Feldtheoretische Konstruktion der Jordan—Brans—Dicke-Theorie

H. VON GRÜNBERG

Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln

(Z. Naturforsch. **26 a**, 599—622 [1971]; received 15 December 1970)

Fieldtheoretic Construction of the Jordan-Brans-Dicke-Theory

In the framework of Lorentz invariant theories of gravitation the fieldtheoretic approach of the generally covariant Jordan-Brans-Dicke-theory is investigated.

It is shown that a slight restriction of the gauge group of Einstein's linear tensor theory leads to the linearized Jordan-Brans-Dicke-theory. The problem of the inconsistency of the field equations and the equations of motion is solved by introducing the Landau-Lifschitz energy momentum tensor of the gravitational field as an additional source term into the field equations. The second order of the theory together with the corresponding gauge group are calculated explicitly. By means of the structure of the gauge group of the tensor field it is possible to identify the successive orders of the scalar-tensor theory as an expansion of the Jordan-Brans-Dicke-theory in flat space-time. The question of the uniqueness of the procedure is answered by showing that the structure of the gauge group of the tensor field is predetermined by the linear equations of motion. The mathematical proof of this fact confirms formally the meaning of the equations of motion for the geometry of space.

Einleitung

Die Einsteinsche Gravitationstheorie ist auf zwei Weisen abgeändert worden: Erstens im Riemannschen Raum z. B. von JORDAN [1], BRANS und DICKE [2], zweitens im flachen Raum u. a. von CAPELLA [3], BELINFANTE und SWIHART [4]. Die Frage nach der Zuordnung dieser beiden Klassen von Gravitationstheorien läßt sich in einer Richtung positiv beantworten: Den genannten allgemein-kovarianten Theorien entsprechen eindeutig ihre linearen Näherungen im Minkowski-Raum. Eine eindeutige Zuordnung in umgekehrter Richtung ist bisher nur im Fall der Einstein-Theorie nachgewiesen worden [5, 6]. Ähnliches für die Jordan-Brans-Dicke-Theorie (J.-B.-D.) [7] zu versuchen, scheint nach den Untersuchungen von SEXL [8] aussichtslos, der behauptet, daß in linearer Näherung die Theorien 1) – 4) identisch sind. Denn dann wäre die linearisierte J.-B.-D.-Theorie ebenso wie die von Capella konsistent und es gäbe keine Motivation für die sukzessive Rückkehr zu ihrer kovarianten Form.

Tatsächlich wird die lineare J.-B.-D.-Theorie durch Eichung identisch mit der Theorie von Capella; die entsprechende Eichkonvention – die bei Capella fehlt – muß man dann aber zusammen mit den Feldgleichungen berücksichtigen und erreicht auf diese Weise doch eine Unterscheidung der Fälle.

Die allgemeinen Prinzipien, die bei der feldtheoretischen Konstruktion einer Gravitationstheorie zu beachten sind, übernehmen wir aus 5), 6) allerdings nicht alle, denn die Postulate

a) Lorentz-Invarianz,

b) Herleitung der ganzen Theorie aus einer Lagrange-Funktion,

c) Beschränkung auf höchstens zweite Ableitungen der Feldgrößen in den Feldgleichungen,

d) Spineindeutigkeit (d. h. die Gravitation soll nur durch *eine* Teilchenart mit Spin 2 und Masse 0 übermittelt werden),

e) Äquivalenzprinzip

führen eindeutig auf die Einsteinsche Theorie [6]. Wir müssen also mindestens eine Forderung aufgeben; und zwar werden wir im Sinne der im Thema genannten Aufgabenstellung d) ersetzen durch

d′) Zugelassen sind ein Spin 2- und ein Spin 0-Feld, beide mit der Masse Null.

Um die dadurch verlorengehende Eindeutigkeit des Verfahrens wiederherzustellen, nehmen wir die Forderung

[1] P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig 1955.

[2] C. BRANS u. R. H. DICKE, Phys. Rev. **124**, 925 [1961].

[3] A. CAPELLA, Nuovo Cim. **42** B, 321 [1966].

[4] F. BELINFANTE u. J. SWIHART, Ann. Phys. New York **1**, 168 [1957].

[5] W. WYSS, Helv. Phys. Acta **38**, 469 [1965].

[6] J. B. BARBOUR, Dissertation, Köln 1968.

[7] Für $\eta = -1$ stimmt die Jordan-Theorie mit der von Brans und Dicke überein.

[8] R. U. SEXL, Fortschr. Phys. **15**, 269 [1967].

f) Die Einsteinsche Theorie soll für bestimmte Wahl der Parameter enthalten sein

hinzu.

Wir werden zeigen, daß man zur Erfüllung von d′) nicht notwendig eine Skalar-Tensortheorie von vornherein anzusetzen braucht, sondern daß man, ausgehend von einer Tensortheorie mit eingeschränkter Eichgruppe, zwangsläufig auf die Hinzunahme eines Skalarfeldes geführt wird. Hierbei spielt die Eichinvarianz der Bewegungsgleichung eine wichtige Rolle, die man nur durch Einführung einer Ordnungsdefinition der einzelnen Terme erklären kann.

Genau diese Ordnungsrelation löst auch das Problem der Inkonsistenz von Feld- und Bewegungsgleichungen, welches bisher [5, 6] als Ausgangspunkt für Größenordnungsbetrachtungen verwendet wurde. Die Forderungen nach gleichen Invarianzeigenschaften und nach Konsistenz von Feld- und Bewegungsgleichungen sind also äquivalent als Begründungen dafür, daß die lineare Theorie eine Näherung ist.

Die Skalar-Tensortheorie in zweiter Ordnung konsistent zu machen, ist ungleich komplizierter als im Einsteinschen Fall. Man kann sich aber mit einem Trick helfen: Durch Eichung läßt sich das Skalarfeld in der linearen Theorie eliminieren, und durch Berücksichtigung des Landau-Lifschitz-Energie-Impuls-Tensors des Tensorfeldes als zusätzlichem Quellterm in den Feldgleichungen erreicht man gerade Verträglichkeit von Feld- und Bewegungsgleichungen, wie man es physikalisch erwartet.

Daran anschließend zeigen wir zunächst die Existenz und später die Eindeutigkeit einer Theorie zweiter Ordnung mit den Eigenschaften a) – f). Dabei geht die Verwendung der Eichgruppen wesentlich ein; mit ihrer Hilfe gelingt es – durch Bestimmung ihrer Lie-Algebren und damit ihrer Struktur –, das Verfahren der schrittweisen Behebung der Inkonsistenz zu systematisieren und seine physikalische Bedeutung zu klären: Die sukzessive Erweiterung der behandelten Skalar-Tensortheorie von einer Ordnung zur nächsthöheren ist die Entwicklung der J.-B.-D.-Theorie im flachen Raum.

In einer formal so komplizierten Theorie läßt sich der Eindeutigkeitsbeweis nur gruppentheoretisch führen. Man stellt fest, daß die Bewegungsgleichung der linearen Theorie die Struktur der Eichgruppe des Materiefeldes zu bestimmen erlaubt. Da sich beweisen läßt, daß die Eichgruppe zweiter Ordnung des Tensorfeldes von derselben Struktur sein muß, gilt die „physikalische Eindeutigkeitsaussage", daß es zwar formal verschiedene Erweiterungen zweiter Ordnung gibt, die aber alle die J.-B.-D.-Theorie repräsentieren, entwickelt im flachen Raum mit verschiedenen Ansätzen für den metrischen Tensor.

Lineare Tensortheorie

Der allgemeinste Ansatz für eine Lagrange-Funktion, die eine Lorentz-invariante Gravitationstheorie mit höchstens zweiten Ableitungen der Feldgrößen in den Feldgleichungen beschreibt, ist [5]

$$L(\psi) = \sum_{i=1}^{6} a_i I_i \tag{1}$$

mit $I_1 = \psi^\mu_\mu \psi^\nu_\nu$, $I_2 = \psi^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}$, $I_3 = \psi_{\mu\nu,\sigma} \psi^{\mu\nu,\sigma}$, $I_4 = \psi_{\mu\nu,\sigma} \psi^{\mu\sigma,\nu}$, $I_5 = \psi^\mu_{\mu,\sigma} \psi^{\nu,\sigma}_\nu$, $I_6 = \psi^{\cdot\mu}_{\mu,\sigma} \psi^{\nu\sigma,}{}_\nu$.

Wenn man Invarianz der zu $L(\psi)$ gehörigen Feldgleichungen

$$\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L(\psi) =_{\text{def}} \frac{\delta \int L(\psi)\, \mathrm{d}^4x}{\delta \psi_{\mu\nu}} = -\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi) = 0$$

gegenüber der Eichtransformation

$$\psi_{\mu\nu} \to \overline{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \tag{2}$$

fordert, wird man bekanntlich [5] eindeutig auf die linearisierte Einsteinsche Theorie geführt.

Die Invarianz der Theorie gegenüber (2) ist eine starke Einschränkung, denn sie erlaubt, wie Wyss zeigt, mit speziell gewählten Λ_μ zur Hilbert-Eichung mit zusätzlicher Spurfreiheit,

$$\overline{\psi}^\mu_\mu = \overline{\psi}^{\mu\nu,}{}_\nu = 0 \tag{3}$$

überzugehen. In der Eichung (3) sind drei der vier bezüglich der Untergruppe der räumlichen Drehungen irreduziblen Darstellungs-Komponenten ausgeschlossen, nämlich die Vektordarstellung und beide Skalardarstellungen; $\overline{\psi}$ ist also ein reines „Spin 2"-Feld.

Wir wollen nun die durch (2) gegebene Eichgruppe dahingehend einschränken – die Theorie also verallgemeinern –, daß die mit ihrer Hilfe erreichbaren Eichungen zwar die Vektordarstellung und eine Skalarkomponente auszuschließen ermöglichen, nicht aber die zu $\psi^\mu_\mu \neq 0$ gehörige Skalardarstellung. Dazu wird man zweckmäßig zu (2) die Bedingung

$$\Lambda_{\mu,}{}^{\mu} = 0 \tag{4}$$

hinzunehmen. Denn ausgehend von $\psi_{\mu\nu}$ mit $\psi^\mu_\mu \neq 0$ ist die Eichung $\overline{\psi}_{\mu\nu}$ mit $\overline{\psi}^\mu_\mu = 0$ mit (2) und (4) nicht erreichbar; der zu ψ^μ_μ gehörende „Spin 0"-Teil läßt sich also durch Eichung im allgemeinen nicht beseitigen.

Invarianz von $-\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)$ gegen (2) mit (4) bedeutet $-\tilde{G}^{\mu\nu}(\overline{\psi})+\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)=0$, nach Zusammenfassen der Terme

$$\begin{aligned}-\tilde{G}^{\mu\nu}(\overline{\psi})+\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi) \\ =2\,a_2(\Lambda^{\mu,\nu}+\Lambda^{\nu,\mu})-(2\,a_3+a_4)\,\Lambda^{\mu,\nu\sigma}_{\sigma} \\ -(2\,a_3+a_4)\,\Lambda^{\nu,\mu\sigma}_{\sigma}=0\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Infolge der Zusatzbedingung (4) werden nurmehr zwei Forderungen an die a_i gestellt,

$$a_2=0\,,\qquad 2\,a_3+a_4=0\,, \tag{6}$$

so daß nach Festlegung des gemeinsamen Faktors durch

$$a_3=\tfrac14 \tag{7}$$

noch drei Konstanten frei bleiben. Zu ihnen gehört der Koeffizient a_1 des Masseterms $\eta^{\mu\nu}\,\psi^\varrho_\varrho$, den wir durch Einschränkung auf masselose Gravitationsfelder $a_1=0$ setzen. Damit und mit (6) und (7) erhält man

$$\begin{aligned}-\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)=-\tfrac12\,\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\ \ \ \ \sigma}+\tfrac12\,\psi^{\mu\sigma,\nu}_{\ \ \ \ \sigma}+\tfrac12\,\psi^{\nu\sigma,\mu}_{\ \ \ \ \sigma} \\ -2\,a_5\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\tau}_{\varrho\ \tau}-a_6\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}_{\ \ \ \varrho\sigma}-a_6\,\psi^{\varrho,\mu\nu}_{\varrho}=0\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Wir wollen (8) noch durch die Eichung

$$\overline{\psi}^{\mu\nu,}_{\ \ \ \nu}=\overline{\psi}^{\varrho,\mu}_{\varrho}\cdot\vartheta \tag{9}$$

vereinfachen. Den Übergang von $\psi_{\mu\nu}$ zu $\overline{\psi}_{\mu\nu}$ mit (9) vermittelt eine Transformation mit

$$\Lambda^{\mu,\nu}_{\ \ \ \nu}=\psi^{\varrho,\mu}_{\varrho}\cdot\vartheta-\psi^{\mu\nu,}_{\ \ \ \nu}\,.$$

(9) ist invariant gegenüber (2), wenn

$$\Lambda^{\alpha,\beta}_{\ \ \ \beta}=\Lambda^{\lambda,\alpha}_{\ \ \ \lambda}(2\,\vartheta-1)$$

gilt. Man sieht, daß nur im Fall $\vartheta=\frac12$ die Einschränkung (4) nicht nötig ist und daher „Spineindeutigkeit" erreicht werden kann.

Mit (9) wird (8)

$$\begin{aligned}-\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)=-\tfrac12\,\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\ \ \ \ \sigma}+(\vartheta-a_6)\,\psi^{\varrho,\mu\nu}_{\varrho} \\ -(2\,a_5+\vartheta^2)\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\tau}_{\varrho\ \tau}=0\,.\end{aligned} \tag{10}$$

(10) ist invariant unter (2) mit den Bedingungen (4) und, nach der Eichung (9),

$$\Box\,\Lambda_\mu=0\,. \tag{11}$$

Mit der Festsetzung $a_6=\vartheta$ erhält man aus (10)

$$-\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)=-\tfrac12\,\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\ \ \ \ \sigma}-(2\,a_5+\vartheta^2)\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\tau}_{\varrho\ \tau}=0\,, \tag{12}$$

das ist die „Flache Theorie" von CAPELLA [3] in vacuo, abgesehen davon, daß $\psi_{\mu\nu}$ hier zusätzlich den Koordinatenbedingungen (9) unterworfen ist.

Wir bemerken, daß in (12) noch immer die linearisierte Einsteinsche Theorie enthalten ist: Für $\vartheta=\frac12$ und $a_5=-\frac14$ sind (12) die linearen Feldgleichungen in Hilbert-Eichung

$$\psi^{\mu\nu,}_{\ \ \ \nu}=\tfrac12\,\psi^{\varrho,\mu}_{\varrho}\,, \tag{9'}$$

$$-G^{\mu\nu}(\psi)=-\tfrac12\,(\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\ \ \ \ \sigma}-\tfrac12\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\tau}_{\varrho\ \tau})=0\,. \tag{12'}$$

Ebenso wie (12′) ist (12) invariant unter (2) mit (11).

Damit die nach dem Norther-Theorem aus dieser Invarianz von (12) folgenden Identitäten eine möglichst einfache Form annehmen, wählen wir

$$a_5=-\tfrac12\,\vartheta(\vartheta+\tfrac12)\,. \tag{13}$$

Damit wird (12)

$$-\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)=-\tfrac12\,\Box\,(\psi^{\mu\nu}-\vartheta\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^\varrho_\varrho) \tag{14}$$

und

$$-\tilde{G}(\psi)^{\mu\nu,}_{\ \ \ \ \nu}=-\tfrac12\,\Box\,(\psi^{\mu\nu,}_{\ \ \ \nu}-\vartheta\,\psi^{\varrho,\mu}_{\varrho})=0 \tag{15}$$

wegen (9). Nur mit der Wahl (13) von a_5 und $a_6=\vartheta$ bleibt die Einsteinsche Theorie als Grenzfall für $\vartheta=\frac12$ enthalten. Die Lagrange-Funktion zu (14) ist

$$\tilde{L}(\psi)=\tfrac14\,\psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}-\tfrac14\,\vartheta\,\psi^\mu_{\mu,\sigma}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho}\,. \tag{16}$$

Ankopplung an das Materiefeld

Entsprechend dem Äquivalenzprinzip koppeln wir $\tilde{G}^{\mu\nu}(\psi)$ direkt an den symmetrischen Energie-Impulstensor der Materie $T^{\mu\nu}(q)$ mit einer Kopplungskonstanten $8\pi/\Phi_0$ und schreiben die Lagrange-Funktion des Systems von Materie mit Gravitationsfeld als

$$L=\tilde{L}(\psi)+\Lambda(q)+L_{\mathrm{w}} \tag{17}$$

mit der Lagrange-Funktion $\Lambda(q)$ des Materiefeldes q und der Wechselwirkungs-Lagrange-Funktion

$$L_{\mathrm{w}}=(8\,\pi/\Phi_0)\;\psi_{\mu\nu}\,T^{\mu\nu}(q)\,.$$

Aus (17) folgen die Feldgleichungen

$$-\tfrac12\,\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\ \ \ \ \sigma}+\tfrac12\,\vartheta\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\ \sigma}=-\frac{8\,\pi}{\Phi_0}\,T^{\mu\nu}(q) \tag{18}$$

und die Bewegungsgleichungen

$$\varepsilon(q_\varrho)\;L=_{\mathrm{def}}\frac{\delta\int L\,\mathrm{d}^4x}{\delta q_\varrho}=\varepsilon(q_\varrho)\;\Lambda(q)+\varepsilon(q_\varrho)\;L_{\mathrm{w}}=0\,. \tag{19}$$

Wegen (15) erhalten wir aus (18)

$$T(q)^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 . \tag{20}$$

(19) und (20) sind aber, wie BARBOUR[6] gezeigt hat, inkonsistent, und zwar unabhängig vom Materiemodell. Diese Inkonsistenz ist eine Folge von (9), liegt also im Grunde genommen daran, daß wir die Theorie aus einem allgemeinen Ansatz mit der Forderung nach Invarianz unter (2) mit (4) gewonnen und durch die Eichkonvention (9) spezialisiert haben. Bei Capella, der seine Theorie ad hoc formulierte, tritt obige Inkonsistenz nicht auf, und die lineare Theorie ist in sich geschlossen. In unserem Fall sehen wir uns gezwungen, wie Wyss und Barbour, die Feldgleichungen als Anfang einer Entwicklung einer konsistenten Theorie aufzufassen.

