

Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung

M. STEENBECK, F. KRAUSE und K.-H. RÄDLER

Institut für Magnetohydrodynamik Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforschg. 21 a, 369—376 [1966]; eingegangen am 11. November 1965)

A turbulent, electrically conducting fluid containing a magnetic field with non-vanishing mean-value is investigated. The magnetic field strength and the conductivity may be so small that the turbulence is not influenced by the action of the LORENTZ force.

The average of the crossproduct of velocity and magnetic field is calculated in a second approximation. It contains the averages of the products of two components of the velocity field, i. e. the components of the correlation tensor.

Here the structure of the correlation tensor is determined for a medium with gradients of density and/or turbulence intensity, furthermore the turbulent motion is influenced by CORIOLIS forces.

As the main result is shown that in those turbulent velocity fields the average crossproduct of velocity and magnetic field generally has a non-vanishing component *parallel* to the average magnetic field.

Such a turbulence may be present in rotating stars. Consequences concerning the selfexcited build up of steller magnetic fields are discussed in a following paper.

1. Einleitung

Wir betrachten ein fluides elektrisch leitendes Medium, das sich in turbulenter Bewegung befindet. Seine mittlere Geschwindigkeit sei gleich Null. Es enthalte ein Magnetfeld, dessen Mittelwert nicht verschwindet.

Wir setzen dieses Magnetfeld als so schwach voraus, daß der Einfluß der LORENTZ-Kraft auf die Bewegung unberücksichtigt bleiben kann. Insbesondere muß dann die Magnetfelddiffusion hinreichend stark sein, so daß auch durch die Induktionswirkung der turbulenten Bewegung keine zu hohen Magnetfelder und LORENTZ-Kräfte geschaffen werden.

Unter diesen Voraussetzungen erscheint es möglich, eine Elektrodynamik für die Mittelwerte* der fluktuierenden Feldgrößen aufzubauen. Es seien $\mathbf{B}$ und $\mathbf{\zeta}$ magnetische Feldstärke und Kraftflußdichte, $\mathbf{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathbf{i}$ die elektrische Stromdichte und $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Mediums, ferner μ seine Permeabilität und σ seine Leitfähigkeit. Da die MAXWELL-Gleichungen lineare Verknüpfungen dieser Größen darstellen, gelten sie auch für ihre Mittelwerte, also

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{\zeta} = \mathbf{i}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Die Materialgleichungen enthalten aber einen nicht-linearen Term. Es gilt

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{\zeta}, \quad \mathbf{i} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2)$$

Im allgemeinen ist $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \neq \overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}}$. Es ist also zu erwarten, daß in turbulenten Medien für die mittleren Feldgrößen an Stelle des OHMSchen Gesetzes eine andere Verknüpfung auftritt.

Im einfachsten Falle ändert sich der Wert von σ ¹. Diese Vorstellung stimmt damit überein, daß gewisse astrophysikalische Beobachtungen nur dann erklärt werden können, wenn die magnetische Diffusivität $1/(\mu \sigma)$ im turbulenten Medium erheblich größer angesetzt wird, als sie sich für ein ruhendes Medium ergibt².

Die Berechnung des Mittelwertes von $\mathbf{\zeta}$ führen wir in der folgenden Weise durch: Wir setzen

$$\mathbf{\zeta} = \overline{\mathbf{\zeta}} + \mathbf{\zeta}' \quad (3)$$

und berechnen $\mathbf{\zeta}'$ im Sinne einer Störungsrechnung für kleine $|\mathbf{v}|$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{\zeta}'}{\partial t} - \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{\zeta}' = \text{rot}(\mathbf{v} \times \overline{\mathbf{\zeta}}). \quad (4)$$

* Mittelwertbildungen sind stets im Sinne eines statistischen Mittels zu verstehen.

¹ Eine in Vorbereitung befindliche Arbeit soll zeigen, daß es konsequenter ist, $\mathbf{\zeta}$ und $\mathbf{i}$ durch etwas anders gebildete Größen zu ersetzen und auch eine neue Permeabilität zu erklären. Für das Ziel der vorliegenden Arbeit ist dies aber belanglos.

² W. M. ELSASSER, Rev. Mod. Phys. 28, 28 [1956]. — M. STEENBECK, Beitr. Plasmaphys. 1, 153 [1960/61]; Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin 5, 625 [1963]. — H. W. BABCOCK, Astrophys. J. 133, 572 [1961]. — F. KRAUSE, Stellar and Solar Magnetic Fields, ed. R. LÜST, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, p. 426.

Es ergibt sich

$$H'_i(x, t) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \cdot \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial x'_j} (v_l(x', t') \bar{H}_m(x', t')) \cdot \Gamma(x - x', t - t') d\mathbf{x}' dt',$$

wobei Γ die Funktion

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{\mu \sigma}{4 \pi t} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\mu \sigma}{4 t} x_l x_l \right\}$$

und $d\mathbf{x}'$ das Volumenelement bedeuten. Wenn bei einem Integral keine Grenzen angegeben sind, soll die Integration stets über den ganzen Raum erstreckt werden. Wie üblich bezeichnet δ_{ik} den Einheitstensor; über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren.

