeschaltet ist. Die Erfassung der Meßwerte erfolgt über einen PC. Da alle Strom- und Spannungsmessungen von einer Baugruppe durchgeführt werden, kompensieren sich die Toleranzen der einzelnen Bauteile weitgehend. Ein vollständiger Meßdurchgang dauert 26 sec. Zunächst wurden alle Meß-

zyklen am mit Gel gefüllten Gefäß durchlaufen (Leermessung). Nach Einbringen eines zylinderförmigen Objektes wurden die Messungen wiederholt (Objektmessung). Sämtliche Meßzyklen werden zur Fehlerabschätzung mehrfach durchlaufen.

3. Mathematische Formulierung des EIT-Problems

3.1. Theoretische Grundlagen

In der EIT soll die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(x)$ in einem Volumen Ω mit Rand $\partial\Omega$ rekonstruiert werden, indem ein elektrischer Strom über eine Zahl von auf dem Rand angebrachten Elektroden eingespeist wird. Bei den angewandten Frequenzen gilt die quasistatische Näherung, und das Potential bestimmt sich für einen quellenfreien Leiter aus der Gleichung

$$\nabla \cdot \sigma(x) \nabla \Phi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1)$$

Für beliebige Leitfähigkeiten $\sigma(x)$ kann diese Differentialgleichung zweiter Ordnung nur numerisch gelöst werden. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen Randbedingungen vorgegeben werden. In der EIT wird ein elektrischer Strom an die Körperoberfläche angelegt (Neumann-Randbedingung). Wenn n der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor ist und j die Dichte des an $\partial\Omega$ angelegten Stromes, dann ist mit vorgegebenen

$$j(x) \doteq j(x) \cdot n, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

die Neumann-Randbedingung definiert durch

$$\sigma(x) \nabla \Phi(x) \cdot n = -j(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Man erkennt, dass mit jeder Lösung Φ auch jede Funktion $\Phi + c$, $c \in \mathbb{R}$, Gleichung (1) löst. Die frei wählbare Konstante c kann über die Nebenbedingung

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(x) = 0 \quad (4)$$

festgelegt werden. Man beachte, dass in Raum- oder Oberflächenintegralen die Raum- oder Oberflächenmaße dV oder dS nicht explizit geschrieben werden. Aus dem Gaußschen Satz und der Bedingung der Stromerhaltung $\nabla \cdot j = 0$ folgt

$$\int_{\partial\Omega} \sigma \nabla \Phi \cdot n = - \int_{\partial\Omega} j \cdot n = 0 \quad (5)$$

als notwendige Bedingung für die Lösung der Neumannschen Randwertaufgabe.

In der EIT muss das inverse Problem gelöst werden, d. h. die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(x)$ soll aus den gemessenen Randströmen und Randpotentialen berechnet werden. Dazu erweist es sich als vorteilhaft, schwache Lösungen des Randwertproblems zu betrachten. Man definiert eine Bilinearform $a(\Phi, \Psi)$ und ein Funktional $b(\Psi)$ durch

$$a(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega} \sigma \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \quad (6)$$

und

$$b(\Psi) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Psi, \quad (7)$$

wo $\Phi, \Psi \in H_1(\Omega)$.

Die obige Randwertaufgabe ist dann äquivalent der Bedingung

$$a(\Phi, \Psi) = b(\Psi), \quad \forall \Psi. \quad (8)$$

Jedes dieser Ψ kann aufgefasst werden als das zu einer äußeren Stromdichte $\mathbf{k}$ gehörende Potential.

Um das inverse Problem für $\sigma(x)$ zu lösen, müssen im Prinzip unendlich viele Strommuster an der Körperoberfläche angelegt werden. In der Praxis kann man nur endlich viele Stromkonfigurationen applizieren, so dass man sich mit einer verallgemeinerten Lösung zufrieden geben muss. Bei gegebener Randstromverteilung $\mathbf{j}^{(i)}(x)$ (wo i ein Index ist, der die verschiedenen Möglichkeiten äußere Ströme anzulegen unterscheidet), misst man auf $\partial\Omega$ das Potential $\Phi^{(i)}(x)$.