Eichinvarianz der linearen Theorie

Um die Bewegungsgleichung (19) genauer zu untersuchen, wählen wir als Materiemodell das skalare Klein-Gordon-Feld[9], also

$$\Lambda = (16\,\pi/\Phi_0)\; L(\chi), \qquad L(\chi) = \chi_{,\mu}\,\chi^{,\mu} - m^2\,\chi^2 \tag{21}$$

mit dem kanonischen Energie-Impulstensor

$$T^{\mu\nu}(\chi) = 2\,\chi^{,\mu}\,\chi^{,\nu} - \eta^{\mu\nu}(\chi_{,\alpha}\,\chi^{,\alpha} - m^2\,\chi^2). \tag{22}$$

Der Faktor $16\,\pi/\Phi_0$ von $L(\chi)$ in Λ wurde so gewählt, daß die Bewegungsgleichung

$$\varepsilon(\chi)\;L =_{\text{def}} \frac{\delta \int L\,\mathrm{d}^4x}{\delta\chi} = \varepsilon(\chi)\,(\Lambda + L_{\mathrm{W}}) = (16\,\pi/\Phi_0)\;\varepsilon(\chi)\;\big(L(\chi) + \tfrac{1}{2}\,\psi_{\mu\nu}\,T^{\mu\nu}(\chi)\big) = 0 \tag{23}$$

die Kopplungskonstante nicht enthält. (23) lautet ausgerechnet

$$\begin{aligned}\varepsilon(\chi)\;L(\chi) + \varepsilon(\chi)\,\tfrac{1}{2}\,\psi_{\mu\nu}\,T^{\mu\nu}(\chi)&\\ = -2(\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\;\chi + \tfrac{1}{2}\,[2\,\psi^\nu_\nu\;(\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\;\chi - 4\,\partial_\mu(\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\nu}) + 2\,\psi^\mu_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu}] &= 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Nach Konstruktion gestattet (18) Eichtransformationen (2) mit (11), die Feldgleichungen (18) bestimmen also die Potentiale $\psi_{\mu\nu}$ nur bis auf Eichzusätze der Form $\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}$ mit $\Box\Lambda_\mu = 0$. Da die Bewegungsgleichung (24) aber offensichtlich diese Invarianzeigenschaft nicht besitzt, entspricht jeder Umeichung der Potentiale eine andere Bewegung der Materie. Diesen scheinbaren Widerspruch kann man beseitigen, wenn man in (24) gleichzeitig mit

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \overline{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \tag{2}$$

die Transformationen

$$\begin{aligned}\chi &\rightarrow \overline{\chi} = \chi\,,\\ \partial_\mu &\rightarrow \overline{\partial}_\mu = \partial_\mu - \Lambda^{\nu}{}_{,\mu}\,\partial_\nu\,,\\ \partial^\mu &\rightarrow \overline{\partial}^\mu = \partial^\mu - \Lambda_{\nu,}{}^{\mu}\,\partial^\nu\end{aligned} \tag{25}$$

vornimmt, die für infinitesimale Λ eine Gruppe bilden. Die Invarianz von (24) unter (2) und (25) hängt unmittelbar mit einer Ordnungsdefinition der einzelnen Terme zusammen. Wenn man $T^{\mu\nu}(\chi)$ nach Definition als von nullter Ordnung betrachtet, sind nach (18) $\psi_{\mu\nu}$ und seine Ableitungen von der Ordnung $1/\Phi_0$. Da $\psi_{\mu\nu}$ und $\overline{\psi}_{\mu\nu}$ die gleiche Ordnung haben sollen, ist nach (2) ebenfalls $\Lambda_\mu = o(1/\Phi_0)$. Nimmt man nun auf der linken Seite von (24) die Ersetzungen (2) und (25) vor, so findet man als Ergebnis

$$\begin{aligned}-2(\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\;\chi\; + \tfrac{1}{2}\,[2\,\psi^\nu_\nu\;(\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\;\chi&\\ - 4\,\partial_\mu(\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\nu}) + 2\,\psi^\mu_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu}] + o(\Phi_0^{-2})&.\end{aligned} \tag{26}$$

Wenn man voraussetzt, daß (24) nur bis auf Terme $o(\Phi_0{}^{-2})$ gilt, ist die Bewegungsgleichung invariant gegenüber (2), (25). Konsequenterweise wird man auch nach dem Verhalten von (18) gegenüber der erweiterten Eichgruppe [mit (25)] fragen. Man sieht, daß die Invarianz von (18) unter (2), (11) bei gleichzeitiger Anwendung von (25) durch Zusatzterme $o(\Phi_0{}^{-2})$ zerstört wird. Mit der Forderung, daß (18) nur in der Ordnung $1/\Phi_0$ gelten soll, sind auch die Feldgleichungen invariant unter der erweiterten Eichgruppe.

Diese Konvention bedingt dann die Abänderung von (20) in

$$T(\chi)^{\mu\nu}{}_{,\nu} = o(1/\Phi_0) \tag{27}$$

und stellt mit Hilfe der Beziehung

$$T(\chi)^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\chi^{,\mu}\,\varepsilon(\chi)\;L(\chi) \tag{28}$$

[9] Alle im folgenden gewonnenen Ergebnisse hängen aber nicht von der speziellen Wahl des Materiemodells ab. Die Verwendung des Klein-Gordon-Feldes vereinfacht die Rechnungen und verbessert die Übersichtlichkeit des Verfahrens.

die Konsistenz der Feldgleichungen (18) und der Bewegungsgleichung (24) in erster Ordnung von $1/\Phi_0$ sicher.

Ausgehend von der Bemühung, die scheinbare Abhängigkeit der Bewegung der Materie von den – auf Grund der Feldgleichungen unwesentlichen – Eichzusätzen $\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}$ zu beseitigen, haben wir die erweiterte Eichgruppe (2), (25) gefunden. Dabei ist zu beachten, daß in der Eichtransformation (2) von $\psi_{\mu\nu}$ die für die Invarianz der Feldgleichungen nötige Einschränkung $\Box\,\Lambda_\mu=0$ bei der Bewegungsgleichung nicht gemacht werden muß. Das veranlaßt uns zu fragen, ob es aus einer Lagrange-Funktion ableitbare Feldgleichungen

$$H^{\mu\nu}=-(8\pi/\Phi_0)\,T^{\mu\nu}$$

mit divergenzfreiem $H^{\mu\nu}$ gibt, die wie die Bewegungsgleichung invariant gegen (2), (25) ohne Einschränkung sind und die in der Eichung (9) gerade die Form (18) annehmen.

Der in Frage kommende Ansatz für $H^{\mu\nu}$ ist eine Linearkombination der zweiten Ableitungen von $\psi_{\mu\nu}$,

$$H^{\mu\nu}=a\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\sigma}+b\,\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}+c\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\sigma}+d\,\psi^{\nu\sigma,\mu}{}_{\sigma}+e\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}+f\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}\,. \tag{29}$$

Wegen der Symmetrie von $H^{\mu\nu}$, die ihrerseits aus der Symmetrie von $\psi_{\mu\nu}$ und der Ableitbarkeit aus einer Lagrange-Funktion folgt, gilt

$$c=d\,. \tag{30}$$

Die Forderung, daß $H^{\mu\nu}$ durch die Eichkonvention (9) in die linke Seite von (18) übergeht, führt auf die Gleichung

$$H^{\mu\nu}=a\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\sigma}+\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}(b+2\,c\,\vartheta)+\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}(e\,\vartheta+f)=-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}\cdot\vartheta\,, \tag{31}$$

also auf die Koeffizientenbedingungen

$$a=-\tfrac{1}{2}\,,\quad b+2\,c\,\vartheta=0\,,\quad e\,\vartheta+f=\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,. \tag{32}$$

Die zweite Forderung, nämlich daß $H^{\mu\nu}$ invariant unter (2) sein soll, bedeutet natürlich, daß $H^{\mu\nu}$ ein Vielfaches des aus der linearisierten Einsteinschen Theorie bekannten Tensors

$$-G^{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}\,(-\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\sigma}-\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}+\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\sigma}+\psi^{\nu\sigma,\mu}{}_{\sigma}-\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}+\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}) \tag{33}$$

sein muß, also, wenn man $a=-\tfrac{1}{2}$ aus (32) hinzunimmt,

$$H^{\mu\nu}=-G^{\mu\nu}\,. \tag{34}$$

(34) und die letzten beiden Gleichungen in (32) sind offenbar nur verträglich für $\vartheta=\tfrac{1}{2}$, d. i. der Einsteinsche Fall. Wir sehen, daß sich die beiden Forderungen für $\vartheta\neq\tfrac{1}{2}$ mit Hilfe eines $H^{\mu\nu}$ in der Form (29) nicht realisieren lassen. Der einzige Ausweg ist die zunächst rein formale Einführung von „nicht-geometrischen" Hilfsfeldern [8] in $H^{\mu\nu}$. Wir werden sehen, daß wir in unserem Fall mit einem Skalarfeld auskommen.

Statt einen neuen Ansatz für $H^{\mu\nu}$ zu machen, der neben den Termen (29) aus einem Skalarfeld gebildete Ausdrücke enthält, wollen wir einen direkteren Weg einschlagen. Dazu subtrahieren wir von $H^{\mu\nu}$ in (29) den eichinvarianten Teil, d. i. wegen $a=-\tfrac{1}{2}$ gerade $-G^{\mu\nu}$, und versuchen, den Rest, $H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}$, durch ein Hilfsfeld auszudrücken. $H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}$ läßt sich mit (32) schreiben als

$$\begin{aligned}H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}=(-2\,c\,\vartheta+\tfrac{1}{2})\,\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}+(c-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\sigma}+(c-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\nu\sigma,\mu}{}_{\sigma}\\+(e+\tfrac{1}{2})\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}+(\tfrac{1}{2}\,\vartheta-e\,\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}\,.\end{aligned} \tag{35}$$

Die Koeffizienten c und e in (35) lassen sich bestimmen, wenn man die Bedingung $H^{\mu\nu,}{}_{\nu}=0$ hinzunimmt. Damit folgt

$$(H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu})_{,\nu}=(\tfrac{1}{2}\,\vartheta-2\,c\,\vartheta-e\,\vartheta)\,\psi^{\varrho,\sigma\mu}_{\varrho\,\sigma}+(c-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\nu\sigma}+(c+e)\,\psi^{\varrho\sigma,\mu}{}_{\varrho\sigma}=0\,, \tag{36}$$

also für die Koeffizienten

$$c=\tfrac{1}{2}\,,\quad e=-\tfrac{1}{2}\,. \tag{37}$$

Aus (32) und (37) erhalten wir jetzt auch

$$b=-\vartheta\,,\quad f=\vartheta \tag{38}$$

und damit

$$H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}=(\tfrac{1}{2}-\vartheta)\,\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}+(\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}\,. \tag{39}$$

Jetzt wollen wir (39) durch einen aus einem Skalarfeld ξ und seinen höchstens zweiten Ableitungen aufgebauten Tensor $A^{\mu\nu}(\xi)$ ausdrücken. Wir versuchen es mit dem einfachsten $A^{\mu\nu}(\xi)$, das wie $H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}$ divergenzfrei ist, und setzen

$$H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}=(\tfrac{1}{2}-\vartheta)\,\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma}+(\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}=(1/\Phi_0)\,(\xi^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,\xi^{\lambda}_{,\lambda})\,. \tag{40}$$

Wegen des Faktors $1/\Phi_0$ ist ξ von nullter Ordnung im Sinne unserer Ordnungsdefinition. Damit

$$H^{\mu\nu}=-G^{\mu\nu}+(1/\Phi_0)\,(\xi^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,\xi^{\lambda}_{,\lambda})=-(8\,\pi/\Phi_0)\,T^{\mu\nu} \tag{41}$$

bei Anwendung der Eichtransformationen (2), (25) invariant bleibt, darf ξ sich dabei, wenn überhaupt, nur um $o(1/\Phi_0)$ ändern. Wir haben uns also in (41) Feldgleichungen verschafft, die die gleichen Invarianzeigenschaften besitzen wie die Bewegungsgleichung und die mit der Eichkonvention (9) in (18) übergehen. Die physikalische Bedeutung dieses rein formalen Verfahrens ist, daß wir annehmen, daß die sich auf (18) reduzierenden eichinvarianten Feldgleichungen zu einer Skalar-Tensortheorie gehören, und daß wir, statt die richtige Lagrange-Funktion $L(\psi,\xi,\chi)$ und die entsprechenden Feldgleichungen $\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L(\psi,\xi,\chi)=0$, $\varepsilon(\xi)\,L(\psi,\xi,\chi)=0$ zu raten, sie induktiv zu konstruieren versuchen. In diesem Sinne gewinnen wir aus der Definition (40) von ξ durch Verkürzung die ξ-Feldgleichung

$$(1/\Phi_0)\,\xi^{\lambda}_{,\lambda}=-(\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}\,, \tag{42}$$

allerdings wegen der Herleitung aus $H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}$ nur in beschränkter eichinvarianter Form ($\Box\,\Lambda_\mu=0$). Wir verfahren daher ähnlich wie bei der Behandlung von (18) und schreiben unter Benutzung von (9)

$$(1/\Phi_0)\,\xi^{\lambda}_{,\lambda}=-(\vartheta-\tfrac{1}{2}+a)\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}+(a/\vartheta)\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}\,. \tag{43}$$

a bestimmen wir so, daß (43) invariant ist unter (2) und erhalten

$$\frac{1}{\Phi_0}\,\xi'^{\lambda}_{\lambda}=-\frac{1}{1-\vartheta}\,(\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}+\frac{1}{1-\vartheta}\,(\vartheta-\tfrac{1}{2})\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}\,, \tag{44}$$

bzw. mit der Abkürzung

$$\vartheta=(1-\omega)/(1-2\,\omega) \tag{45}$$

$$(2\,\omega/\Phi_0)\,\xi^{\lambda}_{\lambda}=\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}-\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}\,. \tag{46}$$

Die Feldgleichungen (41) und (46) folgen aus der Lagrange-Funktion

$$L=L(\psi)-(\omega/\Phi_0{}^2)\,\xi_{,\lambda}\,\xi^{,\lambda}+(1/\Phi_0)\,\xi_{,\lambda}(\psi^{\varrho,\lambda}_{\varrho})-\psi^{\lambda,\sigma}_{\sigma}+\Lambda+(8\,\pi/\Phi_0)\,\psi_{\mu\nu}\,T^{\mu\nu}(\chi) \tag{47}$$

mit

$$L(\psi)=\tfrac{1}{4}\,\psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}+\tfrac{1}{2}\,\psi_{\mu\sigma,}{}^{\mu}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\nu}-\tfrac{1}{4}\,\psi^{\mu}_{\mu,\sigma}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\nu}\,. \tag{48}$$

Das Ergebnis ist überraschend angesichts dessen, daß wir das Lagrange-Prinzip bisher nicht benutzt haben, und ist eine Folge der Eichinvarianz von (41) und (46), vor allem aber davon, daß zur Einführung der erweiterten Invarianzgruppe (2), (25) in die Theorie (18), (9) gerade ein Skalarfeld gemäß (40) hergenommen wurde. Das Auftreten des ξ-Feldes zusammen mit der Gruppe (2), (25) war nach den Überlegungen im 1. Kap. in gewissem Sinn zu erwarten, denn mit Hilfe von (2) ist bezüglich des Tensorfeldes „Spineindeutigkeit" erreichbar.

Die Konvention (9) läßt sich durch (42) in die Form

$$(\psi^{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\,\psi^{\lambda}_{\lambda})_{,\beta}=-(1/\Phi_0)\,\xi^{,\alpha} \tag{49}$$

bringen. Wenn man (46) durch ω dividiert und den Grenzwert $\omega\to\infty$ bildet[10], erhält man u. a. die Lösungsmannigfaltigkeit $\xi=\text{const}$. Damit geht (41) in die linearisierte Einsteinsche Theorie über, und (49) wird die Hilbert-Eichung. Andererseits gilt für $\omega\to\infty$ nach (45) $\vartheta=\tfrac{1}{2}$, wie erwartet.

[10] D. BRILL, in: Evidence fo rGravitational Theories, Academic Press, New York 1962.

Die Konsistenz in zweiter Ordnung

Die Einführung der gleichen Invarianzgruppe in Feld- und Bewegungsgleichungen hat natürlich nichts zur Konsistenz beigetragen.

Die Inkonsistenz von (41) und (23) rührt von dem Term zweiter Ordnung $\varepsilon(\chi)\, L_{\mathrm{w}}$ in (23) her. Daher liegt es nahe, zur Erreichung der Konsistenz ein zusätzliches Wechselwirkungsglied von dritter Ordnung $L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)$ in die Lagrange-Funktion einzuführen. Damit erhält man an Stelle von (47)

$$\underset{o(\psi^2)}{L' = L(\psi)} - \underset{o(\psi^2)}{(\omega/\Phi_0^2)\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda}} + \underset{o(\psi^2)}{(1/\Phi_0)\, \xi_{,\lambda}(\psi_{\varrho}^{\varrho,\lambda} - \psi_{\sigma}^{\lambda,\sigma})} + \underset{o(\psi)}{\Lambda} + \underset{o(\psi^2)}{(8\pi/\Phi_0)\, \psi_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi)} + \underset{o(\psi^3)}{L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} \tag{50}$$

und die daraus folgenden Gleichungen

$$\underset{o(\psi)}{-G^{\mu\nu}} + \underset{o(\psi)}{(1/\Phi_0)\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{,\lambda})} + \underset{o(\psi)}{(8\pi/\Phi_0)\, T^{\mu\nu}(\chi)} + \underset{o(\psi^2)}{\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} = 0 \tag{51}$$

bzw.

$$\underset{o(\psi^2)}{\varepsilon(\chi)\, \Lambda} + \underset{o(\psi^2)}{(8\pi/\Phi_0)\, \varepsilon(\chi)\, \psi_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi)} + \underset{o(\psi^3)}{\varepsilon(\chi)\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} = 0\,. \tag{52}$$

Die ξ-Feldgleichung (46) bleibt ungeändert. Wir haben die Ordnungen der Terme mit angegeben, wobei wir gemäß unserer Ordnungsdefinition $o(\psi^n)$ statt $o(\Phi_0^{-n})$ geschrieben haben.

Aus (51) entsteht durch Divergenzbildung

$$(8\pi/\Phi_0)\, T(\chi)^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi) = 0 \tag{53}$$

und daraus wegen (28) und (21)

$$-\tfrac{1}{2}\, \chi^{,\mu}\, \varepsilon(\chi)\, \Lambda + \partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi) = 0\,. \tag{54}$$

Wenn man (52) mit $-\frac{1}{2}\chi^{,\mu}$ multipliziert und mit (54) gleichsetzt, erhält man die Konsistenzbedingung der zweiten Ordnung

$$\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi) = -\tfrac{1}{2}\, \chi^{,\mu}(8\pi/\Phi_0)\, \varepsilon(\chi)\, \psi_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi) + o(\psi^3)\,. \tag{55}$$

Diese Gleichung ist dieselbe wie im Einsteinschen Fall, und wir können das Ergebnis übernehmen, daß das gesuchte $L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)$, unabhängig vom Materiemodell [6], nicht existiert.

Wir wollen deshalb als nächstes außer $L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)$ Terme dritter Ordnung in ψ allein $\hat{L}(\psi)$ und eine Wechselwirkungs-Lagrange-Funktion $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$, ebenfalls dritter Ordnung, zu L in (47) hinzunehmen. In $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ sind z. B. quadratische Glieder in ψ, multipliziert mit $1/\Phi_0$ (und ξ), und in ψ lineare Glieder, multipliziert mit $1/\Phi_0^2$, zugelassen. Die genaue Gestalt aller neueingeführten Lagrange-Funktionen muß natürlich, wenn möglich, aus der Konsistenzbedingung bestimmt werden. Der Vollständigkeit halber müßte man noch $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi)$ hinzufügen; wir wollen aber versuchen, darauf zu verzichten, da bisher keine direkte Kopplung des ξ-Feldes an die Materie aufgetreten ist. Wir setzen also an mit

$$\begin{aligned} \underset{o(\psi^2)}{L^* = L(\psi)} &- \underset{o(\psi^2)}{(\omega/\Phi_0^2)\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda}} + \underset{o(\psi^2)}{(1/\Phi_0)\, \xi_{,\lambda}(\psi_{\varrho}^{\varrho,\lambda} - \psi_{\sigma}^{\lambda,\sigma})} + \underset{o(\psi)}{\Lambda} + \underset{o(\psi^2)}{(8\pi/\Phi_0)\, \psi_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi)} \\ &+ \underset{o(\psi^3)}{L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} + \underset{o(\psi^3)}{\hat{L}(\psi)} + \underset{o(\psi^3)}{L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)} \end{aligned} \tag{50'}$$

und erhalten die Feldgleichungen

$$\underset{o(\psi)}{-G^{\mu\nu}} + \underset{o(\psi^2)}{\hat{G}^{\mu\nu}} + \underset{o(\psi)}{(1/\Phi_0)\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{,\lambda})} + \underset{o(\psi^2)}{\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)} + \underset{o(\psi)}{(8\pi/\Phi_0)\, T^{\mu\nu}(\chi)} + \underset{o(\psi^2)}{\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} = 0 \tag{51'}$$

mit $\hat{G}^{\mu\nu} = \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, \hat{L}(\psi)$. Die Bewegungsgleichung (52) bleibt bestehen. Die Änderung der ξ-Feldgleichung infolge $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ ist von zweiter Ordnung und wird bei den Konsistenzuntersuchungen keine Rolle spielen.