In dieser Näherung finden wir

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{v} \times \vec{\mathfrak{S}})}_i &= \overline{(\mathbf{v} \times \vec{\mathfrak{S}}')}_i = \varepsilon_{ijk} \overline{v_j(x, t) H'_k(x, t)} \\ &= (\varepsilon_{ijl} \delta_{nm} - \varepsilon_{ijm} \delta_{nl}) \\ &\cdot \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial x'_n} (v_l(x', t') v_j(x, t) \bar{H}_m(x', t')) \\ &\cdot \Gamma(x - x', t - t') d\mathbf{x}' dt'; \end{aligned}$$

ε_{ijk} bezeichnet den vollständig antisymmetrischen Tensor dritter Stufe mit $\varepsilon_{123} = 1$ für ein Rechtssystem.

Unter dem Integral erscheint der Korrelationstensor

$$R_{jl}(x, x', t, t') = \overline{v_j(x, t) v_l(x', t')}. \quad (5)$$

Wir schreiben also

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{v} \times \vec{\mathfrak{S}})}_i &= (\varepsilon_{ijl} \delta_{nm} - \varepsilon_{ijm} \delta_{nl}) \\ &\cdot \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial x'_n} (R_{jl}(x, x', t, t') \bar{H}_m(x', t')) \\ &\cdot \Gamma(x - x', t - t') d\mathbf{x}' dt' \quad (6) \end{aligned}$$

und sehen, daß die „Materialeigenschaften“ des turbulenten Mediums durch die Struktur des Korrelationstensors (5) festgelegt werden.

Im einfachsten Falle einer homogenen isotropen Turbulenz zeigt sich auf diesem Wege tatsächlich eine Erhöhung des magnetischen Diffusionskoeffizienten. Eine ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen erfolgt in einer späteren Arbeit¹.

Im Hinblick auf besonders interessante Aspekte bezüglich der Entstehung des irdischen und der stellaren Magnetfelder soll hier eine andere Form der Turbulenz behandelt werden. Es sei ein Gradient

der Turbulenzintensität und (oder) ein barometrischer Druckgradient vorhanden; ferner unterliege die turbulente Bewegung CORIOLIS-Kräften.

Für dieses Turbulenzfeld benutzen wir einen Ansatz, der durch Integration der vereinfachten NAVIER-STOKESSchen Gleichung gewonnen wird.

Als wesentliches Ergebnis erscheint dann eine nichtverschwindende Komponente von

$$\overline{\mathbf{v} \times \vec{\mathfrak{S}}} = \mu \overline{\mathbf{v} \times \vec{\mathfrak{S}}}$$

in Richtung von $\vec{\mathfrak{S}}$, nach der zweiten Gl. (2) also eine Komponente von $\vec{\mathfrak{S}}$ in Richtung von $\vec{\mathfrak{S}}$.

Um die Bedeutung dessen herauszustellen, betrachten wir das in Abb. 1 dargestellte, stark idealisierte Modell. In den beiden Ringen sollen die geschilderten Verhältnisse herrschen. Der Einfachheit halber wird ihre Umgebung als elektrisch und ma-

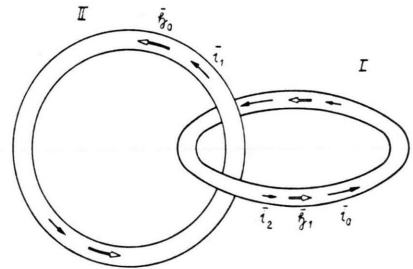


Abb. 1. Modell zur Veranschaulichung der Selbsterregung elektromagnetischer Felder infolge Turbulenz.

gnetisch schwach leitend angenommen. Wir gehen von einem Strom i_0 im Ring (I) aus, der von einem Magnetfeld $\vec{\mathfrak{S}}_0$ im Ring (II) begleitet wird. Letzteres zieht dort den Strom i_1 und dieser wieder das Feld $\vec{\mathfrak{S}}_1$ im Ring (I) nach sich. $\vec{\mathfrak{S}}_1$ bedingt den Strom i_2 , der den ursprünglichen i_0 verstärkt. Diese Feststellung ist unabhängig davon, ob $\vec{\mathfrak{S}}_0$ und i_1 sowie $\vec{\mathfrak{S}}_1$ und i_2 parallel (wie in der Figur) oder antiparallel sind.

Auf diese Weise wird es möglich, daß Ströme und Magnetfelder trotz OHMScher Verluste nicht abklingen oder sogar im Laufe der Zeit verstärkt werden. Natürlich handelt es sich dabei nicht um ein perpetuum mobile, da die Energie für Aufrechterhaltung oder Verstärkung des elektromagnetischen Feldes aus der turbulenten Bewegung entnommen wird. Das Anwachsen des Magnetfeldes wird schließlich durch seine Rückwirkung auf die Turbulenz begrenzt, die in unseren Betrachtungen unberücksichtigt bleibt.