Da bei gegebenem äußerem Strom $\mathbf{j}(x)$ die resultierenden äußeren Potentiale nichtlinear von $\sigma(x)$ abhängen, stellt die Bestimmung der Leitfähigkeit außerdem ein nichtlineares Problem dar. Eine genauere Untersuchung zeigt auch, dass das Problem "schlecht gestellt" ist, d. h., dass die gesuchte Lösung $\sigma(x)$ nicht stetig von den Daten $\Phi^{(i)}(x)|_{\partial\Omega}$ abhängt. Diese Komplikationen lassen sich mit unterschiedlichen Strategien umgehen. Wir verwendeten speziell das Levenberg-Marquart Verfahren [4], eine optimierte Tikhonov-Regularisierung [5] und ein einfaches Newton-Verfahren mit abgeschnittener Singulärwertzerlegung zur Regularisierung. Es zeigte sich, dass die Ergebnisse bei den gegenwärtigen sehr groben experimentellen Daten für alle Verfahren gleichwertig waren. Wir wollen daher im folgenden nur das letzte Verfahren kurz vorstellen.

Zur Linearisierung des Problems nimmt man an, dass die Lösung des Neumann-Problems für eine gegebene Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(x)$ bekannt sei. Betrachtet man dazu eine infinitesimale Änderung der Leitfähigkeitsverteilung

$$\sigma(x) \rightarrow \sigma(x) + \delta\sigma(x) \quad (9)$$

bei festgehaltener Neumann-Randbedingung (konstanter Randstrom), dann kann man mit Hilfe von (8) leicht zeigen, dass die Änderung der Randpotentiale $\delta\Phi$ in linearer Näherung die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{k}^{(j)}(x) \cdot \mathbf{n} \delta\Phi^{(i)}(x) = \\ - \int_{\Omega} \delta\sigma(x) \nabla \Phi^{(i)}(x) \cdot \nabla \Psi^{(j)}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

erfüllt, wo

a) $\Phi^{(i)}(x)$ die Lösung von (1) für die Stromkonfiguration $\mathbf{j}^{(i)}$ und Leitfähigkeit $\sigma(x)$ ist ($\Phi(x)$ muss für ganz Ω berechnet werden).

b) $\Psi^{(j)}(x)$ die Lösung von (1) für eine Stromkonfiguration $\mathbf{k}^{(j)}(x)$ ist (auch $\Psi^{(j)}(x)$ muss für ganz Ω berechnet werden).

Die linke Seite von (10) stellt die Messwerte dar. Betrachtet man z. B. die Änderung der Potentialdifferenz $\delta\Phi^{(i)}(x_a) - \delta\Phi^{(i)}(x_b)$ zwischen zwei Punkten x_a und x_b , so ergibt sich der virtuelle Strom $\mathbf{k}^{(j)}(x) \doteq \mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{k}^{(a,b)}$ zu

$$\mathbf{k}^{(a,b)}(x) = \delta(x - x_a) - \delta(x - x_b) \quad x_a, x_b \in \partial\Omega, \quad (11)$$

d. h. die virtuellen Ströme $\mathbf{k}(x)$ stellen die Stromdichten dar, die anliegen würden, wenn die potentialmessenden Elektroden Strom führen würden.

Wenn man ansetzt, dass σ in einzelnen Zellen Z_a des Integrationsgebietes Ω konstant ist, reduziert sich (10) auf ein System linearer Gleichungen,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{k}^{(j)}(x) \delta\Phi^{(i)}(x) = \\ - \sum_a \delta\sigma_a \int_{Z_a} \nabla \Phi^{(i)}(x) \cdot \nabla \Psi^{(j)}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Aus (12) lässt sich $\delta\sigma_a$ im Prinzip durch Invertierung bestimmen. Es muss jedoch beachtet werden, dass dieses sogenannte inverse Problem instabil ist, d. h. dass σ nicht stetig von den Daten abhängt. Zur

endgültigen Berechnung der Leitfähigkeitsverteilung ist deshalb ein geeignetes Regularisierungsverfahren anzuwenden, welches im folgenden Abschnitt genauer beschrieben wird.

Mit Hilfe der Korrektur $\delta\sigma(x)$ bestimmt man ein verbessertes $\sigma(x)$ und wiederholt die Prozedur bis zur gewünschten Rekonstruktionsgenauigkeit.

3.2. Die Diskretisierung

Die der EIT zugrundeliegende Differentialgleichung (1) ist nur für wenige Spezialfälle analytisch lösbar. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn $\partial\Omega$ den Einheitskreis darstellt und σ konstant ist. In diesem Fall geht (1) in die Laplace-Gleichung über, die für Neumann-Randbedingungen auf dem Kreis analytisch lösbar ist. Im allgemeinen ist aber eine numerische Behandlung des EIT-Problems erforderlich.

Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Problems geben wir eine konstante Leitfähigkeit vor. Diese wird so gewählt, dass die daraus berechneten Potentiale die Daten im Least-Squares-Sinne optimal wiedergeben. Wir verwenden zur Berechnung der Potentiale bei gegebener Anfangsleitfähigkeit zwei Methoden, die der finiten Elemente und die der finiten Integrale, wobei letztere hier kurz beschrieben werden soll.

Das von uns zur Rekonstruktion verwendete Gitter zeigt Abbildung 3. Es besteht aus 896 Dreiecken und besitzt 481 Gitterpunkte. Die markierten Randknoten des Gitters stellen die 32 Elektroden dar, die zur Stromeinspeisung verwendet werden können.

Unter der Voraussetzung, dass die physikalischen Größen des EIT-Problems auf diesem Gitter nur dis-

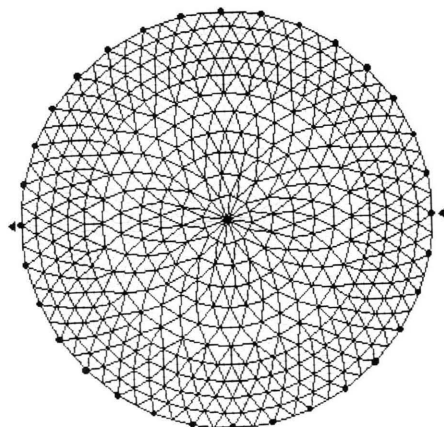


Abb. 3. Triangulierung und duales Gitter.

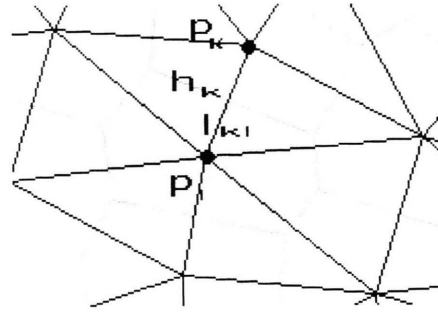


Abb. 4. Integrationsgebiet B_i (das duale Gitter ist grau eingezeichnet).

krete Werte annehmen können, kann eine numerische Berechnung des Problems erfolgen. Die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(x)$ wird dabei auf jedem Dreieck der Triangulierung als konstant angenommen. Die Potentialwerte $\Phi(x)$ sind auf den Knoten des Gitters lokalisiert, Stromdichte $j(x)$ und Feldstärke $E(x)$ auf den Mittelpunkten der Kanten des Gitters und zeigen in deren Richtung. Um das Ohmsche Gesetz $j(x) = \sigma(x)E(x)$ auf dem Gitter zu formulieren, ist zusätzlich die Leitfähigkeit $\tilde{\sigma}$ auf den Kanten, die die Gitterpunkte (i, j) verbinden, durch das Leitfähigkeitsmittel zu definieren. Dies geschieht durch Mittelung der Leitfähigkeiten der benachbarten Dreiecke, gewichtet durch die Abstände des Mittelpunktes einer Kante von den Schwerpunkten der anliegenden zwei Dreiecke.

Um das Vorwärtsproblem in diskretisierter Form zu erhalten, wird $\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0$ über die Flächenelemente B_i (siehe Abb. 4) des dualen Gitters integriert und der Gaußsche Satz angewendet, so dass

$$0 = \int_{B_i} \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \int_{\partial B_i} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \quad (13)$$

gilt.

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 4 lautet (13) in diskretisierter Form:

$$\sum_k \tilde{\sigma}_{ki} \frac{\Phi(p_k) - \Phi(p_i)}{l_{ki}} h_{ki} = I(p_i), \quad (14)$$

wobei p_k die Nachbarknoten von p_i sind, l_{ki} den Abstand zwischen den Punkten p_i und p_k des Gitters bezeichnet und h_{ki} die Länge der l_{ki} schneidenden Kante des dualen Gitters ist. Nur für die äußeren Knoten kann $I(p_i)$ von Null verschieden sein. Die für das Gitter entstehenden Gleichungen können dann in