Die Divergenz von (51′) ist

$$\underset{o(\psi^2)}{-\tfrac{1}{2}\, \chi^{,\mu}\, \varepsilon(\chi)\, \Lambda} + \underset{o(\psi^2)}{\hat{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu}} + \underset{o(\psi^2)}{\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)} + \underset{o(\psi^2)}{\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)} = 0\,. \tag{53'}$$

(53') muß der Bewegungsgleichung (52) äquivalent sein. $\hat{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ ist nach Konstruktion aus Termen $\psi \cdot \psi$ aufgebaut, $\partial_\nu \, \varepsilon(\psi_{\mu\nu}) \, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ aus $(1/\Phi_0) \, \psi \, \xi$, $(1/\Phi_0{}^2) \, \xi \cdot \xi, \ldots$. Falls einige dieser Glieder sich auf Grund der ξ-Feldgleichung erster Ordnung (46) heben, wollen wir unter B^μ den aus $\hat{G}^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \partial_\nu \, \varepsilon(\psi_{\mu\nu}) \, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ durch Elimination der sich kompensierenden Glieder entstehenden Ausdruck verstehen. Damit

$$- \tfrac{1}{2} \, \chi^{,\mu} \, \varepsilon(\chi) \, \Lambda + B^\mu + \partial_\nu \;\; \varepsilon(\psi_{\mu\nu}) \, L'_{\mathrm{w}} \; (\psi, \chi) + o(\psi^3) = 0 \tag{53''}$$

äquivalent zu (52) werden kann, dürfen $\psi \cdot \psi$, $(1/\Phi_0) \, \psi \, \xi$ in B^μ nur in der Kombination $\psi \, H$ auftreten, wobei

$$H^{\mu\nu} = - G^{\mu\nu} + (1/\Phi_0) \;\; (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \, \xi^{,\lambda}_{\lambda}) \; . \tag{41}$$

Denn dann nehmen die Terme in B^μ mit Hilfe der Feldgleichungen erster Ordnung die Form $(1/\Phi_0) \; \psi \, \chi \, \chi$ an (s. u.), die auch die Glieder zweiter Ordnung der Bewegungsgleichung haben. Der allgemeinste Ansatz für B^μ ist daher

$$\begin{aligned} B^\mu = \; & m_1 \, \psi^{\mu\varrho,}{}_{\varrho} \, H^\sigma_\sigma + m_2 \, \psi^{\mu\varrho,\sigma} \, H_{\varrho\sigma} + m_3 \, \psi^{\varrho,\mu}_{\varrho} \, H^\sigma_\sigma + m_4 \, \psi^{\varrho\sigma,\mu} \, H_{\varrho\sigma} + m_5 \, \psi^{\mu\varrho} \, H^\sigma_{\sigma,\varrho} + m_6 \, \psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho} \, H^\mu_\sigma \\ & + m_7 \, \psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho} \, H^\mu_\sigma + m_8 \, \psi^\varrho_\varrho \, H^{\sigma,\mu}_\sigma + m_9 \, \psi^{\varrho\sigma} \, H_{\varrho\sigma,}{}^{\mu} + m_{10} \, \psi^{\varrho\sigma} \, H^\mu_{\sigma,\varrho} \, . \end{aligned} \tag{56}$$

Bei dieser Wahl von B^μ wird der symmetrisierte kanonische [11] Energie-Impulstensor des ψ-Feldes $T^{\mu\nu}(\psi)$ entsprechend dem Äquivalenzprinzip berücksichtigt [6].

$\hat{T}^\mu$ sei der Vektor, in den B^μ bei Ersetzung von $H^{\mu\nu}$ durch $-(8\,\pi/\Phi_0) \; T^{\mu\nu}(\chi)$ übergeht. Wegen (51') gilt

$$H^{\mu\nu} = -(8\,\pi/\Phi_0) \; T^{\mu\nu}(\chi) + o(\psi^2), \tag{57}$$

und wir wissen daher, daß B^μ und $\hat{T}^\mu$ in zweiter Ordnung übereinstimmen:

$$B^\mu = \hat{T}^\mu + o(\psi^3) \; . \tag{58}$$

Damit wird (53'')

$$- \tfrac{1}{2} \, \chi^{,\mu} \, \varepsilon(\chi) \, \Lambda + \hat{T}^\mu + \partial_\nu \, \varepsilon(\psi_{\mu\nu}) \, L'_{\mathrm{w}} \, (\psi, \chi) + o(\psi^3) = 0 \, , \tag{53'''}$$

und der Vergleich mit (52) liefert die Konsistenzbedingung

$$\hat{T}^\mu + \partial_\nu \, \varepsilon(\psi_{\mu\nu}) \; L'_{\mathrm{w}} \; (\psi, \chi) = - \; \tfrac{1}{2} \, \chi^{,\mu} (8\,\pi/\Phi_0) \; \varepsilon(\chi) \; \psi_{\mu\nu} \, T^{\mu\nu}(\chi) + o(\psi^3) . \tag{59}$$

(59) stimmt mit der entsprechenden Gleichung in der Einsteinschen Theorie überein, und ihre Lösbarkeit mit dem Ansatz (56) ist demnach gesichert. Man könnte hier fortfahren und, allerdings weniger eindeutig als im Einsteinschen Fall, eine in zweiter Ordnung konsistente Theorie aufbauen; wir wollen das aber nicht tun, weil das bisher benutzte Verfahren, das zu (56) führte, physikalisch zu undurchsichtig ist; insbesondere ist z. B. unklar, ob in (56) der Energie-Impulstensor des ξ-Feldes miterfaßt wurde.

Statt dessen wollen wir in die Eichung (49) zurückgehen, in der die linearen Feldgleichungen die Form (18) annehmen. Das beruht auf der Überlegung, daß für die Konsistenz der Skalar-Tensortheorie in zweiter Ordnung die Konsistenz der durch Eichung reduzierten Theorie notwendig ist und daß, ausgehend von der reinen Tensorfeldtheorie (18), alle erforderlichen Rechnungen viel übersichtlicher sind. Der wichtigste Punkt dabei ist, daß die Bewegungsgleichung zweiter Ordnung (23) der Skalar-Tensortheorie mit der der reduzierten Theorie übereinstimmt und daß, da ja Konsistenz Äquivalenz der Divergenz der Feldgleichungen mit der Bewegungsgleichung bedeutet, die Divergenz der Feldgleichungen in beiden Fällen dieselbe sein muß. Das vereinfacht den Übergang zur eichinvarianten Skalar-Tensortheorie nach Erreichung der Konsistenz.

Bei der Eichung der Feldgleichungen zweiter Ordnung ist zu beachten, daß (49) zunächst nur in linearer Näherung sinnvoll ist. Die Invarianz von (49) gegenüber (2) läßt sich durch die Zusatzbedingung $\Box \, \Lambda_\mu = 0$ erreichen. Es ist keineswegs klar, ob (49) auch in zweiter Näherung zu einer invarianten Gleichung ge-

[11] Der Einfluß der speziellen Wahl des Energie-Impulstensors auf das Verfahren wird am Ende des Kapitels erwähnt.

macht werden kann, denn dazu müßten nun auch die Eichzusätze zweiter Ordnung durch eine geeignete Bedingung an Λ_μ zum Verschwinden gebracht werden können. Sicherheitshalber setzen wir an Stelle von (49)

$$(\psi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\,\psi^\lambda_\lambda)_{,\beta} = -(1/\Phi_0)\,\xi^{,\alpha} + o(\psi^2) \quad (\text{s. Anm. }^{12}). \tag{60}$$

Unabhängig hiervon läßt sich die Gültigkeit der Eichkonvention (9) untersuchen. (9) folgt aus (49) zusammen mit der ξ-Feldgleichung (46). (46) ist nur bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig,

$$(2\,\omega/\Phi_0)\,\xi^{,\lambda}_{\ \ \lambda} = \psi^{\sigma,\lambda}_{\sigma\ \lambda} - \psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma} + o(\psi^2), \tag{61}$$

so daß auch (9) durch

$$\psi^{\mu\nu,}{}_{\nu} = \psi^{\varrho,\mu}_{\varrho} \cdot \vartheta + o(\psi^2) \tag{62}$$

ersetzt werden muß.

Angesichts der unbekannten Terme $o(\psi^2)$ erscheint es aussichtslos, die Eichung der Theorie in zweiter Ordnung durchführen zu können. Den Ausweg bildet die Divergenz (53′) der Feldgleichungen, deren sämtliche Summanden $o(\psi^2)$ sind. Denn wenn wir in Gliedern zweiter Ordnung (49) und (9) statt (60) und (62) verwenden, ist der Fehler $o(\psi^3)$.

Wir wollen uns daher vorstellen, daß die Gl. (53′) in der Eichung (49) vorliegt. Damit (53′) der Bewegungsgleichung (52) äquivalent sein kann, müssen die Summanden in $\hat{G}^{\mu\nu,}{}_{\nu} + \partial_\nu\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L_W(\psi,\xi)$ mit Hilfe der linearen Feldgleichungen die Form $(1/\Phi_0)\,\psi\,\chi\,\chi$ annehmen. In der Eichung (49) haben wir in erster Ordnung nur die ψ-Feldgleichungen (18), woraus wir schließen, daß $\hat{G}^{\mu\nu,}{}_{\nu} + \partial_\nu\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L_W(\psi,\xi)$ durch (49) in einen Vektor D^μ übergehen, der nur aus Ausdrücken $\psi\cdot\psi$ aufgebaut ist. Wir haben es also wieder mit einer reinen Tensorfeldtheorie zu tun.

Bei der Wahl von D^μ wollen wir uns vom Äquivalenzprinzip leiten lassen: Ausgehend von der linearen Tensortheorie (17), (18) erwarten wir, daß der Energie-Impulstensor des ψ-Feldes [mit der Lagrange-Funktion $\tilde{L}(\psi)$] als zusätzlicher Quellterm in der zweiten Ordnung der Theorie berücksichtigt werden muß. Als $T^{\mu\nu}(\psi)$ soll das symmetrische Landau-Lifschitz-Objekt genommen werden. Zu seiner Berechnung müssen wir vorübergehend die pseudo-euklidischen Koordinaten mit der konstanten Metrik $\eta_{\mu\nu}$ verlassen und uns vorstellen, daß wir die Theorie ebensogut in einem Inertialsystem mit z. B. Polarkoordinaten als räumlichen Koordinaten hätten ansetzen können. Wir wären auf diese Weise zwangsläufig zur allgemeinsten Formulierung einer Lorentz-invarianten Feldtheorie gelangt[14], in der alle gewöhnlichen Ableitungen durch „kovariante" ersetzt sind und die Metrik $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (statt $\eta_{\mu\nu}$) die Bedingung $R_{\mu\nu\varrho\sigma} = 0$ erfüllt[15].

$T^{\mu\nu}(\psi)$ läßt sich dann aus der Definition

$$\sqrt{-\tilde{g}}\,T^{\mu\nu}(\psi) = 2\left(\frac{\partial\sqrt{-\tilde{g}}\,\tilde{L}(\psi)}{\partial\tilde{g}_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\,\frac{\partial\sqrt{-\tilde{g}}\,\tilde{L}(\psi)}{\partial\tilde{g}_{\mu\nu,\sigma}}\right) \tag{63}$$

bestimmen[3]. Wenn wir anschließend wieder in pseudo-euklidische Koordinaten zurückgehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(\psi) = {} & \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\sigma,}{}^{\mu}\,\psi^{\varrho\sigma,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\vartheta\,\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\,\psi^{\beta,\nu}_{\beta} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\sigma\tau,\varrho}\,\psi^{\sigma\tau,\varrho} + \tfrac{1}{4}\,\vartheta\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\varrho}\,\psi^{\beta,\varrho}_{\beta} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\varrho\sigma}\,\psi^{\nu,\mu}_{\sigma\ \varrho} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\varrho\sigma}\,\psi^{\mu,\nu}_{\sigma\ \varrho} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\sigma}\,\psi^{\varrho,\mu}_{\sigma\ \varrho} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\sigma}\,\psi^{\varrho,\nu}_{\sigma\ \varrho} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\sigma,\mu}\,\psi^{\varrho}_{\sigma,\varrho} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}\,\psi^{\varrho}_{\sigma,\varrho} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\sigma,}{}_{\varrho}\,\psi^{\varrho,\mu}_{\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\sigma,}{}_{\varrho}\,\psi^{\varrho,\nu}_{\sigma} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\sigma,\varrho}_{\ \ \ \ \varrho}\,\psi^{\nu}_{\sigma} + \vartheta\,\psi^{\alpha,\varrho}_{\alpha\ \varrho}\,\psi^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\sigma,\varrho}_{\ \ \ \ \varrho}\,\psi^{\mu}_{\sigma}\,. \end{aligned} \tag{64}$$

Uns interessiert in der Divergenz der Feldgleichungen

$$\begin{aligned} T(\psi)^{\mu\nu,}{}_{\nu} &= \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\sigma,}{}^{\mu}\,\psi^{\varrho\sigma,\nu}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\vartheta\,\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\,\psi^{\beta,\nu}_{\beta\ \nu} - \psi^{\mu\sigma}\,\psi^{\varrho,\nu}_{\sigma\ \varrho\nu} - \psi^{\mu\sigma,}{}_{\varrho}\,\psi^{\varrho,\nu}_{\sigma\ \nu} + \vartheta\,\psi^{\alpha,\varrho}_{\alpha\ \varrho\nu}\,\psi^{\mu\nu} + \vartheta\,\psi^{\alpha,\varrho}_{\alpha\ \varrho}\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\nu} \\ &= -2\,(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\,\tilde{G}^{\varrho\nu} - 2\,\psi^{\mu}_{\sigma}\,\tilde{G}^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho} \end{aligned} \tag{65}$$

[12] Insbesondere ist fraglich, ob es zulässig ist, beim Einsteinschen Grenzfall in zweiter Ordnung die Hilbert-Eichung $(\psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\,\psi_\lambda{}^\lambda)_{,\beta} = 0$ zu verwenden, wie WESTPFAHL[13] es tut. Besser nimmt man die bis zur zweiten Ordnung entwickelte de Donder-Bedingung.

[13] K. WESTPFAHL, Fortschr. Phys. **15**, 309 [1967].

[14] J. L. ANDERSON, Principles of Relativistic Physics, Academic Press, New York 1967.

[15] Gemeint ist natürlich die allgemein-kovariante Schreibweise im flachen Raum, d. h. mit der (inhomogenen) Lorentz-Gruppe als Invarianzgruppe. Diese Begriffe wollen wir aus methodischen Gründen vermeiden. Wir schreiben $\tilde{g}_{\mu\nu}$ zur Unterscheidung von $g_{\mu\nu}$ in (130).

[im zweiten Schritt wurde (14) eingesetzt]. Wegen (62) gilt an Stelle von (15)

Daraus folgt
$$\tilde{G}^{\mu\nu},_{\nu} = o(\psi^2). \tag{66}$$
$$\psi^{\mu}_{\sigma}\, \tilde{G}^{\varrho\sigma},_{\varrho} = o(\psi^3) \tag{67}$$
und deswegen
$$T(\psi)^{\mu\nu},_{\nu} = -2(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\, \tilde{G}^{\varrho\nu} + o(\psi^3). \tag{68}$$
Diesen Ausdruck nehmen wir als Ansatz für D^{μ} in der aus (53′) durch Eichung entstehenden Gleichung
$$-\tfrac{1}{2}\,\chi^{,\mu}\,\varepsilon(\chi)\,\Lambda + D^{\mu} + \partial_{\nu}\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) + o(\psi^3) = 0, \tag{69}$$
und zwar mit einem Proportionalitätsfaktor d: $\quad D^{\mu} = d\,T(\psi)^{\mu\nu},_{\nu}.$ (70)
[Dies ist ein Ansatz von der Form (56)]. Zusammen mit den linearen Feldgleichungen (18) folgt
$$\hat{T}^{\mu\nu},_{\nu} =_{\mathrm{def}} -d(16\,\pi/\Phi_0)\,(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\,T^{\varrho\nu}(\chi) = D^{\mu} + o(\psi^3) \tag{71}$$
[vgl. (58)]. Damit lautet die Konsistenzbedingung von (69) und der Bewegungsgleichung (52)
$$\hat{T}^{\mu\nu},_{\nu} + \partial_{\nu}\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) = -\tfrac{1}{2}\,\chi^{,\mu}(8\,\pi/\Phi_0)\,\varepsilon(\chi)\,\psi_{\mu\nu}\,T^{\mu\nu}(\chi) + o(\psi^3). \tag{72}$$
Die Gl. (72) stimmt mit der entsprechenden in der Einsteinschen Theorie überein [5, 6]. Wir wissen daher, daß sie lösbar ist und können die Rechnungen übergehen. Bei unserer Wahl der Kopplungskonstante $8\,\pi/\Phi_0$ müssen
$$\begin{aligned} L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) = (8\,\pi/\Phi_0)\,(&\tfrac{1}{2}\,m^2\,\chi^2\,\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\,m^2\,\chi^2\,\psi^{\mu}_{\mu}\,\psi^{\nu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\chi_{,\mu}\,\chi^{,\mu}\,\psi_{\nu\sigma}\,\psi^{\nu\sigma} \\ &+ \tfrac{1}{4}\,\chi_{,\mu}\,\chi^{,\mu}\,\psi^{\nu}_{\nu}\,\psi^{\sigma}_{\sigma} - \chi^{,\nu}\,\psi_{\nu\sigma}\,\chi^{,\sigma}\,\psi^{\mu}_{\mu} + 2\,\chi^{,\mu}\,\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\nu\sigma}\,\chi_{,\sigma}) \end{aligned} \tag{73}$$
und $d = \frac{1}{2}$ gesetzt werden. Diese Gemeinsamkeit der (durch Eichung) reduzierten Skalar-Tensortheorie und der Einsteinschen liegt einerseits daran, daß die Bewegungsgleichung, mit der die Feldgleichungen verträglich sein sollen, in beiden Fällen dieselbe ist, andererseits daran, daß wir mit der unmittelbaren Einführung des „gravitierenden" Landau-Lifschitz-Tensors offenbar formal das gleiche getan haben, was bisher im Einsteinschen Fall auf anderen Wegen erreicht worden ist. Man hätte auch von dem nach der BELINFANTE-Methode [16] symmetrisierten kanonischen Energie-Impulstensor zur Lagrange-Funktion $\tilde{L}(\psi)$ ausgehen können. Dieser Tensor läßt sich zwar berechnen, ohne vorübergehend die Minkowski-Metrik aufzugeben, führt aber nur auf einem Umweg zur Konsistenz (in der Bezeichnungsweise von Barbour: $a' = b' = c' = 0$, aber $d' \neq 0$). Da die Einstein-Theorie in allen Rechnungen für $\vartheta = \frac{1}{2}$ enthalten ist, gelten diese Ergebnisse insbesondere auch dort.