Es liegt nahe, diese Erkenntnis für die Erklärung des irdischen und der stellaren Magnetfelder heranzuziehen. Darüber soll in einer anschließenden Arbeit berichtet werden.

2. Beschreibung des Turbulenzfeldes

Wir stellen uns vor, daß das fluide Medium im Mittel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse rotiert und beziehen uns auf ein mitrotierendes Koordinatensystem. Für die in diesem gemessene Geschwindigkeit gilt dann, wie eingangs verlangt, $\bar{v} = 0$. Im übrigen ist ihr Verhalten mit einer durch CORIOLIS- und Zentrifugalkraft ergänzten NAVIER-STOKESSchen Gleichung

$$\varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \text{ grad}) v \right) = 2 \varrho v \times \omega - \varrho (\omega^2 r - (\omega r) \omega) - \text{grad } p + \tilde{\mathfrak{F}} + \Re(v) \quad (7)$$

zu beschreiben; dabei bezeichnen t die Zeit, $r = (x_i)$ den Ortsvektor, ϱ die Dichte, $\Re(v)$ die (in v linearen) Reibungskräfte und $\tilde{\mathfrak{F}}$ irgendwelche äußeren Kräfte, auf die wir nicht näher einzugehen brauchen. Neben (7) muß die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } \varrho v = 0 \quad (8)$$

gelten. Die Dichte weise im Mittel eine barometrische Verteilung

$$\bar{\varrho}(x) = \varrho_0 \exp\{-a \lambda r\} \quad (9)$$

auf, wobei a und ϱ_0 Konstanten sind. λ nehmen wir als konstanten Vektor mit $\lambda^2 = 1$ an; damit verzichten wir auf eine Diskussion der Effekte, die durch die räumlichen Änderungen des Dichtegradienten hervorgerufen werden.

Um das wesentliche Ergebnis herauszustellen, gehen wir zu vereinfachenden Voraussetzungen über.

In Gl. (8) vernachlässigen wir das Glied $\partial \varrho / \partial t$. Bezeichnet L eine für die räumliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes charakteristische Länge und T eine entsprechende Zeit, so ist dies erlaubt, falls

$$L/T \ll c_s \quad (10)$$

gilt; c_s bezeichnet die Schallgeschwindigkeit. Wir sehen also die turbulente Bewegung als zeitlich so langsam veränderlich an, daß es nirgendwo zu grö-

ßeren Kompressionen kommt. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\varrho = \bar{\varrho} = \varrho_0 \exp\{-a \lambda r\}. \quad (11)$$

Definitionsgemäß sind L und T von den später zu verwendenden Größen Korrelationslänge und Korrelationszeit jedenfalls größenordnungsmäßig nicht verschieden. Wir werden sie daher im folgenden auch in dieser Bedeutung verwenden.

Unser Interesse gilt der Beeinflussung der Bewegung durch die Rotation. Wir stellen uns vor, daß ohne Rotation ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld v_0 vorhanden sei und berechnen die in ω lineare Störung v_1 , die durch die Rotation hervorgerufen wird. Für v_1 folgt aus (7) durch Linearisierung

$$\varrho \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \text{ grad}) v_0 + (v_0 \text{ grad}) v_1 \right\} = 2 \varrho v_0 \times \omega - \text{grad } p_1 + \Re(v_1) \quad (12)$$

und aus (8) und (11)

$$\text{div } \varrho v_1 = 0. \quad (13)$$

(12) wird weiterhin dadurch vereinfacht, daß wir auf der linken Seite die Terme $(v_0 \text{ grad}) v_1$ und $(v_1 \text{ grad}) v_0$ streichen. Das ist unter der Voraussetzung

$$|v_0| \ll L/T \quad (14)$$

möglich. Ferner wird die Viskosität des Mediums so klein vorausgesetzt, daß wir von einer Berücksichtigung des Reibungstermes in den uns interessierenden Zeitintervallen von der Größenordnung der Korrelationszeit verzichten können. (12) reduziert sich mit (11) dann auf

$$\frac{\partial \varrho v_1}{\partial t} = 2 \varrho v_0 \times \omega - \text{grad } p_1. \quad (15)$$

Unter v_0 wollen wir ein Zufallsfeld verstehen, das die Vorzugsrichtung λ auf Grund des Dichtegradienten und (oder) einen zu λ parallelen Gradienten der Turbulenzintensität besitzt. Demzufolge wird angenommen

$$\varrho v_0 = \varrho_0 \text{ rot rot} \{ \mathfrak{U} \exp\{-(a+b) \lambda r\} \}; \quad (16)$$

wobei $\mathfrak{U}$ ein homogenes isotropes Zufallsfeld ist. $v_{\text{eff}} = \sqrt{v^2}$ erweist sich dann als proportional zu $\exp(-b \lambda r)$.