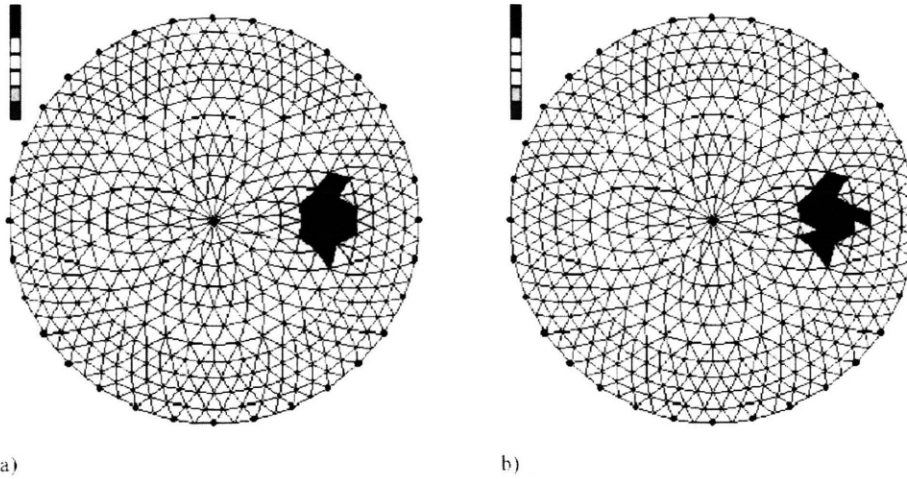


Abb. 5. Rekonstruktion mit experimentellen Stör- und Leerdaten, a) VR0, b) VR1.

geschlossener Form in einem linearen Gleichungssystem

$$A \cdot \Phi = I \quad (15)$$

der Dimension $(N \times N)$ zusammengefaßt werden, wobei N die Anzahl der Knoten des Gitters bezeichnet. Jede Zeile der Matrix A repräsentiert dabei einen Gitterknoten und besitzt lediglich Einträge auf der Diagonalen und in den Spalten von A , die den direkten Nachbarn dieses Knotens zugeordnet sind. Da die Lösung des Neumannproblems allerdings nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, muss in Übereinstimmung mit (4) gefordert werden, dass die Summe der Potentialwerte auf den Randknoten verschwindet.

Das Gleichungssystem (15) ist nach dieser Normierung eindeutig lösbar, so dass der Potentialwert jedes Gitterknotens für eine beliebige Stromkonfiguration I durch einfache Invertierung der Matrix A erhalten werden kann.

Das Rückwärtsproblem wird mit Hilfe von (12) gelöst und einer abgeschnittenen Singulärwertzerlegung stabilisiert. Es stellte sich heraus, dass für eine akzeptable Rekonstruktion ein Newtonschritt ausreichte. Damit lässt sich die sich aus (12) ergebende Matrix vorweg invertieren, so dass eine Rekonstruktion innerhalb kürzester Zeit möglich wird.

4. Ergebnisse

Um unseren Algorithmus an experimentellen Daten zu testen, wurden uns von der Firma Dr. G. Schuhfried Ges.m.b.H. in Wien die Meßdaten der

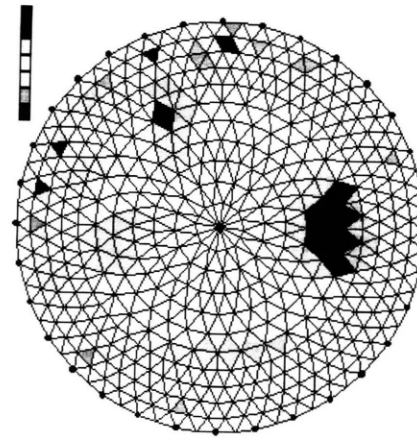


Abb. 6. Rekonstruktion mit experimentellen Stördaten und berechneten Leerdaten.

Objekt- und Leermessung für den im Abschnitt *Experimenteller Aufbau* beschriebenen Zylinder geliefert.

Zur Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung verwenden wir aufgrund der Speicherplatzersparnis nicht alle 992 möglichen Experimente, sondern zwei Versuchsreihen, die mit VR0 und VR1 bezeichnet sein sollen. VR0 besteht dabei aus 16 aufeinanderfolgenden Experimenten, bei denen sich Stromquelle und Stromsenke an gegenüberliegenden Elektroden befinden. Bei VR1 werden zwei aufeinanderfolgende Elektroden fest gewählt. Zunächst bildet die erste Elektrode die Stromquelle und die folgenden 31 Elektroden nacheinander die Stromsenke. Anschließend fließt der Strom in die zweite fest gewählte Randelektrode ein und aus den folgenden 30 Elektroden nacheinander aus. Dies ergibt