Die Feldgleichungen zweiter Ordnung

Die Einführung von $T(\psi)^{\mu\nu},_{\nu}$ zur Erreichung der Konsistenz kann solange nur als Ansatz gelten, wie nicht nachgewiesen ist, daß der Ausdruck aus einer Lagrange-Funktion abgeleitet werden kann. Wir wollen diese Frage an Hand der eichinvarianten Skalar-Tensortheorie untersuchen, da dann die gefundenen Ergebnisse insbesondere für die reduzierte Theorie gelten.

Als Ausgangspunkt dient die zur Konsistenz führende Divergenz der Feldgleichungen (69), die mit (70) und $d = \frac{1}{2}$ übergeht in
$$(8\,\pi/\Phi_0)\,T(\chi)^{\mu\nu},_{\nu} + \tfrac{1}{2}\,T(\psi)^{\mu\nu},_{\nu} + \partial_{\nu}\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) + o(\psi^3) = 0, \tag{74}$$
oder mit (68)
$$(8\,\pi/\Phi_0)\,T(\chi)^{\mu\nu},_{\nu} - (\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\,\tilde{G}^{\varrho\nu} + \partial_{\nu}\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) + o(\psi^3) = 0. \tag{75}$$
Da die richtige Eichkonvention (60), die die Behandlung auch linearer Terme erlaubt, nicht bekannt ist, muß man schon an dieser Stelle in die eichinvariante Theorie zurückgehen. Wir fragen also nach einer Gleichung, die die Form einer Divergenz hat und mit (49) in (75) übergeht. Die einfachste Möglichkeit ist, $-\tilde{G}^{\mu\nu}$ durch $H^{\mu\nu}$ [vgl. (41)] zu ersetzen:
$$(8\,\pi/\Phi_0)\,T(\chi)^{\mu\nu},_{\nu} + (\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\,H^{\varrho\nu} + \partial_{\nu}\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,L'_{\mathrm{W}}(\psi,\chi) + o(\psi^3) = 0. \tag{76}$$

[16] F. J. BELINFANTE, Physica 6, 887 [1939].

Wir wissen wegen der Äquivalenz zur eichinvarianten Bewegungsgleichung, daß

$$(8\pi/\Phi_0)\, T(\chi)^{\mu\nu},_\nu + \hat{T}^{\mu\nu},_\nu + \partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{W}}\,(\psi,\chi) + o(\psi^3) = 0 \tag{77}$$

gegenüber der erweiterten Gruppe (2), (25) in der entsprechenden Ordnung invariant ist. Daraus folgt, daß auch (76) diese Eigenschaft hat. Damit ist gezeigt, daß zwei der Forderungen, die man an (76) stellen muß, erfüllt sind, nämlich die Reduktion auf (75) mit (49) und Eichinvarianz. Die dritte geforderte Eigenschaft, daß (76) Divergenz von Feldgleichungen ist, die aus einer Lagrange-Funktion folgen, wird noch nachgewiesen.

Aus Gründen der Allgemeinheit muß man in (76) zusätzlich zu $(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \frac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu},^{\mu})\, H^{\varrho\nu}$ Ausdrücke der Form $\big((2\,\omega/\Phi_0)\,\xi,^{\lambda}_{\lambda} - \psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\ \sigma} + \psi^{\varrho\sigma},_{\varrho\sigma}\big)\, E^{\mu}$, die wegen der ξ-Feldgleichungen (46) verschwinden, und

$$[(\psi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\,\psi^{\lambda}_{\lambda}),_{\beta} + (1/\Phi_0)\,\xi,^{\alpha}]\, F^{\mu}_{\alpha},$$

die bei Eichung durch (49) $=0$ werden, sowie Ausdrücke, die durch Kombination von (46) und (49) zum Verschwinden gebracht werden, zulassen; dabei sollen E^{μ} und F^{μ}_{α} Tensoren erster Ordnung sein. Da (76) bereits die drei genannten Forderungen erfüllt, müssen die Zusatzglieder allein es ebenfalls tun. Man kann auf diese Weise versuchen, die Zusatzglieder auszuschließen und Aussagen über die Eindeutigkeit des Verfahrens zu gewinnen. Wegen der Kompliziertheit dieser Methode wollen wir vorläufig nur den „Existenzbeweis" von (76) führen.

(76) muß in zweiter Ordnung mit (53′) übereinstimmen. Das zwingt uns zu setzen

$$\hat{G}^{\mu\nu},_\nu = -\,(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu},^{\mu})\, G^{\varrho\nu}, \tag{78}$$

$$\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{W}}(\psi,\xi) = (1/\Phi_0)\,(\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\nu},^{\mu})\,(\xi,^{\varrho\nu} - \eta^{\varrho\nu}\,\xi,^{\lambda}_{\lambda}). \tag{79}$$

Gleichung (78) für $\hat{G}^{\mu\nu},_\nu$ ist genau dieselbe wie im Einsteinschen Fall, und es ist von dorther bekannt, daß damit $\hat{G}^{\mu\nu}$ und $\hat{L}(\psi)$ (bis auf Divergenzen) eindeutig bestimmt sind[6]. Wir geben $\hat{G}^{\mu\nu}$ für spätere Rechnungen an:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{\mu\nu} = &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\alpha}_{\varrho\ \alpha}\,\psi^{\nu\varrho} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu}_{\varrho,\alpha}\,\psi^{\nu\varrho,\alpha} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu}_{\varrho}\,\psi^{\nu\varrho,\alpha}_{\ \ \ \ \alpha} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\alpha\beta}\,\psi^{\mu\nu},_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\psi^{\lambda\nu,\mu}\,\psi_{\lambda\alpha},^{\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\psi^{\lambda\nu,\mu}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\lambda} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\lambda\nu}\,\psi_{\lambda\alpha},^{\alpha\mu}\\ &+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\alpha\beta}\,\psi^{\nu,\mu}_{\alpha\ \beta} - \tfrac{1}{2}\psi^{\alpha\beta}\,\psi_{\alpha\beta},^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\tau}\,\psi^{\nu\ \alpha}_{\alpha,\tau} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\tau}\,\psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\ \tau} + \tfrac{1}{2}\psi^{\lambda\mu,\nu}\,\psi_{\lambda\alpha},^{\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\psi^{\lambda\mu,\nu}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\lambda}\\ &+\tfrac{1}{2}\psi^{\lambda\mu}\,\psi_{\lambda\alpha},^{\alpha\nu} - \tfrac{1}{4}\,\psi^{\alpha\beta,\nu}\,\psi_{\alpha\beta},^{\mu} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\alpha\beta}\,\psi^{\mu,\nu}_{\alpha\ \beta} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\tau}\,\psi^{\mu,\alpha}_{\alpha\ \tau} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu\tau}\,\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha\ \tau} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\nu},_{\tau}\,\psi^{\tau,\alpha}_{\alpha} + \tfrac{1}{4}\,\psi^{\mu\nu},_{\tau}\,\psi^{\alpha,\tau}_{\alpha}\\ &+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\beta\mu,\alpha}\,\psi^{\nu}_{\alpha,\beta} + \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma,\alpha}_{\varrho\ \alpha}\,\psi^{\varrho}_{\sigma} + \tfrac{3}{8}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma}_{\varrho,\alpha}\,\psi^{\varrho,\alpha}_{\sigma} + \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\alpha\beta}\,\psi^{\sigma}_{\sigma,\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\lambda,\sigma}_{\sigma}\,\psi_{\alpha},^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\lambda,\sigma}_{\sigma}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\lambda}\\ &-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\lambda}_{\sigma}\,\psi_{\lambda\alpha},^{\alpha\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\alpha\beta}\,\psi^{\ \ \ \sigma}_{,\alpha\sigma,\beta} - \tfrac{1}{8}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\ \sigma}_{\sigma\tau}\,\psi^{\alpha,\tau}_{\alpha} - \tfrac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\beta\sigma,\alpha}\,\psi_{\alpha\sigma,\beta} + \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma,\alpha}_{\sigma\ \alpha} - \tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu\nu}\,\psi_{\alpha\sigma},^{\alpha\sigma}\\ &-\tfrac{1}{4}\,\psi^{\tau}_{\tau}\,(-\psi^{\mu\nu,\alpha}_{\ \ \ \ \ \alpha} - \psi^{\alpha,\mu\nu}_{\alpha} + \psi^{\nu,\alpha\mu}_{\alpha} + \psi^{\mu,\alpha\nu}_{\alpha} + \eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma,\alpha}_{\sigma\ \alpha} - \eta^{\mu\nu}\,\psi_{\alpha\sigma},^{\alpha\sigma}).\end{aligned} \tag{80}$$

Es bleibt die Aufgabe, $L_{\mathrm{W}}(\psi,\xi)$ zu finden. Wenn wir uns auf höchstens zweite Ableitungen in den Feldgleichungen beschränken, kommen für $L_{\mathrm{W}}(\psi,\xi)$ wegen (79) nur Skalare in Frage, die quadratisch in ψ oder seinen ersten Ableitungen und linear in ξ (oder $\xi,^{\tau}$) sind; es gibt also die drei Typen

$$\psi^{\mu}_{\mu}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\tau}\,\xi,^{\tau},\quad \psi^{\mu}_{\mu,\sigma}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\nu}\,\xi \quad\text{und}\quad \psi^{\mu}_{\mu}\,\psi^{\nu}_{\nu}\,\xi.$$

Die letzte Klasse kann man ausschließen, da sie überhaupt keine Terme, wie sie in (79) gesucht sind, liefert. Der allgemeinste Ansatz, den man aus Skalaren vom ersten Typ bilden kann, ist

$$L^{1}_{\mathrm{W}}\,(\psi,\xi) = \sum_{i=1}^{6} e_i\, E_i \tag{81}$$

mit konstanten e_i und

$$\begin{aligned} &E_1 = \psi^{\mu}_{\mu}\,\psi^{\alpha}_{\alpha,\tau}\,\xi,^{\tau}, && E_2 = \psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\nu},_{\tau}\,\xi,^{\tau}, && E_3 = \psi^{\alpha}_{\alpha}\,\psi_{\mu\tau},^{\mu}\,\xi,^{\tau},\\ &E_4 = \psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu,\nu}_{\tau}\,\xi,^{\tau}, && E_5 = \psi_{\mu\tau}\,\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\,\xi,^{\tau}, && E_6 = \psi_{\mu\tau}\,\psi^{\mu,\alpha}_{\alpha}\,\xi,^{\tau}. \end{aligned} \tag{82}$$

Die möglichen Kombinationen des zweiten Typs sind

$$E_7 = \psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}\,\xi,\quad E_8 = \psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}\,\xi,\quad E_9 = \psi^{\mu}_{\mu,\sigma}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\nu}\,\xi,\quad E_{10} = \psi^{\mu}_{\mu,\sigma}\,\psi^{\nu\sigma},_{\nu}\,\xi,\quad E_{11} = \psi^{\mu\sigma},_{\mu}\,\psi^{\nu}_{\sigma,\nu}\,\xi. \tag{83}$$

Die E_k $(k=1,\ldots,11)$ sind jedoch nicht Lagrange-unabhängig: Man kann ein E_k bis auf eine Divergenz als Linearkombination der übrigen darstellen; z. B. ist E_{11}

$$\begin{aligned} E_{11} &= \psi_{\mu\nu,\sigma}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}\,\xi - \xi\,\partial_\sigma(\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\nu} - \psi^\sigma_\mu\,\psi^{\mu\nu,}{}_\nu) = E_8 + \xi_{,\sigma}(\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\nu} - \psi^\sigma_\mu\,\psi^{\mu\nu,}{}_\nu) - \partial_\sigma[\xi(\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\nu} - \psi^\sigma_\mu\,\psi^{\mu\nu,}{}_\nu)] \\ &= E_8 + E_4 - E_6 - \partial_\sigma[\xi(\psi_{\mu\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\nu} - \psi^\sigma_\mu\,\psi^{\mu\nu,}{}_\nu)]\,. \end{aligned} \tag{84}$$

Wir lassen deswegen E_{11} in $L^2_{\mathrm{w}}(\psi,\xi)$ weg:

$$L^2_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi) = \sum_{i=7}^{10} e_i\,E_i\,. \tag{85}$$

Für die spätere Verwendung in den Feldgleichungen geben wir die Eulerschen Ableitungen von $L^1_{\mathrm{w}}(\psi,\xi) + L^2_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi)$ an,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,[L^1_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi) + L^2_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi)] = &-e_1\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^\lambda_\lambda\,\xi^{,\sigma}_{\ \sigma} - e_2\,\psi^{\mu\nu}\,\xi^{,\sigma}_{\ \sigma} + (e_3 - e_5 - e_{10})\,\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\tau,}{}^{\varrho}\,\xi^{,\tau} \\ &+ \tfrac12\,(e_5 - e_3 - e_{10})\,\psi^{\alpha,\mu}_\alpha\,\xi^{,\nu} + \tfrac12\,(e_5 - e_3 - e_{10})\,\psi^{\alpha,\nu}_\alpha\,\xi^{,\mu} - e_3\,\psi^\alpha_\alpha\,\xi^{,\mu\nu} + \tfrac12\,(e_4 - e_6 - 2\,e_8)\,\psi^{\mu,\nu}_\tau\,\xi^{,\tau} \\ &+ \tfrac12(e_4 - e_6 - 2\,e_8)\,\psi^{\nu,\mu}_\tau\,\xi^{,\tau} + \tfrac12\,(e_6 - e_4)\,\psi^{\mu\sigma,}{}_\sigma\,\xi^{,\nu} + \tfrac12\,(e_6 - e_4)\,\psi^{\nu\sigma,}{}_\sigma\,\xi^{,\mu} - \tfrac12\,(e_4 + e_6)\,\psi^{\mu\sigma}\,\xi^{,\nu}_{\ \sigma} \\ &- \tfrac12\,(e_4 + e_6)\,\psi^{\nu\sigma}\,\xi^{,\mu}_{\ \sigma} - e_5\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma\tau}\,\xi_{,\sigma\tau} - 2\,e_7\,\psi^{\mu\nu,\sigma}_{\quad\ \sigma}\,\xi - 2\,e_7\,\psi^{\mu\nu,\sigma}\,\xi_{,\sigma} \\ &- e_8\,\psi^{\mu\sigma,\nu}_{\quad\ \sigma}\,\xi - e_8\,\psi^{\nu\sigma,\mu}_{\quad\ \sigma}\,\xi - 2\,e_9\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\ \sigma}\,\xi - 2\,e_9\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_\varrho\,\xi_{,\sigma} - e_{10}\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}\,\xi - e_{10}\,\psi^{\varrho,\mu\nu}_\varrho\,\xi\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Zunächst aber brauchen wir deren Divergenz:

$$\begin{aligned} \partial_\nu\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,[L^1_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi) + L^2_{\mathrm{w}}\,(\psi,\xi)] = &-(e_1 + e_3)\,\psi^\lambda_\lambda\,\xi^{,\sigma\mu}_{\ \sigma} + (e_3 - e_4 - e_5 - e_{10})\,\psi_{\varrho\tau,}{}^{\varrho}\,\xi^{,\tau\mu} \\ &+ \tfrac12\,(-e_3 + e_5 - 4\,e_9 - 3\,e_{10})\,\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha\ \nu}\,\xi^{,\nu} + \tfrac12\,(-2\,e_1 - e_3 + e_5 - e_{10})\,\psi^{\alpha,\mu}_\alpha\,\xi^{,\nu}_{\ \nu} \\ &+ \tfrac12(-e_3 + e_5 - 4\,e_9 - e_{10})\,\psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\ \nu}\,\xi^{,\mu} + \tfrac12\,(-3\,e_3 + e_5 - 4\,e_9 - e_{10})\,\psi^{\alpha,\nu}_\alpha\,\xi^{,\mu}_{\ \nu} \\ &+ \tfrac12\,(e_4 - e_6 - 4\,e_7 - 2\,e_8)\,\psi^{\mu,\alpha}_{\tau\ \nu}\,\xi^{,\tau} + (-e_6 - 2\,e_7 - e_8)\,\psi^{\mu,\nu}_\tau\,\xi^{,\tau}_{\ \nu} \\ &+ \tfrac12\,(2\,e_3 + e_4 - 2\,e_5 - e_6 - 4\,e_8 - 2\,e_{10})\,\psi^{\nu,\mu}_{\tau\ \nu}\,\xi^{,\tau} + \tfrac12\,(e_4 - 2\,e_5 - e_6 - 2\,e_8)\,\psi^{\nu,\mu}_\tau\,\xi^{\tau}_{\nu} \\ &+ \tfrac12\,(-e_4 + e_6 - 4\,e_7 - 2\,e_8)\,\psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma\nu}\,\xi^{,\nu} + \tfrac12\,(-2\,e_2 - e_4 + e_6)\,\psi^{\mu\sigma,}{}_\sigma\,\xi^{,\nu}_{\ \nu} \\ &+ \tfrac12\,(-e_4 + e_6 - 2\,e_{10})\,\psi^{\nu\sigma,}{}_{\nu\sigma}\,\xi^{,\mu} - \tfrac12(2\,e_2 + e_4 + e_6)\,\psi^{\mu\sigma}\,\xi^{,\nu}_{\ \sigma\nu} - \tfrac12\,(e_4 + 2\,e_5 + e_6)\,\psi^{\nu\sigma}\,\xi^{,\mu}_{\ \sigma\nu} \\ &-(2\,e_7 + e_8)\,\psi^\sigma_{\sigma\nu}\,\xi - (e_8 + e_{10})\,\psi^{\nu\sigma,\mu}_{\quad\ \sigma\nu}\,\xi - (2\,e_9 + e_{10})\,\psi^{\varrho,\sigma\mu}_{\varrho\ \sigma}\,\xi\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Wir wollen versuchen, durch Vergleich mit (79) die Konstanten e_i zu bestimmen. Gleichsetzen der Koeffizienten der vier Terme, die in (79) auftreten, ergibt

$$\begin{aligned} -e_6 - 2\,e_7 - e_8 &= (1/\Phi_0)\,, & e_4 - 2\,e_5 - e_6 - 2\,e_8 &= -(1/\Phi_0)\,, \\ -2\,e_1 - e_3 + e_5 - e_{10} &= (1/\Phi_0)\,, & -2\,e_2 - e_4 + e_6 &= -(2/\Phi_0)\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Alle übrigen Klammern in (87) sollten $=0$ sein. Auf jeden Fall wollen wir das Verschwinden der sechs Terme mit dritten Ableitungen fordern, da $\partial_\nu\,\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\,[L^1_{\mathrm{w}}(\psi,\xi) + (L^2_{\mathrm{w}}(\psi,\xi)]$ Bestandteil einer physikalischen, nämlich zur Bewegungsgleichung äquivalenten, Gleichung ist. Diese Forderung liefert die sechs Bedingungen

$$e_1 + e_3 = 0\,,\ 2\,e_2 + e_4 + e_6 = 0\,,\ e_4 + 2\,e_5 + e_6 = 0\,,\ 2\,e_7 + e_8 = 0\,,\ e_8 + e_{10} = 0\,,\ 2\,e_9 + e_{10} = 0\,. \tag{89}$$

Die Lösung der zehn Gleichungen (88), (89) enthält noch eine freie Konstante, da nur neun von ihnen unabhängig sind:

$$\begin{aligned} &e_2 = -e_1 + (1/2\,\Phi_0)\,,\quad e_3 = -e_1\,,\quad e_4 = 2\,e_1\,,\quad e_5 = -e_1 + (1/2\,\Phi_0)\,, \qquad\qquad (90) \\ &e_6 = -(1/\Phi_0)\quad e_7 = -e_1 - (1/4\,\Phi_0)\,,\quad e_8 = 2\,e_1 + (1/2\,\Phi_0)\,,\quad e_9 = e_1 + (1/4\,\Phi_0)\,,\quad e_{10} = -2\,e_1 - (1/2\,\Phi_0)\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der bis jetzt nicht berücksichtigten Terme in (87) lassen sich jedoch für keine Wahl von e_1 gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Das bedeutet, daß es keine Lagrange-Funktion $L_{\mathrm{w}}(\psi,\xi)$ gibt, die genau (79) erfüllt. Die bisher getroffenen Annahmen sind also zu eng gefaßt. Da wir die mit der Bewegungsgleichung verträgliche Divergenz der Feldgleichungen in der Form (76) behalten wollen, bleibt nur die Möglichkeit, den Ansatz (50′) für L^* zu erweitern. Statt mit einem allgemeineren Ansatz von vorn anzufangen – was rechnerisch kaum durchführbar ist –, wollen wir die nötigen Erweiterungen konstruktiv aus der Forderung gewinnen, die bisherigen Widersprüche zu beseitigen.