Mit dem Ansatz (16) können wir der Gl. (15) die Form

$$\frac{\partial \varrho v_1}{\partial t} = -2 \varrho_0 \text{ rot} (\omega \times \text{rot } \mathfrak{U} \exp\{-(a+b) \lambda r\}) - \text{grad} (p_1 + 2 \varrho_0 \omega \text{ rot } \mathfrak{U} \exp\{-(a+b) \lambda r\}) \quad (17)$$

geben. Die linke Seite dieser Gleichung und der erste Term auf der rechten Seite sind quellenfrei. Folglich ist der zweite Term auf der rechten Seite, der einen Gradienten darstellt, nur dann von Null verschieden, wenn er eine im Unendlichen liegende Quelle besitzt, was wir aber ausschließen dürfen. Dann ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{v}_1}{\partial t} = -2 \varrho_0 \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A} \exp\{-(a+b) \lambda \mathfrak{r}\}) \quad (18)$$

mit dem Integral
$$\varrho \mathbf{v}_1(\mathfrak{r}, t) = -2 \varrho_0 \operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \operatorname{rot} \int_t^{\mathfrak{r}} \mathfrak{A}(\mathfrak{r}, \tau) d\tau \exp\{-(a+b) \lambda \mathfrak{r}\}]. \quad (19)$$

Wir lassen die untere Grenze an dieser Stelle offen. Wir haben uns vorzustellen, daß die Integration von einem solchen zurückliegenden Zeitpunkt t_1 an zu erfolgen hat, so daß zum Zeitpunkt t noch eine gewisse „Erinnerung“ an den Zustand zur Zeit t_1 vorhanden ist. Es ist also etwa an einen um die Korrelationszeit zurückliegenden Zeitpunkt, d. h. $t_1 = t - T$, zu denken.

3. Berechnung des Korrelationstensors³

Es sei eine Bemerkung über die FOURIER-Zerlegung eines homogenen Zufallsfeldes – für den Augenblick mit $\mathfrak{w} = (w_i)$ bezeichnet – vorangestellt.

Wegen der Homogenität kann $\mathfrak{w}$ nicht unmittelbar durch ein FOURIER-Integral dargestellt werden, wohl aber das Feld $\mathfrak{w}^{(A)}$, das gleich $\mathfrak{w}$ innerhalb eines Würfels ist, der von den Ebenen $x_i = \pm A$ begrenzt wird, und gleich Null außerhalb. Es gilt also

$$w_i^{(A)}(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{w}_i^{(A)}(h, t) \exp\{i h_m x_m\} d\mathbf{h}; \quad (20)$$

dabei bezeichnen (h_1, h_2, h_3) die Koordinaten im h -Raum, $d\mathbf{h}$ das Volumenelement und $\tilde{w}_i^{(A)}(h, t)$ das FOURIER-transformierte Feld; die Symbole x bzw. h als Argumente von Funktionen kennzeichnen die Abhängigkeit von dem entsprechenden Koordinatentripel. Es ergibt sich

$$\overline{w_i^{(A)}(x, t) w_k^{(A)}(x + x', t + t')} = (2\pi)^{-3/2} \iint \tilde{w}_i^{(A)}(h, t) \tilde{w}_k^{(A)}(h', t + t') \exp\{i(h_m + h'_m) x_m\} \exp\{i h'_n x'_n\} d\mathbf{h} d\mathbf{h}'. \quad (21)$$

Für $A \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite gegen den Korrelationstensor

$$W_{ik}(x', t') = \overline{w_i(x, t) w_k(x + x', t + t')}, \quad (22)$$

der auf Grund der vorausgesetzten Homogenität des Zufallsfeldes von x und t unabhängig ist. Die rechte Seite von (21) ist aber nur genau dann von x unabhängig, wenn

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \overline{\tilde{w}_i^{(A)}(h, t) \tilde{w}_k^{(A)}(h', t + t')} = \delta(h + h') (2\pi)^{3/2} \tilde{W}_{ik}(h', t') \quad (23)$$

gilt; $\delta(h)$ bezeichnet die DIRACSche δ -Funktion, $(2\pi)^{3/2}$ ist zur Normierung eingeführt. Damit ergibt sich durch Integration über h aus (21)

$$W_{ik}(x', t') = (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{W}_{ik}(h', t') \exp\{i h'_m x'_m\} d\mathbf{h}'; \quad (24)$$

der in (23) definierte Tensor $\tilde{W}_{ik}$ erweist sich also als der FOURIER-transformierte Korrelationstensor.

Im einfachsten Falle, nämlich dann, wenn die räumliche und die zeitliche Korrelation voneinander unabhängig sind, gilt

$$W_{ik}(x', t') = W_{ik}(x') f(t'), \quad \tilde{W}_{ik}(h', t') = \tilde{W}_{ik}(h') f(t'); \quad (25)$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f(t')$ als dimensionslos mit $f(0) = 1$ annehmen.

³ Für eine eingehende Erläuterung der hier verwendeten Begriffe und der Eigenschaften von Zufallsfeldern sei auf entsprechende Lehrbücher verwiesen, z. B. G. K. BATCHELOR, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, London 1956.