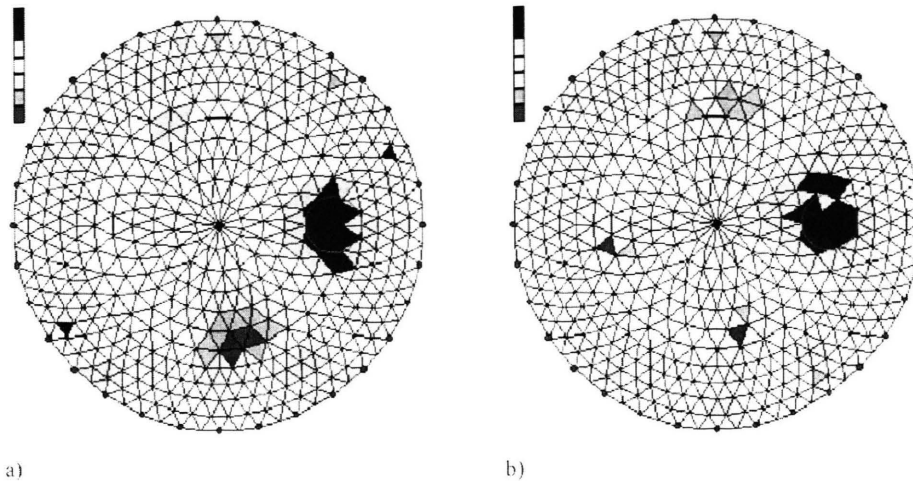


Abb. 7. Rotationsmethode ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), a) rekonstruierte Leitfähigkeitsdifferenz, b) rekonstruierte Endverteilung aus Leitfähigkeitsdifferenz über SWZ der Rotationsmatrix.

61 Experimente. Abbildung 5 zeigt die Ergebnisse der Rekonstruktion für VR0 und VR1 unter Verwendung von Objekt- und Leerdaten. Die wahre Position des Störkörpers kann man Abb. 5 entnehmen.

Bei einer praktischen Anwendung des Rekonstruktionsverfahrens sind häufig keine gemessenen Leerdaten gegeben. Diese müssen dann durch berechnete Daten ersetzt werden. Abbildung 6 zeigt die Rekonstruktion der Leitfähigkeitsverteilung unter Verwendung berechneter homogener Daten, wobei die Versuchsanordnung VR1 zugrunde liegt. Eine andere Möglichkeit besteht in der Elimination der Leerdaten durch geschickte Rotation der Randspannungsanordnung. Die Ergebnisse dieses Verfahrens finden sich in Abb. 7 für den Fall, dass die Randspannungsanordnung um einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ verdreht und die Versuchsanordnung VR0 verwendet wurde.

Durch Differenzbildung der rotierten und nicht rotierten Daten konnte eine Überlagerung zweier Leitfähigkeitsbilder erreicht werden (Abb. 7a), aus der durch eine Singulärwertzerlegung der Rotationsmatrix die endgültige Leitfähigkeitsverteilung zu ermitteln war (Abb. 7b).

5. Zusammenfassung

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir einen Impedanztomographen entwickelt haben, der Bilder guter Auflösung liefert. Gegenüber bestehenden Systemen unterscheidet sich der Tomograph durch eine geschickte Elektrodenanordnung, die einerseits Strom- und Spannungsmessungen trennt, und andererseits die Stromfäden, soweit möglich, in einer Ebene hält. Beste Ergebnisse ergeben sich, wie zu erwarten, sofern Referenzdaten für homogene Leitfähigkeiten herangezogen werden können. Wenn dies nicht der Fall ist, so haben wir eine neue Rotationsmethode vorgeschlagen und implementiert, die auch Differenzbilder für den Fall einzelner isolierter Inhomogenitäten liefert. Die Ergebnisse werden in Farbgraphik auf einem PC wiedergegeben. Für die Zukunft planen wir in-vivo-Erprobung eines verbesserten Nachfolgegerätes.

Danksagung

Wir danken Isolde Savelsberg-Walter und Carsten Lehmann für interessante Diskussionen und für das kritische Lesen des Manuskripts. Die Forschung wurde unterstützt durch die Stiftung Rheinland-Pfalz für Innovation.

- [1] Siehe z. B. die Sammlungen von Arbeiten in *Physiol. Meas.* **16**, Supplement 3a (1995) und *Physiol. Meas.* **17**, Supplement 4a (1996).
- [2] Proceedings of Workshop of European Concerted Action on Process Tomography, M. Beck (Editor), Oporto 1994.
- [3] S. Ciulli, S. Ispas, and M. Pidcock, *J. Math. Phys.* **37**, 4388 (1996).
- [4] K. Levenberg, *Quart. Appl. Math.* **2**, 164 (1944); D. W. Marquardt, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **11**, 431 (1963).
- [5] J. Honerkamp and J. Weese, *Continuum Mech. Thermodyn.* **2**, 17 (1990).