Der einzige Ausweg aus der genannten Schwierigkeit – daß $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ die Terme in (79) nur in Verbindung mit anderen liefert, die die Konsistenz zerstören –, besteht darin, weitere Wechselwirkungsglieder hinzuzufügen, die infolge der Feldgleichungen erster Ordnung die störenden Glieder gerade kompensieren. Um festzustellen, ob das möglich ist, wird (90) in (87) eingesetzt. Man erhält [mit $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi) = L_{\mathrm{w}}^1(\psi, \xi) + L_{\mathrm{w}}^2(\psi, \xi)$]

$$\begin{aligned}\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi) = {} & \tfrac{1}{2}\left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) \psi^{\alpha,\mu}_{\alpha\,\nu}\, \xi^{,\nu} + (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\, \xi^{,\nu}_{\nu} - e_1\, \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\,\nu}\, \xi^{,\mu} \\ & + \tfrac{1}{2}\left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) \psi^{\mu,\nu}_{\tau\,\nu}\, \xi^{,\tau} + (1/\Phi_0)\, \psi^{\mu,\nu}_{\tau}\, \xi^{,\tau}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) \psi^{\nu,\mu}_{\tau\,\nu}\, \xi^{,\tau} \\ & - (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\nu,\mu}_{\tau}\, \xi^{,\tau}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) \psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma\nu}\, \xi^{,\nu} - (1/\Phi_0)\, \psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\nu}_{\nu} + e_1\, \psi^{\nu\sigma,}{}_{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu} \\ = {} & \left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) G^{\mu\nu}\, \xi_{,\nu} + (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\, \xi^{,\nu}_{\nu} + (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\,\nu}\, \xi^{,\mu} \\ & + (1/\Phi_0)\, \psi^{\mu,\nu}_{\tau}\, \xi^{,\tau}_{\nu} - (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\nu,\mu}_{\tau}\, \xi^{,\tau}_{\nu} - (1/\Phi_0)\, \psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\nu}_{\nu} - (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\nu\sigma,}{}_{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu}\end{aligned} \tag{91}$$

[im letzten Schritt wurde die Definition (33) von $G^{\mu\nu}$ verwendet]. Die unerwünschten Terme in (91) sind

$$\left(2\, e_1 + (1/\Phi_0)\right) G^{\mu\nu}\, \xi_{,\nu} + (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\,\nu}\, \xi^{,\mu} - (1/2\, \Phi_0)\, \psi^{\nu\sigma,}{}_{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu}\,. \tag{92}$$

Der erste Summand läßt sich offenbar mit Hilfe der Feldgleichungen (41) umschreiben, die beiden anderen enthalten nach Zusammenfassung gerade die rechte Seite der ξ-Feldgleichung (46). Daher gilt

$$\begin{aligned}&\left(2\, e_1 + \frac{1}{\Phi_0}\right) G^{\mu\nu}\, \xi_{,\nu} + \frac{1}{2\, \Phi_0}\, \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha\,\nu}\, \xi^{,\mu} - \frac{1}{2\, \Phi_0}\, \psi^{\nu\sigma,}{}_{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu} \\ &\quad = \frac{2\, \Phi_0\, e_1 + 1}{{\Phi_0}^2}\, 8\, \pi\, \xi_{,\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi) + \frac{2\, \Phi_0\, e_1 + 1}{{\Phi_0}^2}\, \xi_{,\nu}\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\lambda}) + \frac{\omega}{{\Phi_0}^2}\, \xi^{,\mu}\, \xi^{,\alpha}_{\alpha} + o(\psi^3)\,.\end{aligned} \tag{93}$$

Um diese Glieder zu kompensieren, muß man (50′) erweitern zu

$$\begin{aligned}L^{**} = {} & \underset{o(\psi^2)}{L(\psi)} - \underset{o(\psi^2)}{\frac{\omega}{{\Phi_0}^2}\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda}} + \underset{o(\psi^2)}{\frac{1}{\Phi_0}\, \xi_{,\lambda} (\psi^{\varrho,\lambda}_{\varrho} - \psi^{\lambda,\sigma}_{\sigma})} + \underset{o(\psi)}{\Lambda} + \underset{o(\psi^2)}{\frac{8\, \pi}{\Phi_0}\, \psi_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi)} \\ & + \underset{o(\psi^3)}{L_{\mathrm{w}}'(\psi, \chi)} + \underset{o(\psi^3)}{\hat{L}(\psi)} + \underset{o(\psi^3)}{L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)} + \underset{o(\psi^3)}{L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi)} + \underset{o(\psi^3)}{L_{\mathrm{w}}^3(\psi, \xi)}\,,\end{aligned} \tag{94}$$

wobei die beiden hinzugekommenen Wechselwirkungs-Lagrange-Funktionen die Beziehungen

$$\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi) = - \frac{2\, \Phi_0\, e_1 + 1}{{\Phi_0}^2}\, 8\, \pi\, \xi_{,\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi)\,, \tag{95}$$

$$\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}^3(\psi, \xi) = - \frac{2\, \Phi_0\, e_1 + 1}{{\Phi_0}^2}\, \xi_{,\nu} (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\lambda}) - \frac{\omega}{{\Phi_0}^2}\, \xi^{,\mu}\, \xi^{,\alpha}_{\alpha} \tag{96}$$

[bis auf $o(\psi^3)$] erfüllen müssen. Unter der Voraussetzung, daß $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi)$ und $L_{\mathrm{w}}^3(\psi, \xi)$ existieren, beschreibt L^{**}, unabhängig von e_1 [17], eine in zweiter Ordnung konsistente Erweiterung der Skalar-Tensortheorie (47). Denn nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned}0 = \partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L^{**} = {} & (8\, \pi/\Phi_0)\, T(\chi)^{\mu\nu,}{}_{\nu} + \hat{G}^{\mu\nu,}{}_{\nu} \\ & + (1/\Phi_0)\, (\psi^{\mu}_{\varrho,\nu} - \tfrac{1}{2}\, \psi_{\varrho\nu,}{}^{\mu})\, (\xi^{,\varrho\nu} - \eta^{\varrho\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\lambda}) + \partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}'(\psi, \chi) + o(\psi^3)\end{aligned} \tag{97}$$

äquivalent zur Bewegungsgleichung (52), die sich beim Übergang zu L^{**} in zweiter Ordnung nicht geändert hat.

Zur Untersuchung von (95) überlegen wir uns zunächst $\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi)$. Man findet sofort die Lösung

$$\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi) = - \frac{2\, \Phi_0\, e_1 + 1}{{\Phi_0}^2}\, 8\, \pi\, \xi\, T^{\mu\nu}(\chi)\,. \tag{98}$$

[17] e_1 kann erst im nächsten Kapitel mit Hilfe von Invarianzforderungen festgelegt werden.

Denn daraus folgt wegen $T(\chi)^{\mu\nu,}{}_{\nu} = o(\psi)$,

$$\partial_\nu\, \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi) = -\frac{2\,\Phi_0\, e_1 + 1}{\Phi_0^{\,2}}\, 8\,\pi\, \xi_{,\nu}\, T^{\mu\nu}(\chi) + o(\psi^3)\,.$$

Ähnlich einfach läßt sich $\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L^3_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ hinschreiben, da im ersten Summanden von (96) $(\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\ \lambda})$ divergenzfrei ist und der zweite Summand $2\, \xi^{,\mu}\, \xi^{,\alpha}_{\ \alpha}$ enthält, d. i. die Divergenz des (kanonischen) Energie-Impulstensor des ξ-Feldes.

Man erhält

$$\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L^3_{\mathrm{w}}\,(\psi, \xi) = -\frac{2\,\Phi_0\, e_1 + 1}{\Phi_0^{\,2}}\, \xi\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\ \lambda}) - (\omega/\Phi_0^{\,2})\, (\xi^{,\mu}\, \xi^{,\nu} - \tfrac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu}\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda})\,. \tag{99}$$

Weil in den rechten Seiten von (98), (99) das Tensorfeld nicht auftritt, ist die Existenz der Lagrange-Funktionen $L_{\mathrm{w}}(\psi, \xi, \chi)$ und $L^3_{\mathrm{w}}(\psi, \xi)$ evident (Multiplikation mit $\psi_{\mu\nu}$ und Verjüngung über μ und ν).

Die bisher gestellten Forderungen – Konsistenz, Existenz einer Lagrange-Funktion – haben aber nicht ausgereicht, die Konstante e_1 in L^{**} festzulegen. Wir müssen daher noch die Feldgleichungen zweiter Ordnung und ihre Invarianzeigenschaften untersuchen. Wenn man (86) mit (90) ausrechnet und zusammen mit (98), (99) in $\varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L^{**} = 0$ einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
&- G^{\mu\nu} + \hat{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{\Phi_0}\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\ \lambda}) - e_1\, \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\lambda}_{\lambda}\, \xi^{,\sigma}_{\ \sigma} + \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\nu}\, \xi^{,\sigma}_{\ \sigma} + 2\, e_1\, \eta^{\mu\nu}\, \psi_{\varrho\tau,}{}^{\varrho}\, \xi^{,\tau} \\
&+ \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\, \xi^{,\nu} + \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha}\, \xi^{,\mu} + e_1\, \psi^{\alpha}_{\alpha} \xi^{,\mu\nu} - e_1\, \psi^{\mu,\nu}_{\tau}\, \xi^{,\tau} - e_1\, \psi^{\nu,\mu}_{\tau}\, \xi^{,\tau} \\
&- \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\nu} - \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\nu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\mu} - \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\sigma,}\, \xi^{,\nu}_{\ \sigma} - \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu}_{\ \sigma} \\
&+ \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\sigma\tau}\, \xi_{,\sigma\tau} + \left(2\, e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\nu,\sigma}\, \xi_{,\sigma} - \left(2\, e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho}\, \xi_{,\sigma} \\
&+ 2\left(2\, e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \xi\, G^{\mu\nu} + \frac{8\,\pi}{\Phi_0}\, T(\chi)^{\mu\nu} + \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}\,(\psi, \chi) - \frac{2\,\Phi_0\, e_1 + 1}{\Phi_0^{\,2}}\, 8\,\pi\, \xi\, T^{\mu\nu}(\chi) \\
&- \frac{2\,\Phi_0\, e_1 + 1}{\Phi_0^{\,2}}\, \xi\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\chi}_{\ \lambda}) - \frac{\omega}{\Phi_0^{\,2}}\, (\xi^{,\mu}\, \xi^{,\nu} - \tfrac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu}\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda}) = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

mit $L'_{\mathrm{w}}(\psi, \chi)$ asu (73). Nach Zusammenfassen einiger Glieder mit Hilfe von (41) haben wir schließlich

$$\begin{aligned}
&- G^{\mu\nu} + \hat{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{\Phi_0}\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\ \lambda}) - e_1\, \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\lambda}_{\lambda}\, \xi^{,\sigma}_{\ \sigma} + \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\nu}\, \xi^{,\sigma}_{\ \sigma} + 2\, e_1\, \eta^{\mu\nu}\, \psi_{\varrho\tau,}{}^{\varrho}\, \xi^{,\tau} \\
&+ \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\, \xi^{,\nu} + \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\alpha,\nu}_{\alpha}\, \xi^{,\mu} + e_1\, \psi^{\alpha}_{\alpha}\, \xi^{,\mu\nu} - e_1\, \psi^{\mu,\nu}_{\tau}\, \xi^{,\tau} - e_1\, \psi^{\nu,\mu}_{\tau}\, \xi^{,\tau} \\
&- \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\nu} - \left(e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\nu\sigma,}{}_{\sigma}\, \xi^{,\mu} - \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\sigma}\, \xi^{,\nu}_{\ \sigma} \\
&- \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\nu\sigma}\, \xi^{,\mu}_{\ \sigma} + \left(e_1 - \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\sigma\tau}\, \xi_{,\sigma\tau} + \left(2\, e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \psi^{\mu\nu,\sigma}\, \xi_{,\sigma} \\
&- \left(2\, e_1 + \frac{1}{2\,\Phi_0}\right) \eta^{\mu\nu}\, \psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho}\, \xi_{,\sigma} + \frac{2\, e_1}{\Phi_0}\, 8\,\pi\, \xi\, T^{\mu\nu}(\chi) + \frac{2\, e_1}{\Phi_0}\, \xi\, (\xi^{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\, \xi^{,\lambda}_{\ \lambda}) + \frac{8\,\pi}{\Phi_0}\, T^{\mu\nu}(\chi) \\
&+ \varepsilon(\psi_{\mu\nu})\, L'_{\mathrm{w}}\,(\psi, \chi) - \frac{\omega}{\Phi_0^{\,2}}\, (\xi^{,\mu}\, \xi^{,\nu} - \tfrac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu}\, \xi_{,\lambda}\, \xi^{,\lambda}) + o(\psi^3) = 0
\end{aligned} \tag{101}$$

als Feldgleichungen zweiter Ordnung.

Eichinvarianz in zweiter Ordnung und die exakte Theorie

Ausgangspunkt unserer Behandlung der Skalar-Tensortheorie waren die Feldgleichungen (18), die $\psi_{\mu\nu}$ nur bis auf $\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}$ mit $\Box\,\Lambda_\mu=0$ bestimmen. Wir forderten daher diese Freiheit von $\psi_{\mu\nu}$ auch in der Bewegungsgleichung und fanden die erweiterte Gruppe (2), (25). Hier, in der zweiten Ordnung der Theorie, gehen wir den Weg in umgekehrter Richtung: Die Bewegungsgleichung zweiter Ordnung blieb ungeändert und gestattet die Gruppe (2), (25). Wir erwarten daher die gleichen Invarianzeigenschaften bei den Feldgleichungen zweiter Ordnung (101). Wir müssen allerdings damit rechnen, daß (2) nur die erste Näherung der wirklichen Eichtransformation ist, die auch höhere Ordnungen enthält [vgl. (60), (62)]. Bisher bestand kein Anlaß zu dieser Frage, da die höheren Terme von $\overline{\psi}_{\mu\nu}$ in den linearen Feldgleichungen und in der Bewegungsgleichung keine zu berücksichtigenden Beiträge liefern. Auch das Transformationsverhalten von ξ wird in (101) wesentlich. Für infinitesimale Eichtransformationen können wir uns auf lineare Glieder in Λ beschränken und setzen an

$$\begin{aligned}\psi_{\mu\nu}\to\overline{\psi}_{\mu\nu}&=\psi_{\mu\nu}+\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}+a\,\psi_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}+a\,\psi_{\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}+b\,\psi_{\mu\varrho}\,\Lambda_{\nu,}{}^{\varrho}+b\,\psi_{\nu\varrho}\,\Lambda_{\mu,}{}^{\varrho}\\&\quad+c\,\psi^{\varrho}_{\varrho}\,\Lambda_{\mu,\nu}+c\,\psi^{\varrho}_{\varrho}\,\Lambda_{\nu,\mu}+d\,\psi_{\mu\nu}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\varrho}\,,\\ \xi\to\overline{\xi}&=\xi+f(\xi,\Lambda)\,,\\ \partial_\mu\to\overline{\partial}_\mu&=\partial_\mu-\Lambda^{\nu,}{}_{\mu}\,\partial_\nu\,.\end{aligned}\tag{102}$$

Aus (25) übernehmen wir
$$\chi\to\overline{\chi}=\chi+o(\psi^2)\,.\tag{103}$$

Die Konstanten in (102) sind mit Hilfe der Invarianzforderung von (101) zu bestimmen. Dazu betrachten wir (101) speziell in vacuo und setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}K^{\mu\nu}&=\frac{1}{\Phi_0}(\xi^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,\xi^{,\lambda}_{\lambda})-e_1\,\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\lambda}_{\lambda}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}+\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\mu\nu}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}+2\,e_1\,\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\tau,}{}^{\varrho}\,\xi^{,\tau}+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\alpha,\mu}_{\alpha}\,\xi^{,\nu}\\&\quad+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\alpha,\nu}_{\alpha}\,\xi^{,\mu}+e_1\,\psi^{\alpha}_{\alpha}\,\xi^{,\mu\nu}-e_1\,\psi^{\mu,\nu}_{\tau}\,\xi^{,\tau}-e_1\,\psi^{\nu,\mu}_{\tau}\,\xi^{,\tau}-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\mu\sigma,}{}_{\sigma}\,\xi^{,\nu}\\&\quad-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\nu\sigma,}{}_{\sigma}\,\xi^{,\mu}-\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\mu\sigma}\,\xi^{,\nu}_{\sigma}-\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\nu\sigma}\,\xi^{\mu}_{,\sigma}+\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma\tau}\,\xi_{,\sigma\tau}\\&\quad+\left(2\,e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\psi^{\mu\nu,\sigma}\,\xi_{,\sigma}-\left(2\,e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho}\,\xi_{,\sigma}+\frac{2\,e_1}{\Phi_0}\,\xi\,(\xi^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,\xi^{,\lambda}_{\lambda})\\&\quad-\frac{\omega}{\Phi_0{}^2}\,(\xi^{,\mu}\,\xi^{,\nu}-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\xi_{,\lambda}\,\xi^{,\lambda})\,.\end{aligned}\tag{104}$$

Die Vakuum-Feldgleichungen werden damit
$$-G^{\mu\nu}+\hat{G}^{\mu\nu}+K^{\mu\nu}=0\,.\tag{105}$$

Wir wenden (102) zunächst auf $K^{\mu\nu}$ an und erhalten für die Differenz des transformierten und untransformierten $K^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\bar{K}^{\mu\nu}-K^{\mu\nu}&=\frac{1}{\Phi_0}(f^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,f^{,\lambda}_{\lambda})-2\,e_1\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\lambda,}{}^{\lambda}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}+\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\mu,\nu}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}+\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\nu,\mu}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}\\&\quad+\left(2\,e_1+\frac{1}{\Phi_0}\right)\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\ \tau}_{\tau,\varrho}\,\xi^{,\tau}+2\,e_1\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\xi^{,\mu\nu}-\left(2\,e_1+\frac{1}{\Phi_0}\right)\Lambda_{\tau,}{}^{\mu\nu}\,\xi^{,\tau}\\&\quad-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\mu,\sigma}_{\sigma}\,\xi^{,\nu}+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\sigma,\mu}_{\sigma}\,\xi^{,\nu}-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\nu,\sigma}_{\sigma}\,\xi^{,\mu}\\&\quad+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\sigma,\nu}_{\sigma}\,\xi^{,\mu}-\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\mu,\sigma}\,\xi^{,\nu}_{\sigma}-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\sigma,\mu}\,\xi^{,\nu}_{\sigma}\\&\quad-\left(e_1-\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\nu,\sigma}\,\xi^{,\mu}_{\sigma}-\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\sigma,\nu}\,\xi^{,\mu}_{\sigma}+\left(2\,e_1+\frac{1}{\Phi_0}\right)\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\sigma,\tau}\,\xi_{,\sigma\tau}\\&\quad+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\mu,\nu\sigma}\,\xi_{.\sigma}+\left(e_1+\frac{1}{2\,\Phi_0}\right)\Lambda^{\nu,\mu\sigma}\,\xi_{,\sigma}-\left(2\,e_1+\frac{1}{\Phi_0}\right)\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\varrho,}{}^{\varrho\sigma}\,\xi_{,\sigma}\,.\end{aligned}\tag{106}$$

Wenn (105) unter (102) invariant sein soll, müssen die Terme in (106) durch die Eichzusätze von $-G^{\mu\nu}+\widehat{G}^{\mu\nu}$ kompensiert werden, was nur infolge der Feldgleichungen erster Ordnung geschehen kann, da in $-\overline{G}^{\mu\nu}+\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}-(-G^{\mu\nu}+\widehat{G}^{\mu\nu})$ das ξ-Feld nicht auftritt.