Aus (16) und (19) ergibt sich für das Geschwindigkeitsfeld $v = v_0 + v_1$

$$v_i(x, t) = \exp\{-b \lambda_r x_r\} \left\{ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) ((a+b)^2 \lambda_j \lambda_l A_m(x, t) - (a+b) (\lambda_j A_{m,l}(x, t) + \lambda_l A_{m,j}(x, t)) + A_{m,jl}(x, t)) \right. \\ \left. + 2 \omega_j \varepsilon_{ilm} \int_0^t ((a+b)^2 \lambda_j \lambda_l A_m(x, \tau) - (a+b) (\lambda_j A_{m,l}(x, \tau) + \lambda_l A_{m,j}(x, \tau)) + A_{m,jl}(x, \tau)) d\tau \right\}; \quad (26)$$

Indizes nach einem Komma bedeuten Differentiation nach den entsprechenden Koordinaten. Eine FOURIER-Darstellung von v , wie sie eben geschildert wurde, ist also nach Abspaltung des Faktors $\exp(-b \lambda_r x_r)$ möglich. Mit

$$v_i^{(A)}(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \exp\{-b \lambda_r x_r\} \int \tilde{v}_i^{(A)}(h, t) \exp\{i h_n x_n\} dh, \quad (27)$$

$$A_m^{(A)}(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{A}_m^{(A)}(h, t) \exp\{i h_n x_n\} dh \quad (28)$$

ergibt sich

$$\tilde{v}_i^{(A)}(h, t) = ((a+b) \lambda_j - i h_j) ((a+b) \lambda_l - i h_l) \{ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \tilde{A}_m^{(A)}(h, t) + 2 \omega_j \varepsilon_{ilm} \int_0^t \tilde{A}_m^{(A)}(h, \tau) d\tau \}. \quad (29)$$

Verstehen wir unter $\Phi_{ik}(h)$ den Tensor, der durch eine FOURIER-Transformation aus dem mit $\exp\{2 b \lambda_r x_r\}$ multiplizierten Korrelationstensor R_{ik} des v -Feldes entsteht, und unter $\tilde{A}_{ik}(h)$ denjenigen, der durch eine FOURIER-Transformation aus dem Korrelationstensor $A_{ik}(x')$ des $\mathfrak{A}$ -Feldes entsteht, so folgt aus (29) in Verbindung mit (23), (24) und (25)

$$\Phi_{ik}(h) = ((a+b) \lambda_j - i h_j) ((a+b) \lambda_l - i h_l) ((a+b) \lambda_n + i h_n) ((a+b) \lambda_p + i h_p) \\ \cdot \{ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (\delta_{kn} \delta_{pq} - \delta_{kq} \delta_{pn}) \tilde{A}_{mq}(h) \\ + 2 \omega_p (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \varepsilon_{knq} \int_0^t \tilde{A}_{mq}(h) f(t-\tau) d\tau + 2 \omega_j (\delta_{kn} \delta_{pq} - \delta_{kq} \delta_{pn}) \varepsilon_{ilm} \int_0^t \tilde{A}_{mq}(h) f(t-\tau) d\tau \}. \quad (30)$$

Die Zeitintegration kann nun leicht ausgeführt werden. $f(t)$ beschreibt die zeitliche Korrelation des Geschwindigkeitsfeldes; $f(t)$ geht gegen Null für $t \rightarrow \infty$ und ist nur in dem Intervall $0 \leq t \leq T$ wesentlich von Null verschieden.

Die Integration ist etwa von $t-T$ an zu erstrecken; da eine weitere Vergrößerung des Integrationsintervalles am Wert des Integrales kaum etwas ändert, kann sie auch von $-\infty$ an erfolgen. Wir erhalten dann mit $\tau' = t - \tau$

$$\int_{-\infty}^t f(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau') d\tau'.$$

Entsprechend der Definition von f ist dieses Integral größenordnungsmäßig von T nicht verschieden. Da T aber ohnehin nur eine Größenordnung charakterisiert, können wir

$$\int_0^\infty f(\tau) d\tau = T \quad \text{setzen.} \quad (31)$$

$\mathfrak{A}$ ist als homogenes isotropes Zufallsfeld vorausgesetzt; demzufolge hat der Tensor $A_{mq}(h)$ die Form

$$\tilde{A}_{mq}(h) = F(h^2) \delta_{mq} + G(h^2) h_m h_q; \quad (32)$$

F und G sind Funktionen, die für $h^2 = h_r h_r \rightarrow \infty$ verschwinden. Die Größe des Bereiches, in dem sie wesentlich von Null verschieden sind, ist durch die reziproke Korrelationslänge ($\sqrt{h^2} \approx 1/L$) gegeben.

