

## NOTIZEN

# Bemerkungen zur Berechnung des anharmonischen Oszillators mittels funktionaler Integration

G. RÖPKE

Institut für theoretische Physik der Technischen Universität  
Dresden

(Z. Naturforsch. 23 a, 610 [1968]; eingegangen am 13. Dezember 1967)

## 1.

In <sup>1</sup> wurde eine Reihe (V) angegeben, die die Abhängigkeit des funktionalen Integrals vom Gitterabstand  $\varepsilon$  beseitigt. Sicher gibt es noch andere, die das gleiche leisten, und die darüber hinaus ein besseres Konvergenzverhalten zeigen. In Abschnitt 4 wurde  $\chi(0)$  mit einer Reihe umgeformt, das Ergebnis zeigte keine zumindest asymptotische Konvergenz gegen den exakten Wert  $0,2873 \, 1/\sqrt[3]{\mu \lambda}$ . Besser geeignet ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i \varepsilon \lambda}^{\nu}} \left( \frac{\mu}{i \varepsilon} \right)^{\nu-1} \left( 1 + \frac{\mu}{\sqrt[3]{i^3 \varepsilon^3 \lambda}} \right)^{2/3-\nu} A_{\nu}, \quad (1)$$

welche im  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

$$\chi(0) = (0,338 - 0,023 - 0,021 - 0,008 - 0,001 + 0,001 + 0,001 + \dots) \sqrt[3]{\frac{1}{\mu \lambda}} \quad (2)$$

liefert. Außerdem ist das analytische Verhalten in der komplexen  $\varepsilon$ -Ebene besser. Mit einer analogen Reihe läßt sich auch die Größe  $\alpha$  (IV) behandeln.

## 2.

Eine weitere Freiheit besteht darin, etwa  $\mu$  durch  $c \mu$  zu ersetzen, wodurch das Konvergenzverhalten der Reihe (2) wesentlich verändert werden kann. Zweck-

mäßig ist eine Bestimmung von  $c$  aus dem asymptotischen Wert des Quotienten der Reihe, die durch den Ansatz (1) umgeformt werden soll, oder aus der Bedingung, daß bei endlich vielen Gliedern der Reihe das letzte  $A_{\nu}$  verschwinden soll. Als Beispiel ergeben schon die ersten beiden Glieder der Reihe für  $\alpha$  (IV):

$$\alpha = 0,338 \frac{\sqrt[3]{i \varepsilon}}{\sqrt[3]{\lambda}} + 0,0927 \frac{\mu}{i \varepsilon \lambda} \mp \dots = 0,338 \frac{\sqrt[3]{i \varepsilon}}{\sqrt[3]{\lambda}} \cdot \left( 1 + 0,822 \frac{\mu}{\sqrt[3]{i^3 \varepsilon^3 \lambda}} \right)^{1/3} \pm \dots,$$

$\lim \varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\alpha = 0,338 \sqrt[3]{0,822} \sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda^2}} = 0,316 \sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda^2}}; \quad \omega_{10} \approx \sqrt[3]{\frac{1}{\mu \alpha}} = 1,78 \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\mu^2}}.$$

## 3.

Man kann außerdem die Glieder mit positiven  $\varepsilon$ -Potenzen verändern, da sie im  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  nichts beitragen. In <sup>2</sup> wird untersucht, ob man nach Streichen dieser Glieder bei der Behandlung  $\varepsilon$ -abhängiger Reihen zum gleichen Ergebnis gelangt, dort Formel (24), (36) und (42). In der Tat läßt sich zeigen, daß der Koeffizient von  $A_1$  immer stärker oszilliert, der Reihe läßt sich nicht aus endlich vielen Gliedern ein Wert zuordnen. Man kann dieses divergente Verhalten an den Gliedern  $2^n - 1$  zeigen. Es ist hier besser, erst die gesamte Reihe umzuformen und dann den  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  durchzuführen. Letztlich entscheidend für die Brauchbarkeit einer partiellen Aufsummation zur Beseitigung der  $\varepsilon$ -Abhängigkeit ist das Verhalten der dabei entstehenden Reihe, ob sie nämlich in den berechneten Gliedern eine rasche, zumindest asymptotische, Konvergenz zeigt.

<sup>1</sup> G. RÖPKE, Z. Naturforsch. 22 a, 860 [1967].

<sup>2</sup> M. HOFFMANN, Z. Naturforsch. 22 a, 1198 [1967].