Mit diesen Überlegungen läßt sich auch e_1 bestimmen: Weil die Feldgleichungen erster Ordnung erste Ableitungen von ξ nicht enthalten, muß das Verschwinden der Koeffizienten aller Terme mit $\xi^{,\tau}$, $\xi_{,\sigma}$ gefordert werden. „Glücklicherweise" ist das für alle Koeffizienten gleichzeitig möglich, und wir erhalten

$$e_1 = -(1/2\,\Phi_0) \tag{107}$$

als Folge der Invarianzforderung.

Mit (107) wird (106)

$$\begin{aligned}\bar{K}^{\mu\nu}-K^{\mu\nu} &= (1/\Phi_0)\,(f^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,f^{,\lambda}_{\lambda}) \\ &\quad + (1/\Phi_0)\,(\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\lambda,}{}^{\lambda}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}-\Lambda^{\mu,\nu}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}-\Lambda^{\nu,\mu}\,\xi^{,\sigma}_{\sigma}-\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\xi^{,\mu\nu}+\Lambda^{\mu,\sigma}\,\xi^{,\nu}_{\sigma}+\Lambda^{\nu,\sigma}\,\xi^{,\mu}_{\sigma}).\end{aligned} \tag{108}$$

Zur Transformation von $\widehat{G}^{\mu\nu}$ braucht man die Konstanten a, b, c, d in (102) noch nicht zu kennen, da $\widehat{G}^{\mu\nu}$ von zweiter Ordnung ist. Ausgehend von (80) findet man

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}-\widehat{G}^{\mu\nu} = &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu}-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\sigma}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\nu}-\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\gamma}-\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\mu\nu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}-\tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\mu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\nu}-\tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\nu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\mu} \\ &-\tfrac{1}{2}\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu}\,\psi^{\varrho,\gamma\nu}_{\varrho}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\gamma}_{\varrho}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\nu}\,\psi^{\varrho,\gamma\mu}_{\varrho}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\sigma,\nu}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu}+\psi^{\sigma}_{\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu\nu}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\nu}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\nu}_{\beta}\,\Lambda^{\beta,\sigma}_{\sigma} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu}_{\beta,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma\nu}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\gamma}{}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\sigma,\mu}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\nu}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\mu}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\mu}_{\beta}\,\Lambda^{\beta,\sigma}_{\sigma} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu}_{\beta,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma\mu}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\nu\sigma,\mu}{}_{\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\mu}\,\psi^{\nu\sigma,\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu}\,\psi^{\nu\sigma,\gamma}{}_{\sigma}-\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma}_{\alpha,\varrho\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}-\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma}_{\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}_{\varrho} \\ &-\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\varrho}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\gamma\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\varrho\sigma}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\gamma}+\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\alpha,\sigma}{}^{\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}+\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\sigma}+\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\sigma}\,\psi^{\varrho,\gamma}_{\varrho} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}\,\psi^{\mu\beta,\sigma}{}_{\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}\,\psi^{\sigma,\mu\beta}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}\,\psi^{\mu\sigma,\beta}{}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}\,\psi^{\beta\sigma,\mu}{}_{\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,\mu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\nu,\mu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha\nu,\sigma}{}_{\sigma} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}\,\psi^{\sigma,\alpha\nu}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha\sigma,\nu}{}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}\,\psi^{\nu\sigma,\alpha}{}_{\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,\nu}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\mu,\nu}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\sigma}+\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\sigma,\mu\nu}_{\sigma} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\nu\sigma,\mu}{}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\varrho\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\eta}\,.\end{aligned} \tag{109}$$

Nachdem $\overline{K}^{\mu\nu}-K^{\mu\nu}$ und $\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}-\widehat{G}^{\mu\nu}$ festliegen, kann man aus der Forderung $-\overline{G}^{\mu\nu}+\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}+\overline{K}^{\mu\nu}=0$ [vgl. (105)] die Werte von a, b, c, d bestimmen. Das Ergebnis ist

$$a=-1, \qquad b=c=d=0\,. \tag{110}$$

Mit (110) reduziert sich $-\overline{G}^{\mu\nu}+G^{\mu\nu}$ auf

$$\begin{aligned}-\bar{G}^{\mu\nu}+G^{\mu\nu} = &\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\sigma}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\sigma}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\nu}+\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\sigma}{}_{\gamma}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\sigma}\,\psi^{\mu\nu,\gamma}+\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\mu\nu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}+\tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\mu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\nu}+\tfrac{1}{2}\,\psi_{\varrho\alpha,}{}^{\nu}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\mu} \\ &+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu}\,\psi^{\varrho,\gamma\nu}_{\varrho}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu\nu}\,\psi^{\varrho,\gamma}_{\varrho}+\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\nu}\,\psi^{\varrho,\gamma\mu}_{\varrho}-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\sigma,\nu}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu}-\psi^{\sigma}_{\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\nu}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu,\nu}_{\beta}\,\Lambda^{\beta,\sigma}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\mu}_{\beta,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma\nu}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\mu\sigma,\nu}{}_{\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\nu}\,\psi^{\mu\sigma,\gamma}{}_{\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\sigma,\mu}_{\alpha\,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\nu} \\ &-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\mu}_{\beta\,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma}-\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu,\mu}_{\beta}\,\Lambda^{\beta,\sigma}_{\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\psi^{\nu}_{\beta,\sigma}\,\Lambda^{\beta,\sigma\mu}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\varrho\sigma,\mu}{}_{\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\mu}\,\psi^{\nu\sigma,\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\Lambda_{\gamma,}{}^{\mu}\,\psi^{\nu\sigma,\gamma}{}_{\sigma} \\ &+\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma}_{\alpha,\varrho\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}+\eta^{\mu\nu}\,\psi^{\sigma}_{\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho}_{\varrho}+\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\varrho}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\gamma\sigma}+\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\varrho\sigma}\,\psi^{\varrho\sigma,}{}_{\gamma}-\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\alpha,\sigma}{}^{\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho} \\ &-\eta^{\mu\nu}\,\psi_{\varrho\alpha,\sigma}\,\Lambda^{\alpha,\varrho\sigma}-\eta^{\mu\nu}\,\Lambda^{\gamma,}{}_{\sigma}\,\psi^{\varrho,\sigma}_{\varrho\,\gamma}-\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,\Lambda_{\gamma,\sigma}{}^{\sigma}\,\psi^{\varrho,\gamma}_{\varrho}\,.\end{aligned} \tag{111}$$

Zusammen mit (109) läßt sich das in eine einfache Form bringen:

$$-(\overline{G}^{\mu\nu}-G^{\mu\nu})+\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}-\widehat{G}^{\mu\nu} = -G^{\mu\beta}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}-G^{\alpha\nu}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}+G^{\mu\nu}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,. \tag{112}$$

Andererseits kann man unter Benutzung von [vgl. (41)]

$$(1/\Phi_0)\,(\xi^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,\xi^{,\lambda}_{\lambda})=H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu} \tag{113}$$

(108) umschreiben zu

$$\bar{K}^{\mu\nu}-K^{\mu\nu}=(1/\Phi_0)\,(f^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,f^{,\lambda}_{\lambda})+(H^{\mu\beta}+G^{\mu\beta})\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}+(H^{\alpha\nu}+G^{\alpha\nu})\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}-(H^{\mu\nu}+G^{\mu\nu})\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,. \tag{114}$$

Addition von (112) und (114) ergibt

$$\begin{aligned}-(\overline{G}^{\mu\nu}-G^{\mu\nu})+\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}-\widehat{G}^{\mu\nu}+\overline{K}^{\mu\nu}-K^{\mu\nu} &= -\overline{G}^{\mu\nu}+\overline{\widehat{G}}^{\mu\nu}+\overline{K}^{\mu\nu} \\ &= (1/\Phi_0)\,(f^{,\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}\,f^{,\lambda}_{\lambda})+H^{\mu\beta}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\beta}+H^{\alpha\nu}\,\Lambda^{\mu,}{}_{\alpha}-H^{\mu\nu}\,\Lambda_{\alpha,}{}^{\alpha}\,.\end{aligned} \tag{115}$$

Wenn in (102)

$$f(\xi, \Lambda) = 0 \tag{116}$$

gesetzt wird, verschwindet (115) als Folge der Vakuum-Feldgleichungen erster Ordnung

$$H^{\mu\nu} = 0\,. \tag{41'}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Feldgleichungen zweiter Ordnung (101) auch in Anwesenheit von Materie eichinvariant gegenüber der Gruppe (102), (103) sind.

Prinzipiell ist es natürlich möglich, nun noch die ξ-Feldgleichung zweiter Ordnung anzugeben und danach zur dritten Ordnung der Theorie überzugehen. Man würde die aus L^{**} in (94) folgende Bewegungsgleichung dritter Ordnung anschreiben und wegen ihrer Inkonsistenz mit den Feldgleichungen zweiter Ordnung (101) auf Feldgleichungen dritter Ordnung geführt werden. Die Eichgruppe (102), (103) würde sich allerdings dabei nicht ändern. Um das zu erkennen, braucht man aber die Rechnungen nicht explizit durchzuführen, vielmehr wollen wir versuchen, die gefundene Eichgruppe, oder eine Untergruppe von ihr, als Automorphismengruppe einer geometrischen Struktur zu interpretieren, um auf diese Weise nach Möglichkeit eine übersichtlichere Formulierung der Theorie zu erhalten.

Zunächst muß man die Struktur der abstrakten Gruppe ermitteln, deren „lineare Darstellung" (102) ist.

$$\psi_{\mu\nu} \to \overline{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} - \psi_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}{}_{,\nu} - \psi_{\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}{}_{,\mu} \tag{102'}$$

ist eine infinitesimale Transformationsgruppe im Funktionenraum der $\psi_{\mu\nu}(x)$. Zur Vereinfachung betrachten wir $\psi_{\mu\nu}(x)$ und $\Lambda_{\mu}(x)$ an einem festen Punkt x_0; dadurch wird (102′) zu einer Transformationsgruppe im R^{10} der $\psi_{\mu\nu}(x_0)$. Um die Elemente der zugehörigen Lie-Algebra zu berechnen, nehmen wir an, daß $\underset{i}{\Lambda}_{\mu}(x)$ $(i=1, 0)$ Tangentenvektoren der abstrakten Gruppe sind. Dann sind

$$\psi_{\mu\nu} \to \overline{\psi}_{\mu\nu}(\underset{i}{\Lambda}) = \psi_{\mu\nu} + \underset{i}{\Lambda}_{\mu,\nu}\,\delta t + \underset{i}{\Lambda}_{\nu,\mu}\,\delta t - \psi_{\mu\varrho}\,\underset{i}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\nu}\,\delta t - \psi_{\nu\varrho}\,\underset{i}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\mu}\,\delta t \tag{117}$$

für infinitesimale δt einparametrige Untergruppen von (102′) und daher

$$P_{\mu\nu}(\psi, \underset{i}{\Lambda}) =_{\text{def}} \frac{\mathrm{d}\overline{\psi}_{\mu\nu}(\underset{i}{\Lambda})}{\mathrm{d}\,\delta t} = \underset{i}{\Lambda}_{\mu,\nu} + \underset{i}{\Lambda}_{\nu,\mu} - \psi_{\mu\varrho}\,\underset{i}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\nu} - \psi_{\nu\varrho}\,\underset{i}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\mu} \tag{118}$$

$(i=1, 0)$ Elemente der Lie-Algebra der Vektorfelder von (102′). Bekanntlich[18] ist der Kommutator zweier Vektorfelder gegeben durch

$$[P(\psi, \underset{0}{\Lambda}), P(\psi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu\nu} = \frac{\partial P_{\mu\nu}(\psi, \underset{0}{\Lambda})}{\partial \psi_{\alpha\beta}}\,P_{\alpha\beta}(\psi, \underset{1}{\Lambda}) - \frac{\partial P_{\mu\nu}(\psi, \underset{1}{\Lambda})}{\partial \psi_{\alpha\beta}}\,P_{\alpha\beta}(\psi, \underset{0}{\Lambda})\,. \tag{119}$$

Wenn man (119) bis zur zweiten Ordnung ausrechnet, erhält man

$$[P(\psi, \underset{0}{\Lambda}), P(\psi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu\nu} = -\underset{0}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\nu}\,\underset{1}{\Lambda}_{\mu,\varrho} - \underset{0}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\mu}\,\underset{1}{\Lambda}_{\nu,\varrho} + \underset{1}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\nu}\,\underset{0}{\Lambda}_{\mu,\varrho} + \underset{1}{\Lambda}^{\varrho}{}_{,\mu}\,\underset{0}{\Lambda}_{\nu,\varrho}\,. \tag{120}$$

Da die $P_{\mu\nu}$ eine Lie-Algebra bilden sollen, muß gelten

$$[P(\psi, \underset{0}{\Lambda}), P(\psi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}(\psi, [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}])\,, \tag{121}$$

wobei $[\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]$ der Kommutator der Lie-Algebra der abstrakten Gruppe ist, die gemäß (102′) als Transformationsgruppe im Raum der $\psi_{\mu\nu}$ dargestellt ist.

$P_{\mu\nu}(\psi, [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}])$ bedeutet entsprechend der Definition (118)

$$P_{\mu\nu}(\psi, [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]) = [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]_{\mu,\nu} + [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]_{\nu,\mu} + o(\psi^3)\,. \tag{122}$$

Zum Vergleich mit (122) formen wir (120) um:

$$[P(\psi, \underset{0}{\Lambda}), P(\psi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu\nu}$$
$$= (\underset{0}{\Lambda}_{\mu,\varrho}\,\underset{1}{\Lambda}^{\varrho} - \underset{1}{\Lambda}_{\mu,\varrho}\,\underset{0}{\Lambda}^{\varrho})_{,\nu} + (\underset{0}{\Lambda}_{\nu,\varrho}\,\underset{1}{\Lambda}^{\varrho} - \underset{1}{\Lambda}_{\nu,\varrho}\,\underset{0}{\Lambda}^{\varrho})_{,\mu} + \underset{0}{\Lambda}^{\varrho}(\underset{1}{\Lambda}_{\mu,\varrho\nu} + \underset{1}{\Lambda}_{\nu,\varrho\mu}) - \underset{1}{\Lambda}^{\varrho}(\underset{0}{\Lambda}_{\mu,\varrho\nu} + \underset{0}{\Lambda}_{\nu,\varrho\mu})\,. \tag{123}$$

[18] L. S. PONTRJAGIN, Topologische Gruppen, Leipzig 1958.

Man erkennt, daß (122) und (123) nur verträglich sind, wenn

$$\underset{0}{\Lambda}^{\varrho}(\underset{1}{\Lambda}_{\mu,\varrho\nu}+\underset{1}{\Lambda}_{\nu,\varrho\mu})-\underset{1}{\Lambda}^{\varrho}(\underset{0}{\Lambda}_{\mu,\varrho\nu}+\underset{0}{\Lambda}_{\nu,\varrho\mu})=0. \tag{124}$$

Nur in diesem Fall bilden die $P_{\mu\nu}$ eine Lie-Algebra und die infinitesimale Gruppe (102′) läßt sich zu einer lokalen Lieschen Transformationsgruppe fortsetzen. Wenn andererseits (124) erfüllt ist, folgt

$$[\underset{0}{\Lambda},\underset{1}{\Lambda}]_{\mu}=\underset{0}{\Lambda}_{\mu,\varrho}\underset{1}{\Lambda}^{\varrho}-\underset{1}{\Lambda}_{\mu,\varrho}\underset{0}{\Lambda}^{\varrho}; \tag{125}$$

die $\underset{i}{\Lambda}$ sind also Vektorfelder. (125) bedeutet, daß die „abstrakte“ Gruppe ebenfalls eine Transformationsgruppe ist, und zwar die Gruppe der allgemeinen Koordinatentransformationen

$$x^{\mu}\to\bar{x}^{\mu}=x^{\mu}+\Lambda^{\mu}. \tag{126}$$

(124) gilt insbesondere, wenn an der Stelle x_0 (s. o.)

$$\underset{i}{\Lambda}^{\varrho}(x_0)=0 \qquad (i=1,0). \tag{127}$$

Offensichtlich liegt die Diskrepanz von (122) und (123) daran, daß nach Voraussetzung alle Felder für festes Argument x_0 betrachtet werden sollen, während in Wirklichkeit in (102′) das Argument von $\psi_{\mu\nu}$ entsprechend (126) mittransformiert wird[19]:

$$\psi_{\mu\nu}(x)\to\bar{\psi}_{\mu\nu}(\bar{x})=\psi_{\mu\nu}(x)+\Lambda_{\mu,\nu}(x)+\Lambda_{\nu,\mu}(x)-\psi_{\mu\varrho}(x)\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}(x)-\psi_{\nu\varrho}(x)\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}(x), \tag{128}$$

d. i. für infinitesimale Λ

$$\begin{aligned}\psi_{\mu\nu}(x)\to\psi'_{\mu\nu}(x)&=\psi_{\mu\nu}(x)+\Lambda_{\mu,\nu}(x)+\Lambda_{\nu,\mu}(x)\\&\quad-\psi_{\mu\varrho}(x)\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}(x)-\psi_{\nu\varrho}(x)\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}(x)-\psi_{\mu\nu,\varrho}(x)\,\Lambda^{\varrho}(x).\end{aligned} \tag{128′}$$

Der Spezialfall (127) wird durch (102′) richtig beschrieben. Auch im allgemeinen Fall $\Lambda^{\varrho}(x_0)\neq 0$ kann man, ausgehend von (128′), mit dem oben angegebenen Verfahren zeigen, daß die $\underset{i}{\Lambda}$ Vektorfelder sind.