Wir vereinfachen die Ausrechnung von Φ_{ik} , indem wir nur Glieder bis zur ersten Ordnung in a und b berücksichtigen. Das bedeutet, daß a und b klein sind im Vergleich zu $1/L$. Aus (30) folgt mit (31), (32) und $a_j = 2 T \omega_j$

$$\Phi_{ik}(h) = F(h^2) [h^2 (h^2 \delta_{ik} - h_i h_k) - i(a+b) \{ h^2 (h_i \lambda_k - h_k \lambda_i) + 2(a_j h_j) (h_i \varepsilon_{klm} \lambda_l h_m - h_k \varepsilon_{ilm} \lambda_l h_m) \\ + 2(2(a_j h_j) (\lambda_l h_l) - (a_j \lambda_j) h^2) \varepsilon_{ikm} h_m - 2 h^2 (a_j h_j) \varepsilon_{ikm} \lambda_m \}]. \quad (33)$$

Der mit G behaftete Anteil tritt in dieser Näherung nicht in Erscheinung. Für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat gilt

$$\overline{v^2} = \overline{v_i(x, t) v_i(x, t)} = R_{ii} = \exp\{-2 b \lambda_r x_r\} (2 \pi)^{-3/2} \int \Phi_{ii}(h) \mathbf{d}h.$$

Aus (33) ergibt sich

$$\overline{v^2} = \exp\{-2 b \lambda_r x_r\} (2 \pi)^{-3/2} \int 2 F(h^2) h^4 \mathbf{d}h = \frac{4}{\sqrt{2} \pi} \exp\{-2 b \lambda_r x_r\} \int_0^\infty F(h^2) h^6 dh. \quad (34)$$

4. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke

Wir lösen hier nicht die in der Einleitung angegebene vollständige Gl. (4), sondern beschränken uns auf ein Medium mit so kleiner Leitfähigkeit, daß wir die elektromagnetischen Feldgrößen als stationär ansehen können. Es sei also

$$\mu \sigma L^2 \ll T; \quad (35)$$

damit reduziert sich (4) auf

$$\Delta \tilde{\zeta}' = -\mu \sigma \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \tilde{\zeta}). \quad (36)$$

$\tilde{\zeta}$ sei im folgenden homogen vorausgesetzt; dann erhalten wir aus (36)

$$\Delta H_i' = -\mu \sigma (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \bar{H}_m v_{l,j}. \quad (37)$$

Wir definieren entsprechend unserem Vorgehen im vorangehenden Abschnitt ein Feld $H_i'^{(A)}$ und setzen

$$H_i'^{(A)}(x, t) = (2 \pi)^{-3/2} \exp\{-b \lambda_r x_r\} \int \tilde{H}_i'^{(A)}(h, t) \exp\{i h_m x_m\} \mathbf{d}h. \quad (38)$$

In (37) ersetzen wir H_i' durch $H_i'^{(A)}$, v_l durch $v_l^{(A)}$, benutzen (27) und (38) und erhalten

$$\tilde{H}_i'^{(A)}(h, t) = \mu \sigma (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \bar{H}_m \frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \tilde{v}_l^{(A)}(h, t). \quad (39)$$

Wir bilden zunächst den Mittelwert des Kreuzproduktes von $v_i^{(A)}$ und $H_k^{(A)}$; es gilt nach (27), (38) und (39)

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{ik} v_q^{(A)}(x, t) H_k^{(A)}(x, t)} &= \mu \sigma (2 \pi)^{-3/2} \exp\{-2 b \lambda_r x_r\} (\varepsilon_{iql} \delta_{jm} - \varepsilon_{iqm} \delta_{jl}) \bar{H}_m \\ &\cdot \iint \frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \overline{\tilde{v}_l^{(A)}(h, t) \tilde{v}_q^{(A)}(h', t)} \exp\{i(h_n + h'_n) x_n\} \mathbf{d}h \mathbf{d}h'. \end{aligned}$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges $A \rightarrow \infty$ wird bei Berücksichtigung von (23) die Integration nach h' möglich. Es ergibt sich

$$\overline{\varepsilon_{ik} v_q(x, t) H_k(x, t)} = \mu \sigma (2 \pi)^{-3/2} \exp\{-2 b \lambda_r x_r\} (\varepsilon_{iql} \delta_{jm} - \varepsilon_{iqm} \delta_{jl}) \bar{H}_m \int \frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \Phi_{lq}(h) \mathbf{d}h. \quad (40)$$

Die Auswertung erfolgt wiederum nur bis zu linearen Gliedern in a und b .

Es folgt für den Integranden

$$\frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \Phi_{lq}(h) = i \frac{h_j}{h^2} \Phi_{lq}(h) + b \lambda_p \frac{1}{h^2} \left(-\delta_{jp} + 2 \frac{h_j h_p}{h^2} \right) \Phi_{lq}(h).$$

Aus (33) ergibt sich

$$\varepsilon_{iql} \Phi_{lq}(h) = -2 i (a + b) F(h^2) [h^2 \varepsilon_{ilq} \lambda_l h_q - 2 (a_k h_k) (\lambda_j h_j) h_i + 2 (a_k \lambda_k) h^2 h_i], \quad (41)$$

$$h_l \Phi_{lq}(h) = i (a + b) h^2 F(h^2) [(h_l \lambda_l) h_q - h^2 \lambda_q], \quad (42)$$

$$\lambda_l \Phi_{lq}(h) = h^2 F(h^2) [h^2 \lambda_q - (\lambda_l h_l) h_q] + i (a + b) [\dots]. \quad (43)$$

Damit erhalten wir als lineare Näherung in a und b

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{iql} \delta_{jm} - \varepsilon_{iqm} \delta_{jl}) \int \frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \Phi_{lq}(h) \mathbf{d}h \\ &= i \int (h_j / h^2) \varepsilon_{iql} \Phi_{lq} \mathbf{d}h - i \varepsilon_{iqm} \int (h_l \Phi_{lq} / h^2) \mathbf{d}h + b \varepsilon_{iqm} \int (\lambda_l \Phi_{lq} / h^2) \mathbf{d}h \\ &= 2(a + b) \int (h_m / h^2) F(h^2) [h^2 \varepsilon_{ilq} \lambda_l h_q - 2(a_k h_k) (\lambda_j h_j) h_i + 2(a_k \lambda_k) h^2 h_i] \mathbf{d}h \\ &+ (a + b) \varepsilon_{iqm} \int F(h^2) [(h_l \lambda_l) h_q - h^2 \lambda_q] \mathbf{d}h + b \varepsilon_{iqm} \int F(h^2) [h^2 \lambda_q - (\lambda_l h_l) h_q] \mathbf{d}h. \end{aligned}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten im h -Raum und Berücksichtigung von

$$\int_{EK} h_j h_k d\Omega = \frac{4}{3} \pi \delta_{jk}, \quad (44), \quad \int_{EK} h_j h_k h_l h_m d\Omega = \frac{4}{15} \pi (\delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}), \quad (45)$$

wobei EK die Einheitskugel und $d\Omega$ ihr Flächenelement bezeichnen, ergibt sich

$$(\varepsilon_{ijl} \delta_{jm} - \varepsilon_{iqm} \delta_{jl}) \int \frac{b \lambda_j - i h_j}{b^2 - 2 i b \lambda_p h_p - h^2} \Phi_{lq}(h) dh \\ = \left\{ \frac{8}{3} \pi b \varepsilon_{iqm} \lambda_q + \frac{16}{5} \pi (a+b) [4(a_k \lambda_k) \delta_{im} - (\lambda_m a_i + \lambda_i a_m)] \right\} \int_0^\infty F(h^2) h^4 dh. \quad (46)$$

(46) ist in (40) einzusetzen. In symbolischer Schreibweise lautet das Ergebnis

$$\overline{\mathbf{v} \times \mathfrak{S}} = \gamma \mu \sigma \sqrt{v^2} L^2 \left\{ -\frac{1}{3} \text{grad}(\log \sqrt{v^2}) \times \overline{\mathfrak{S}} \right. \\ \left. - \frac{4}{15} T [4(\boldsymbol{\omega} \text{grad}(\log \varrho \sqrt{v^2})) \overline{\mathfrak{S}} - (\overline{\mathfrak{S}} \boldsymbol{\omega}) \text{grad}(\log \varrho \sqrt{v^2}) - (\overline{\mathfrak{S}} \text{grad}(\log \varrho \sqrt{v^2})) \boldsymbol{\omega}] \right\}. \quad (47)$$

Mittels (34) wurde das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eingeführt. γ ist ein dimensionsloser Faktor von der Größenordnung 1 definiert durch

$$L^2 \gamma \int_0^\infty F(h^2) h^6 dh = \int_0^\infty F(h^2) h^4 dh. \quad (48)$$

Aus (34) folgt

$$\text{grad}(\log \sqrt{v^2}) = -b \boldsymbol{\lambda}, \quad (49)$$

und mit (11)

$$\text{grad}(\log \varrho \sqrt{v^2}) = -(a+b) \boldsymbol{\lambda}. \quad (50)$$

5. Veranschaulichung der Ergebnisse und Bemerkungen

1. Als wesentliches Ergebnis ist aus der Formel (47) zu entnehmen, daß der Mittelwert des Produktes $\mathbf{v} \times \mathfrak{S}$ eine im allgemeinen nicht verschwindende Komponente parallel zum mittleren Magnetfeld besitzt. Die Bedeutung dessen wurde in der Einleitung herausgestellt. Wir veranschaulichen nun dieses Ergebnis an einem einfachen Modell.

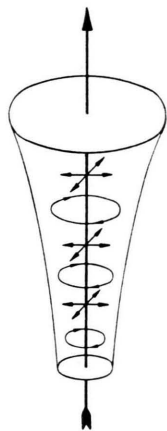


Abb. 2. Korrelierte Bewegungen bei Anwesenheit von Dichtegradient und CORIOLIS-Kräften.