Nachdem die Struktur der Eichgruppe bekannt ist, liegt die gesuchte geometrische Interpretation der Theorie nahe: In der Lie-Algebra der Vektorfelder $\underset{i}{\Lambda}$ ist die Menge der Killing-Vektorfelder als Unteralgebra enthalten[20]; die von dieser Unteralgebra erzeugte Gruppe ist die Isometriegruppe des Raumes[21]. Da, wie wir sahen, mit den Eichtransformationen (102) eine Koordinatentransformation (126) verbunden ist, muß in den invarianten Feldgleichungen die Metrik des Raumes bereits auftreten. Als einzig in Frage kommende Größe muß $\psi_{\mu\nu}$ mit dem Fundamentaltensor zusammenhängen. Wir setzen daher die Isometriegruppe als Symmetriegruppe von $\psi_{\mu\nu}$ an, die gegeben ist durch

$$\bar{\delta}\psi_{\mu\nu}=\psi'_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu}=\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}-\psi_{\mu\varrho}\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}-\psi_{\nu\varrho}\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}-\psi_{\mu\nu,\varrho}\Lambda^{\varrho}=0. \tag{129}$$

Offenbar sind (129) nach der Substitution

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu} \tag{130}$$

die Killing-Gleichungen der Metrik $g_{\mu\nu}$:

$$\bar{\delta}\psi_{\mu\nu}=g_{\mu\varrho}\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}+g_{\nu\varrho}\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}+g_{\mu\nu,\varrho}\Lambda^{\varrho}=-\bar{\delta}g_{\mu\nu}=0. \tag{131}$$

Durch Transformation z. B. des Ausdrucks $g_{\mu\nu}\,\xi^{,\mu}\,\xi^{,\nu}$ gemäß (102) verifiziert man, daß $g_{\mu\nu}$ der Fundamentaltensor unserer Theorie ist.

Wenn man die Ersetzung (130) in den Feldgleichungen (101), (46) und in der Bewegungsgleichung (52) vornimmt und

$$\Phi=\Phi_0+\xi \tag{132}$$

[19] Vgl. auch $\partial_{\mu}\to\bar{\partial}_{\mu}=\partial_{\mu}-\Lambda^{\nu,}{}_{\mu}\,\partial_{\nu}$.

[20] R. HERMANN, Differential Geometry and the Calculus of Variations, Academic Press, New York 1968.

[21] L. P. EISENHART, Continuous Groups of Transformations, Dover Publications, New York 1961.

setzt, erhält man in der jeweiligen Ordnung die Gleichungen der Jordan-Brans-Dicke-Theorie [1, 2]:

$$\sqrt{-g}(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = -\sqrt{-g}\,\frac{8\pi}{\Phi}\,T^{\mu\nu}$$

$$+\sqrt{-g}\,\frac{\omega}{\Phi^2}\,(\Phi^{,\mu}\,\Phi^{,\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\,\Phi_{,\lambda}\,\Phi^{,\lambda}) - \sqrt{-g}\,\frac{1}{\Phi}\,(\Phi^{,\mu;\nu} - g^{\mu\nu}\,\Phi_{,\lambda;}{}^{\lambda}), \tag{133}$$

$$\frac{2\,\omega}{\Phi}\,\Phi_{,\alpha;}{}^{\alpha} - \frac{\omega}{\Phi^2}\,\Phi_{,\alpha}\,\Phi^{,\alpha} + R = 0, \tag{134}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{135}$$

mit dem Wirkungsintegral

$$W = \int\left(\Phi\,R + 16\,\pi\,L_{\mathrm{m}} - \omega\,\frac{\Phi_{,\mu}\,\Phi^{,\mu}}{\Phi}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{136}$$

Dabei ist zu beachten, daß wegen (130) und $g_{\mu\nu}\,g^{\nu\varrho} = \delta^{\varrho}_{\mu}$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu} + \psi^{\mu}_{\varrho}\,\psi^{\nu\varrho} + o(\psi^3) \tag{137}$$

gesetzt werden muß. Die behandelte Lorentz-invariante Skalar-Tensortheorie ist also die Entwicklung der J.-B.-D.-Theorie nach $\psi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ im Minkowski-Raum.

Eindeutigkeit

Bisher ist auf Eindeutigkeitsaussagen ausdrücklich verzichtet worden, da die erforderlichen Untersuchungen, besonders in der zweiten Ordnung, sehr kompliziert waren. Man wird deswegen bestrebt sein, die J.-B.-D.-Theorie nicht erst an Hand der Feldgleichungen zweiter Ordnung, sondern schon wesentlich früher zu identifizieren.

In Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung (23) hatten wir die Eichgruppe (25) gefunden, nach der sich $\chi_{,\mu}$ wie

$$\chi_{,\mu} \to \bar{\chi}_{,\mu} = \chi_{,\mu} - \Lambda^{\nu}{}_{,\mu}\,\chi_{,\nu} \tag{138}$$

transformiert. Man kann versuchen, ähnlich wie bei (102′), die Struktur der infinitesimalen Gruppe (138) zu bestimmen. Dazu betrachten wir wieder $\chi_{,\mu}(x)$ und $\Lambda_{\mu}(x)$ bei festem Argument x_0 und erhalten als Definitionsbereich der Transformationen den R^4 der $\chi_{,\mu}(x_0)$. Mit den Tangentenvektoren $\underset{i}{\Lambda}_{\mu}$ $(i = 1, 0)$ erhält man zwei einparametrige Untergruppen von (138) in der Form

$$\chi_{,\mu} \to \bar{\chi}_{,\mu} = \chi_{,\mu} - \underset{i}{\Lambda}{}^{\nu}{}_{,\mu}\,\chi_{,\nu}\,\delta t \tag{139}$$

und deren infinitesimale Erzeugende

$$P_{\mu}(\chi, \underset{i}{\Lambda}) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{d}\bar{\chi}_{,\mu}(\underset{i}{\Lambda})}{\mathrm{d}\,\delta t} = -\underset{i}{\Lambda}{}^{\nu}{}_{,\mu}\,\chi_{,\nu}\,. \tag{140}$$

Damit läßt sich der Kommutator der Vektorfelder

$$[P(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu} = \frac{\partial P_{\mu}(\chi, \underset{0}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha}}\,P_{\alpha}(\chi, \underset{1}{\Lambda}) - \frac{\partial P_{\mu}(\chi, \underset{1}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha}}\,P_{\alpha}(\chi, \underset{0}{\Lambda}) \tag{141}$$

explizit angeben

$$[P(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu} = (\underset{0}{\Lambda}{}^{\nu}{}_{,\mu}\,\underset{1}{\Lambda}{}^{\sigma}{}_{,\nu} - \underset{1}{\Lambda}{}^{\nu}{}_{,\mu}\,\underset{0}{\Lambda}{}^{\sigma}{}_{,\nu})\,\chi_{,\sigma}\,. \tag{142}$$

Das Lie-Produkt (142) muß sich schreiben lassen als

$$[P(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_{\mu} = P_{\mu}(\chi, [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]) = -[\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]^{\nu}{}_{,\mu}\,\chi_{,\nu}\,. \tag{143}$$

Das zwingt uns nach Umformung von (142),

$$[P(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_\mu = -(\underset{0}{\Lambda^{\sigma,}}_\nu \underset{1}{\Lambda^\nu} - \underset{1}{\Lambda^{\sigma,}}_\nu \underset{0}{\Lambda^\nu})_{,\mu} \chi_{,\sigma} - (\underset{0}{\Lambda^\nu} \underset{1}{\Lambda^{\sigma,}}_{\nu\mu} - \underset{1}{\Lambda^\nu} \underset{0}{\Lambda^{\sigma,}}_{\nu\mu}) \chi_{,\sigma} \tag{144}$$

zu der Annahme

$$\underset{0}{\Lambda^\nu} \underset{1}{\Lambda^{\sigma,}}_{\nu\mu} - \underset{1}{\Lambda^\nu} \underset{0}{\Lambda^{\sigma,}}_{\nu\mu} = 0\,. \tag{145}$$

Wenn (145) gilt — was insbesondere für $\underset{i}{\Lambda^\varrho}(x_0) = 0$ [vgl. (127)] der Fall ist —, folgt aus (143) und (144)

$$[\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]^\sigma = \underset{0}{\Lambda^{\sigma,}}_\nu \underset{1}{\Lambda^\nu} - \underset{1}{\Lambda^{\sigma,}}_\nu \underset{0}{\Lambda^\nu} \tag{146}$$

[vgl. (125)]; die $\underset{i}{\Lambda}$ sind dann Vektorfelder der Gruppe der Koordinatentransformationen (126) und entsprechend hat man an Stelle von (138) genauer

$$\chi_{,\mu}(x) \to \bar{\chi}_{,\mu}(\bar{x}) = \chi_{,\mu}(x) - \Lambda^{\nu,}{}_\mu(x)\, \chi_{,\nu}(x), \tag{147}$$

oder nach Entwicklung von $\bar{\chi}_{,\mu}(\bar{x})$

$$\chi_{,\mu}(x) \to \chi'_{,\mu}(x) = \chi_{,\mu}(x) - \chi_{,\nu}(x)\, \Lambda^{\nu,}{}_\mu(x) \quad - \chi_{,\mu\varrho}(x)\, \Lambda^\varrho(x)\,. \tag{148}$$

Wegen des Auftretens von $\chi_{,\mu\varrho}$ in (148) muß man bei unserem Verfahren die Transformationsformel

$$\chi'_{,\mu\sigma} = \chi_{,\mu\sigma} - (\chi_{,\nu} \Lambda^{\nu,}{}_\mu)_{,\sigma} - (\chi_{,\mu\varrho} \Lambda^\varrho)_{,\sigma} \tag{149}$$

hinzunehmen und erhält entsprechend die vierzehnkomponentigen infinitesimalen Erzeugenden $P'(\chi, \underset{i}{\Lambda})$ der einparametrigen Untergruppen von (148), (149); die 4 + 10 Komponenten von $P'(\chi, \underset{i}{\Lambda})$ sind gegeben durch

$$P'_\mu(\chi, \underset{i}{\Lambda}) =_{\text{def}} \frac{d\chi'_{,\mu}(\underset{i}{\Lambda})}{d\,\delta t} = -\chi_{,\nu} \underset{i}{\Lambda^{\nu,}}_\mu - \chi_{,\mu\varrho} \underset{i}{\Lambda^\varrho}, \tag{150}$$

bzw.

$$P'_{\mu\sigma}(\chi, \Lambda) =_{\text{def}} \frac{d\chi'_{,\mu\sigma}(\underset{i}{\Lambda})}{d\,\delta t} = -\chi_{,\nu\sigma} \underset{i}{\Lambda^{\nu,}}_\mu - \chi_{,\nu} \underset{i}{\Lambda^{\nu,}}_{\mu\sigma} - \chi_{,\mu\varrho\sigma} \underset{i}{\Lambda^\varrho} - \chi_{,\mu\varrho} \underset{i}{\Lambda^{\varrho,}}_\sigma\,. \tag{151}$$

Damit lassen sich die ersten vier Komponenten des Kommutators

$$\begin{aligned}[P'(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P'(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_\mu = {} & \frac{\partial P'_\mu(\chi, \underset{0}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha}} P'_\alpha(\chi, \underset{1}{\Lambda}) + \frac{\partial P'_\mu(\chi, \underset{0}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha\beta}} P'_{\alpha\beta}(\chi, \underset{1}{\Lambda}) \\ & - \frac{\partial P'_\mu(\chi, \underset{1}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha}} P'_\alpha(\chi, \underset{0}{\Lambda}) - \frac{\partial P'_\mu(\chi, \underset{1}{\Lambda})}{\partial \chi_{,\alpha\beta}} P'_{\alpha\beta}(\chi, \underset{0}{\Lambda})\end{aligned} \tag{152}$$

bestimmen zu

$$[P'(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P'(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_\mu = \underset{0}{\Lambda^{\nu,}}_\mu \underset{1}{\Lambda^{\tau,}}_\nu \chi_{,\tau} - \underset{1}{\Lambda^{\nu,}}_\mu \underset{0}{\Lambda^{\tau,}}_\nu \chi_{,\tau} + \underset{0}{\Lambda^\tau} \underset{1}{\Lambda^{\nu,}}_{\mu\tau} \chi_{,\nu} + \underset{0}{\Lambda^\tau} \underset{1}{\Lambda^{\varrho,}}_\tau \chi_{,\mu\varrho} - \underset{1}{\Lambda^\tau} \underset{0}{\Lambda^{\nu,}}_{\mu\tau} \chi_{,\nu} - \underset{1}{\Lambda^\tau} \underset{0}{\Lambda^{\varrho,}}_\tau \chi_{,\mu\varrho}\,. \tag{153}$$

(153) kann man zusammenfassen zu

$$[P'(\chi, \underset{0}{\Lambda}), P'(\chi, \underset{1}{\Lambda})]_\mu = P'_\mu(\chi, [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]) = -\chi_{,\nu} [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]^{\nu,}{}_\mu - \chi_{,\mu\varrho} [\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]^\varrho \tag{154}$$

mit $[\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{\Lambda}]^\nu$ aus (146). Dies Ergebnis zeigt, daß (148) und (128′) lineare Darstellungen derselben Gruppe (126) sind, im ersten Fall im Raum der $\chi_{,\mu}$, im zweiten Fall in dem der $\psi_{\mu\nu}$. Die einzelnen Eichtransformationen entsprechen den jeweiligen Tensortransformationsgesetzen einer im Riemannschen Raum kovariant formulierten Theorie, und zwar nicht nur in zweiter Näherung, sondern exakt.

Falls die Feldgleichungen zweiter Ordnung (101) und deren Eichgruppe (102), (103) schon bekannt sind, läßt sich daher folgendes aussagen: Wenn man das – nach der zweiten Ordnung abgebrochene – Verfahren der schrittweisen Behebung der Inkonsistenz unter Beibehaltung der Eichgruppe fortsetzt, erhält man genau die nächsten Ordnungen der Entwicklung der J.-B.-D.-Theorie nach Potenzen von ψ.

Wir wollen jetzt ein ähnliches Resultat ohne Kenntnis der zweiten Ordnung der Theorie gewinnen: Mit Hilfe der Bewegungsgleichung (24) war es möglich, die Struktur der Eichgruppe von $\chi_{,\mu}$ zu bestimmen. Man kann dann ohne Benutzung der Feldgleichungen zweiter Ordnung beweisen [22], daß die vollständige Eichgruppe von $\psi_{\mu\nu}$ dieselbe Struktur haben muß; das läßt sich unter Verwendung eines physikalischen Arguments plausibel machen: (23) ist die Gleichung einer geodätischen Bewegung im Riemannschen Raum mit der Metrik $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu}$ [23], die sich auch in der Form $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ schreiben läßt. Die Forderung der Konsistenz von Bewegungs- und Feldgleichungen bedeutet, daß $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ aus den Feldgleichungen mit Hilfe von Identitäten folgt, die sich aus Invarianzeigenschaften des Wirkungsintegrals gemäß dem Noetherschen Theorem ergeben. Man weiß aber [24], daß hierfür als Invarianzgruppe nur die Gruppe der Koordinatentransformationen in Frage kommt; daraus ergibt sich wieder, daß die Strukturen der Eichgruppen von $\psi_{\mu\nu}$ und $\chi_{,\mu}$ übereinstimmen.

Aus der Kenntnis der Struktur läßt sich eine Eichgruppe zweiter Ordnung von $\psi_{\mu\nu}$ leicht angeben [z. B. (102′)]. Dieses wichtige Ergebnis, daß bereits die Bewegungsgleichung (24) die Struktur der Invarianzgruppe vorherzubestimmen gestattet – was insbesondere im Einsteinschen Fall gilt und auch in der Arbeit von Wyss übersehen wurde –, steht im Einklang mit der Bemerkung von THIRRING [25], daß sich in der im Zusammenhang mit der linearen Theorie auftretenden Bewegungsgleichung $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu}$ als observable Metrik herausstellt und sich der Übergang vom flachen zum gekrümmten Raum zwangsläufig vollzieht.

Natürlich ist eine Liesche Transformationsgruppe durch Angabe ihrer Struktur nicht vollständig bestimmt; die Darstellung von (126) im Raum der Lorentz-Tensoren zweiter Stufe ist noch weitgehend willkürlich. Für die von BARBOUR [6] diskutierte Substitution

$$\psi_{\mu\nu}=\zeta_{\mu\nu}+i_1\,\zeta_{\mu\varrho}\,\zeta^{\varrho}_{\nu}+i_2\,\zeta_{\mu\nu}\,\zeta^{\varrho}_{\varrho}+i_3\,\eta_{\mu\nu}\,\zeta^{\varrho\sigma}\,\zeta_{\varrho\sigma}+i_4\,\eta_{\mu\nu}\,\zeta^{\varrho}_{\varrho}\,\zeta^{\sigma}_{\sigma} \tag{155}$$

wird die Eichgruppe in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\zeta_{\mu\nu}\to\bar\zeta_{\mu\nu}= {} & \zeta_{\mu\nu}+\Lambda_{\mu,\nu}+\Lambda_{\nu,\mu}-\zeta_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}-\zeta_{\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}-i_1\,\zeta^{\varrho}_{\nu}\,\Lambda_{\mu,\varrho}-i_1\,\zeta^{\varrho}_{\nu}\,\Lambda_{\varrho,\mu}-i_1\,\zeta_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}-i_1\,\zeta_{\mu\varrho}\,\Lambda_{\nu,}{}^{\varrho}\\ & -i_2\,\zeta^{\varrho}_{\varrho}\,\Lambda_{\mu,\nu}-i_2\,\zeta^{\varrho}_{\varrho}\,\Lambda_{\nu,\mu}-2\,i_2\,\zeta_{\mu\nu}\,\Lambda_{\varrho,}{}^{\varrho}-4\,i_3\,\eta_{\mu\nu}\,\zeta_{\varrho\sigma}\,\Lambda^{\varrho,\sigma}-4\,i_4\,\eta_{\mu\nu}\,\zeta^{\sigma}_{\sigma}\,\Lambda_{\varrho,}{}^{\varrho}+o(\psi^3)\,;\end{aligned} \tag{156}$$

(156) ist von derselben Struktur wie (102′). Auch eine Ersetzung von $\psi_{\mu\nu}$, die in zweiter Ordnung das Skalarfeld ξ enthält, ist möglich, z. B.

$$\psi_{\mu\nu}=\vartheta_{\mu\nu}-(\xi/\Phi_0)\,\vartheta_{\mu\nu}\,. \tag{157}$$

(155) und (157) ändern die lineare Theorie und deren Eichgruppe nicht; die Feldgleichungen zweiter Ordnung sehen allerdings anders aus als (101). Man erhält jedoch auf diese Weise nichts wesentlich Neues. Denn die Untersuchung aller nicht-linearen Erweiterungen von (41), (46) mit Eichgruppen der Struktur (125) läuft hinaus auf die Frage nach kovarianten Theorien im Riemannschen Raum, deren lineare Näherung bei der Entwicklung von $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu}$ die Gln. (41), (46) bilden. Hierfür kommt offenbar nur die J.-B.-D.-Theorie in Frage. Wenn man also in den zu (155) und (157) gehörigen Feldgleichungen zweiter Ordnung mit der Beziehung $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\psi_{\mu\nu}$ [$\psi_{\mu\nu}$ wie in (155) bzw. (157)] Terme zusammenfaßt, erhält man in beiden Fällen das gleiche Ergebnis.

In diesem Sinn ist die Frage nach der Eindeutigkeit einer konsistenten Erweiterung zweiter Ordnung zu beantworten: Zwar ist das Verfahren formal nicht eindeutig – das Auftreten weiterer quadratischer Terme

[22] Der Beweis wird im Anhang gegeben. Die Bewegungsgleichung, mit deren Hilfe schon die Ordnungsdefinition eingeführt wurde, spielt also die entscheidende Rolle bei diesem zweiten Weg zur Konstruktion der kovarianten Theorie.

[23] P. MITTELSTAEDT u. J. B. BARBOUR, Z. Phys. **203**, 82 [1967].

[24] A. TRAUTMAN, in: Gravitation: An Introduction to Current Research, New York 1962.

[25] W. THIRRING, Ann. Phys. New York **16**, 96 [1961].

kann nicht ausgeschlossen werden –, aber die dabei entstehenden Theorien – mit Eichgruppen gleicher Struktur – sind physikalisch äquivalent.

Durch Berücksichtigung des Landau-Lifschitz-Tensors (64) des ψ-Feldes haben wir gerade die einfachstmögliche Erweiterung der linearen Theorie gefunden.

Anhang

Strukturbestimmung der Eichgruppe von $\psi_{\mu\nu}$ aus der linearen Bewegungsgleichung

Die lineare Bewegungsgleichung [vgl. (24)]

$$-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi + \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \psi^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\chi - 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu} - 2\,\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu} + \psi^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu} = o(\psi^2) \tag{A 1}$$

ist invariant unter den infinitesimalen Eichtransformationen [vgl. (2), (25)]

$$\begin{aligned}
\psi_{\mu\nu} &\to \overline{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}\,,\\
\chi &\to \overline{\chi} = \chi\,,\\
\chi_{,\mu} &\to \overline{\chi}_{,\mu} = \chi_{,\mu} - \chi_{,\nu}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\mu}\,,\\
\chi_{,\mu\nu} &\to \overline{\chi}_{,\mu\nu} = \chi_{,\mu\nu} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}\,\chi_{,\mu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu\nu}\,\chi_{,\varrho}\,.
\end{aligned} \tag{A 2}$$

Die zur Erreichung der Konsistenz erforderlichen Feldgleichungen zweiter Ordnung müssen aus physikalischen Gründen ebenfalls eine Eichgruppe besitzen, die sich, von den Transformationen für ξ abgesehen, von (A 2) nur durch einen Term zweiter Ordnung $y_{\mu\nu}(\psi,\Lambda)$ in $\overline{\psi}_{\mu\nu}$ unterscheiden kann

$$\psi_{\mu\nu} \to \overline{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} + y_{\mu\nu}(\psi,\Lambda)\,. \tag{A 3}$$

[Bei Kenntnis von $y_{\mu\nu}(\psi,\Lambda)$ läßt sich die Struktur von (A 3) direkt bestimmen.] Höhere Ordnungen in $\overline{\chi}$, $\overline{\chi}_{,\mu}$, $\overline{\chi}_{,\mu\nu}$ wären von der Form $o(\Lambda^2)$ und werden in infinitesimalen Transformationen nicht berücksichtigt.

Die Feldgleichungen zweiter Ordnung folgen aus einer Lagrange-Funktion dritter Ordnung L^{**}, deren Kenntnis wir aber ausdrücklich nicht voraussetzen. L^{**} liefert eine Bewegungsgleichung zweiter Ordnung (nach Multiplikation mit Φ_0), die wir symbolisch schreiben wollen als

$$-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi + \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \psi^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\chi - 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu} - 2\,\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu} + \psi^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu} + \varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi) = o(\psi^3)\,. \tag{A 4}$$

Ebenso, wie wir aus Konsistenzgründen wegen der Invarianzeigenschaften von (A 1) die Eichgruppe (A 2), (A 3) für die Feldgleichungen zweiter Ordnung gefordert haben, folgern wir nun aus der Invarianz der Feldgleichungen zweiter Ordnung die von (A 4) gegenüber (A 2), (A 3).

Wir wollen zunächst beweisen, daß die Invarianz von (A 4) gegenüber (A 2), (A 3) impliziert, daß (A 4) die Gruppe der entsprechenden „lokalen Variationen“ gestattet, also die infinitesimalen Transformationen

$$\begin{aligned}
\psi_{\mu\nu} &\to \psi^{x}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} + y_{\mu\nu}(\psi,\Lambda) - \psi_{\mu\nu,\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,,\\
\chi &\to \chi^{x} = \chi - \chi_{,\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,,\\
\chi_{,\mu} &\to \chi^{x}_{,\mu} = \chi_{,\mu} - \chi_{,\nu}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\mu} - \chi_{,\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,,\\
\chi_{,\mu\nu} &\to \chi^{x}_{,\mu\nu} = \chi_{,\mu\nu} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}\,\chi_{,\mu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu\nu}\,\chi_{,\varrho} - \chi_{,\mu\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,.
\end{aligned} \tag{A 5}$$

Wir haben also zu zeigen

$$\begin{aligned}
&-2\,\chi^{x,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi^{x} + \psi^{x\nu}_{\nu}\,\chi^{x,\mu}_{\mu} + \psi^{x\nu}_{\nu}\,m^2\,\chi^{x} - 2\,\psi^{x\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi^{x}_{,\nu} - 2\,\psi^{x\mu\nu}\,\chi^{x}_{,\mu\nu}\\
&\qquad + \psi^{x\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{x,\nu} + [\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)]^{x} = o(\psi^3)\,.
\end{aligned} \tag{A 6}$$

Berücksichtigt man, daß es in zweiter Ordnung gleichgültig ist, ob man $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ mit (A 5) oder mit (A 2), (A 3) eicht, da $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ von zweiter Ordnung ist,

$$[\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)]^{x} = \overline{\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)} + o(\psi^3)\,,$$

so bleibt nach Subtraktion der vorausgesetzten Identität

$$-2\,\bar{\chi}^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\bar{\chi} + \bar{\psi}^{\nu}_{\nu}\,\bar{\chi}^{,\mu}_{\mu} + \bar{\psi}^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\bar{\chi} - 2\,\bar{\psi}^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\bar{\chi}_{,\nu} - 2\,\bar{\psi}^{\mu\nu}\,\bar{\chi}_{,\mu\nu} + \bar{\psi}^{\mu}_{\mu,\nu}\,\bar{\chi}^{,\nu} + \overline{\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)} = o(\psi^3) \qquad \text{(A 7)}$$

von (A 6) noch zu zeigen

$$\begin{aligned}2\,\chi^{,\mu}_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} &+ 2\,m^2\,\chi_{,\varrho}\,\Lambda^{\varrho} - \psi^{\nu}_{\nu,\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,\chi^{,\mu}_{\mu} - \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} - \psi^{\nu}_{\nu,\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,m^3\,\chi - \psi^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\chi_{,\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,\chi_{,\nu}\\ &+ 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,\chi_{,\mu\nu} + 2\,\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} - \psi^{\mu}_{\mu,\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho}\,\chi^{,\nu} - \psi^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu}_{\varrho}\,\Lambda^{\varrho} = o(\psi^3).\end{aligned} \qquad \text{(A 8)}$$

(A 8) läßt sich zusammenfassen zu der Beziehung

$$-\Lambda^{\varrho}\,\partial_{\varrho}(-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi + \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \psi^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\chi - 2\,\psi^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu} - 2\,\psi^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu} + \psi^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu}) = o(\psi^3), \qquad \text{(A 9)}$$

die wegen (A 4) richtig ist, q. e. d.

Wir wollen annehmen, daß $\psi_{\mu\nu} \to \psi^{x}_{\mu\nu}$ die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe endlicher Transformationen sind. (Da es schließlich möglich wird, die endlichen Transformationen anzugeben, ist diese Annahme gerechtfertigt.) Bezüglich der infinitesimalen Transformationen $\chi_{,\mu} \to \chi^{x}_{,\mu}$ haben wir im letzten Kapitel gezeigt, daß die durch sie definierten Vektorfelder eine Lie-Algebra bilden, womit auf Grund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Liesche Transformationsgruppen [18] bewiesen ist, daß $\chi_{,\mu} \to \chi^{x\mu}_{,}$ die infinitesimalen Elemente einer Gruppe endlicher Transformationen sind. Dasselbe läßt sich, ausgehend von (A 5), für $\chi \to \chi^{x}$ und $\chi_{,\mu\nu} \to \chi^{x}_{,\mu\nu}$ zeigen. Wir geben die endlichen Transformationen symbolisch an

$$\begin{aligned}\psi_{\mu\nu} &\to T_{\psi}(\Lambda)\,\psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} + y_{\mu\nu}(\psi,\Lambda) - \psi_{\mu\nu,\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + o_1(\Lambda^2),\\ \chi &\to T_{\chi}(\Lambda)\,\chi = \chi - \chi_{,\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + o_2(\Lambda^2),\\ \chi_{,\mu} &\to T_{\chi,\mu}(\Lambda)\,\chi_{,\mu} = \chi_{,\mu} - \chi_{,\nu}\,\Lambda^{\nu,}{}_{\mu} - \chi_{,\mu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + o_3(\Lambda^2),\\ \chi_{,\mu\nu} &\to T_{\chi,\mu\nu}(\Lambda)\,\chi_{,\mu\nu} = \chi_{,\mu\nu} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\nu}\,\chi_{,\mu\varrho} - \Lambda^{\varrho,}{}_{\mu\nu}\,\chi_{,\varrho} - \chi_{,\mu\nu\varrho}\,\Lambda^{\varrho} + o_4(\Lambda^2)\end{aligned} \qquad \text{(A 10)}$$

(Λ ist hier zwar „endlich", aber natürlich immer noch von der Ordnung ψ). Bekanntlich [21] folgt aus der Invarianz von (A 4) unter (A 5) die Invarianz von (A 4) unter den von (A 5) erzeugten endlichen Transformationen (A 10). Wenn wir die zu $T(\Lambda)$ inversen Transformationen mit $T(\Lambda)^{-1}$ bezeichnen, bleibt also die Bewegungsgleichung zweiter Ordnung (A 4) bei gleichzeitiger Anwendung von $T(\underset{2}{\Lambda})\,T(\underset{1}{\Lambda})\,T(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\,T(\underset{1}{\Lambda})^{-1}$ auf alle Feldgrößen invariant. Dies bedeutet explizit

$$-2\,\tilde{\chi}^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\tilde{\chi} + \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\,\tilde{\chi}^{,\mu}_{\mu} + \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\,m^2\,\tilde{\chi} - 2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\tilde{\chi}_{,\nu} - 2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu}\,\tilde{\chi}_{,\mu\nu} + \tilde{\psi}^{\mu}_{\mu,\nu}\,\tilde{\chi}^{,\nu} + \widetilde{\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)} = o(\psi^3), \qquad \text{(A 11)}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\mu\nu} &= T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})\,T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})\,T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\,T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\,\psi_{\mu\nu},\\ \tilde{\chi} &= T_{\chi}(\underset{2}{\Lambda})\,T_{\chi}(\underset{1}{\Lambda})\,T_{\chi}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\,T_{\chi}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\,\chi,\\ \tilde{\chi}_{,\mu} &= T_{\chi,\mu}(\underset{2}{\Lambda})\,T_{\chi,\mu}(\underset{1}{\Lambda})\,T_{\chi,\mu}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\,T_{\chi,\mu}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\,\chi_{,\mu},\\ \tilde{\chi}_{,\mu\nu} &= T_{\chi,\mu\nu}(\underset{2}{\Lambda})\,T_{\chi,\mu\nu}(\underset{1}{\Lambda})\,T_{\chi,\mu\nu}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\,T_{\chi,\mu\nu}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\,\chi_{,\mu\nu}\end{aligned} \qquad \text{(A 12)}$$

gesetzt haben. $\widetilde{\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)}$ ist der bei der Transformation (A 12) aus $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ entstehende Ausdruck. Wichtig für das Folgende ist die Überlegung, daß $\widetilde{\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)}$ und $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ in zweiter Ordnung übereinstimmen: Das Materiefeld χ und seine Ableitungen werden bei Anwendung von (A 12) in $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ überhaupt nicht transformiert, denn die Eichzusätze in $T_{\chi}(\Lambda)\,\chi$, $T_{\chi,\mu}(\Lambda)\,\chi_{,\mu}$, $T_{\chi,\mu\nu}(\Lambda)\,\chi_{,\mu\nu}$ sind von der nächsthöheren Ordnung und ergeben Terme dritter Ordnung, da $\varepsilon(\chi)\,L(\psi,\xi,\chi)$ von zweiter Ordnung ist. Dasselbe gilt für das ξ-Feld [vgl. die Bemerkung im Anschluß an Gl. (41)]. Lediglich die Transformationen von $\psi_{\mu\nu}$ und seinen Ableitungen liefern zu berücksichtigende Beiträge zweiter Ordnung, nämlich die von den Eichzusätzen $\Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}$ herrührenden Terme [für die höheren Glieder in $T_{\psi}(\Lambda)\,\psi_{\mu\nu}$ gilt das obige Argument]. Die Transformationen erster Ordnung

$$\psi_{\mu\nu} \to T^{1\cdot}_{\psi}(\Lambda)\,\psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \qquad \text{(A 13)}$$

sind aber kommutativ, so daß wir insgesamt

$$T^{1\cdot}_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})\, T^{1\cdot}_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})\, T^{1\cdot}_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\, T^{1\cdot}_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} \tag{A 14}$$

erhalten $[T^{1\cdot}_{\psi}(\Lambda)^{-1}\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu,\nu} - \Lambda_{\nu,\mu}]$. Es gilt also

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + o(\psi^2) \tag{A 15}$$

und daher

$$\widetilde{\varepsilon(\chi)\, L(\psi, \xi, \chi)} = \varepsilon(\chi)\, L(\psi, \xi, \chi) + o(\psi^3). \tag{A 16}$$

Weiterhin lassen sich $\tilde{\chi}$, $\tilde{\chi}_{,\mu}$, $\tilde{\chi}_{,\mu\nu}$ angeben. Unter Berücksichtigung des bekannten Zusammenhanges zwischen dem Kommutator der Gruppe $T(\underset{2}{\Lambda})\, T(\underset{1}{\Lambda})\, T(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\, T(\underset{1}{\Lambda})^{-1}$ und der Kommutatordefinition in der zugehörigen Lie-Algebra der Vektorfelder erhalten wir aus der Strukturuntersuchung im letzten Kapitel das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi} &= \chi - \chi_{,\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho} + o(\psi^3),\\
\tilde{\chi}_{,\mu} &= \chi_{,\mu} - \chi_{,\nu}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\nu,}{}_{\mu} - \chi_{,\mu\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho} + o(\psi^3),\\
\tilde{\chi}_{,\mu\nu} &= \chi_{,\mu\nu} - \chi_{,\nu\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho,}{}_{\mu} - \chi_{,\mu\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho,}{}_{\nu} - \chi_{,\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho,}{}_{\mu\nu} - \chi_{,\mu\nu\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho} + o(\psi^3),
\end{aligned} \tag{A 17}$$

wobei $[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho}$ durch Gl. (146) gegeben ist [(A 17) läßt sich auch mit (A 10) unmittelbar nachprüfen]. Unter Beachtung von z. B.

$$\tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\, \tilde{\chi}^{,\mu}_{\mu} = \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\, (\chi^{,\mu}_{\mu} + o(\psi^2)) = \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\, \chi^{,\mu}_{\mu} + o(\psi^3) \tag{A 18}$$

ergibt Einsetzen von (A 17) in (A 11)

$$\begin{aligned}
&-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} + 4\,\chi^{,\mu}_{\nu}\,[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\nu,}{}_{\mu} + 2\,\chi^{,\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]_{\varrho,}{}^{\mu}_{\mu} + 2\,\chi^{,\mu}_{\mu\varrho}\,[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho}\\
&-2\,m^2\,\chi + 2\,m^2\,\chi_{,\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho} + \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\, m^2\,\chi - 2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu}\\
&-2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu} + \tilde{\psi}^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu} + \varepsilon(\chi)\, L(\psi, \xi, \chi) = o(\psi^3).
\end{aligned} \tag{A 19}$$

Wegen (A 4) gilt

$$-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi = o(\psi). \tag{A 20}$$

Daraus folgt

$$-[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho}\, \partial_{\varrho}(-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi) = 2[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho}\,\chi^{,\mu}_{\mu\varrho} + 2\,m^2[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\varrho}\,\chi_{,\varrho} = o(\psi^3) \tag{A 21}$$

und

$$\tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\, m^2\,\chi = \tilde{\psi}^{\nu}_{\nu}\,(\chi^{,\mu}_{\mu} + m^2\,\chi) = (\psi^{\nu}_{\nu} + o(\psi^2))\,(\chi^{,\mu}_{\mu} + m^2\,\chi) = \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \psi^{\nu}_{\nu}\, m^2\,\chi + o(\psi^3) \tag{A 22}$$

[vgl. (A 15)]. Mit (A 21) und (A 22) wird (A 19)

$$\begin{aligned}
&-2\,\chi^{,\mu}_{\mu} + 4\,\chi^{,\mu}_{\nu}\,[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]^{\nu,}{}_{\mu} + 2\,\chi^{,\varrho}[\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]_{\varrho,}{}^{\mu}_{\mu} - 2\,m^2\,\chi\\
&\quad + \psi^{\nu}_{\nu}\,\chi^{,\mu}_{\mu} + \psi^{\nu}_{\nu}\, m^2\,\chi - 2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu,}{}_{\mu}\,\chi_{,\nu} - 2\,\tilde{\psi}^{\mu\nu}\,\chi_{,\mu\nu} + \tilde{\psi}^{\mu}_{\mu,\nu}\,\chi^{,\nu} + \varepsilon(\chi)\, L(\psi, \xi, \chi) = o(\psi^3).
\end{aligned} \tag{A 23}$$

Der Kommutator $T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})\, T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})\, T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\, T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}$ ist ein Gruppenelement $T_{\psi}(\Lambda)$ mit einem bestimmten Λ. Man sieht leicht, daß

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} \equiv T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})\, T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})\, T_{\psi}(\underset{2}{\Lambda})^{-1}\, T_{\psi}(\underset{1}{\Lambda})^{-1}\, \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + [\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]_{\mu,\nu} + [\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}]_{\nu,\mu} + o(\psi^3) \tag{A 24}$$

gesetzt werden muß [vgl. (A 15)], damit (A 23) äquivalent zu (A 4) wird. Mit (A 24) ist die Struktur der Eichgruppe von $\psi_{\mu\nu}$ festgelegt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. P. MITTELSTAEDT für das Thema, seine Anregungen und sein Interesse.