Der Abb. 2 liegt die Vorstellung eines Mediums mit nach oben abnehmendem Druck zugrunde; ferner sei eine nicht verschwindende vertikale Komponente der Winkelgeschwindigkeit vorhanden. Wir betrachten ein Materievolumen, das gerade aufsteigt. Es gerät in Gebiete niedrigeren Druckes und dehnt sich aus. Es treten also Geschwindigkeiten senkrecht zur Rotation und damit Wirkungen von CORIOLIS-Kräften auf. Genau wie in einem meteorologischen Hoch führt dies zu einer Zirkulationsströmung. Es besteht also eine Korrelation zwischen der Vertikalgeschwindigkeit und der Zirkulation; beide ändern nur gemeinsam ihr Vorzeichen, da ein absinkendes Volumen komprimiert wird. Es ist also in diesem Turbulenzfeld ein Schraubensinn vor dem anderen ausgezeichnet.

In Abb. 3 ist die Vertikalgeschwindigkeit mit der dazugehörigen Zirkulation nochmals gezeichnet. Denken wir uns ein (homogenes) Magnetfeld in die Zeichenebene hineingerichtet. Die zirkuläre Strömung gibt dann mit diesem Magnetfeld eine LORENTZ-Feldstärke, wie sie die kurzen dicken Pfeile andeuten. Das durch die so entstehenden Wirbel-

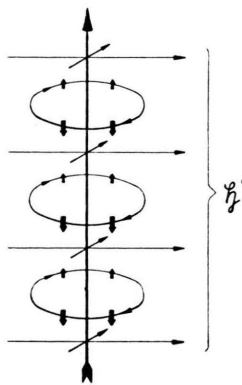


Abb. 3. Induktionswirkung der in Abb. 2 dargestellten Bewegung.

ströme verursachte Magnetfeld weist in der Zeichenebene von links nach rechts. Dieses Feld $\mathfrak{H}'$ erzeugt mit der vertikalen Strömung die in die Zeichenebene hineinweisende LORENTZ-Feldstärke, die nun parallel zum Ausgangsfeld ist.

Es sei bemerkt, daß das von PARKER⁴ beschriebene Verhalten eines Magnetfeldschlauches in einem wie oben bewegten Plasma denselben Sachverhalt veranschaulicht.

2. In den ersten Summanden von (47) geht nur der Gradient der Turbulenzintensität ein. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dieser Term die Tendenz widerspiegelt, Ströme zu erzeugen, die die zu $\text{grad}(\log \sqrt{v^2})$ senkrechte Komponente des mittleren Magnetfeldes verstärken.

Letzten Endes bedeutet dies, daß ein begrenztes Volumen, in dem das Medium in turbulenter Bewegung ist, ein diamagnetisches Verhalten zeigt. Es sei wiederum auf eine in Vorbereitung befindliche Arbeit verwiesen¹.

3. Die Berechnungen werden in dieser Arbeit unter verschiedenen einschränkenden Bedingungen durchgeführt. Diese Bedingungen teilen wir in zwei Gruppen auf: In der ersten Gruppe erfassen wir solche, die für unser Vorgehen charakteristisch sind; in der zweiten solche, die hier in dieser Darstellung zur Vereinfachung der Rechnungen eingeführt werden, die aber prinzipiell bei größerem Aufwand vermeidbar sind.

Die Forderung der Kleinheit des Magnetfeldes, die zur Vernachlässigung des Termes $\mathbf{i} \times \mathfrak{B}$ in der NAVIER-STOKESSchen Gleichung führt, ist als wesentlich anzusehen. Ein Vergleich mit der CORIOLIS-Kraft führt zu der Bedingung

$$\mu(H^2/2) \ll \varrho \omega L \sqrt{v^2}. \quad (51)$$

Sie ist durch die weitere Bedingung

$$\mu \sigma \sqrt{v^2} L \ll 1 \quad (52)$$

zu ergänzen, welche zum Ausdruck bringt, daß die Diffusion ein zu starkes Anwachsen des Magnetfeldes durch Induktionswirkung aus der turbulenten Bewegung verhindert.

Alle übrigen Bedingungen sind zur zweiten Gruppe zu rechnen. Es sei hier insbesondere noch ein Wort zu den vernachlässigten Gliedern in der NAVIER-STOKESSchen Gleichung gesagt: Für die Struktur des Korrelationstensors sind ausschließlich Terme maßgebend, die Vorzugsrichtungen liefern. Die von sich aus isotropen Bildungen

$$(\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v} \text{ und } \text{grad}(\text{div } \mathbf{v})$$

können aber höchstens die im $\mathbf{v}$ -Feld schon vorhandene Vorzugsrichtung $\boldsymbol{\lambda}$ noch einmal ins Spiel bringen. Letzteres gilt auch für den Term $\partial \varrho / \partial t$. Also können sich die entscheidenden Glieder im Korrelationstensor nach wie vor nur aus $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}$ und dem ε -Tensor zusammensetzen. Eine qualitative Änderung unserer Ergebnisse ist demnach nicht zu erwarten.

⁴ E. N. PARKER, *Astrophys. J.* **122**, 293 [1955]; *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **43**, 8 [1957].