

Abmessungen des Plasmas ab und muß von Fall zu Fall überprüft werden. Für die höheren Werte des Druckes im behandelten Bereich wird oft die SAHA-Gleichung eine bessere Näherung für die Plasmazusammensetzung liefern. Bei den niedrigen Drücken hingegen können Abweichungen der Temperaturen

der verschiedenen Teilchensorten voneinander die Anwendung der Rechenergebnisse auf experimentelle Plasmen erschweren.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

## Zur Bestimmung von Temperatur und Geschwindigkeit der Plasmaströmung aus einem Plasmabrenner

B. AHLBORN \*

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. 20 a, 466—474 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

A two-step model of the heating processes in a plasma jet is given. In this model, a hot interior and colder sheath is postulated, and the conservation theorems for mass, momentum and energy are solved so that the plasma velocity and temperature can be calculated if the power supply, pressure fall over the heating length, and the cross-sectional area of the luminous plasma stream are known. The accelerating action of the electromagnetic forces is considered as well as the JOULE heating caused by the arc current.

This model was tested by using a newly developed method to measure the average velocity and by using spectroscopy to measure the temperature of the plasma jet. The applicability of the "two step" model is shown by these experiments.

Als Plasmabrenner soll eine Lichtbogenanordnung mit düsenförmiger Anode und konzentrischer Kathode (Abb. 1) bezeichnet werden, in der eine kalte Gasströmung auf hohe Temperaturen ( $T > 10\,000$  °K) aufgeheizt wird, die die Anode als Plasmastrahl verläßt. Wegen der großen Strömungsgeschwindigkeit des Plasmastrahls und seines hohen Energieinhaltes haben Plasmabrenner für zahlreiche Zwecke technische Verwendung gefunden. Für viele Probleme wird daher gefordert, die Temperatur und die Geschwindigkeit des Plasmas mit einfachen Mitteln möglichst genau zu bestimmen und auch ihre Abhängigkeit von frei vorgebbaren Variablen des Brenners, wie Gasdurchsatz und Leistungszufuhr, anzugeben. Diese Zusammenhänge lassen sich beschreiben, wenn man den Plasmabrenner als Durchlauferhitzer für eine Gasströmung (eindimensional, ohne Reibung und Wärmeleitung) behandelt. Die bekannten Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie können dabei benutzt werden, um Mittelwerte für Geschwindigkeit und Temperatur hinter der Aufheizungszone zu berechnen. Leider unterscheiden sich diese über den ganzen Querschnitt ge-

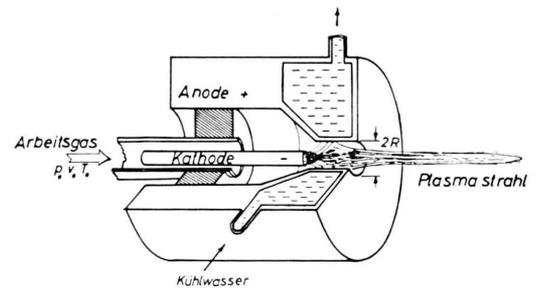


Abb. 1. Plasmabrenner.

mittelten Temperaturen und Geschwindigkeiten oft um mehr als den Faktor 2 von den im Plasmastrahl gemessenen Werten<sup>1, 2</sup>. Dieser Ansatz – im folgenden „Einstufenmodell“ genannt – gibt daher nur ein qualitatives Bild der Vorgänge im Plasmabrenner.

Um eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment zu erhalten, haben wir das Einstufenmodell durch zwei Annahmen verfeinert und auch elektromagnetische Kräfte des Entladungsstromes berücksichtigt. Es wird dabei

\* Auszug aus einer Dissertation der Technischen Hochschule München, 1964.

<sup>1</sup> R. E. JAHN, Brit. J. Appl. Phys. 14, 585 [1963].

<sup>2</sup> W. NEUMANN, Exp. Techn. Phys. 10, 124 [1962].

Abmessungen des Plasmas ab und muß von Fall zu Fall überprüft werden. Für die höheren Werte des Druckes im behandelten Bereich wird oft die SAHA-Gleichung eine bessere Näherung für die Plasmazusammensetzung liefern. Bei den niedrigen Drücken hingegen können Abweichungen der Temperaturen

der verschiedenen Teilchensorten voneinander die Anwendung der Rechenergebnisse auf experimentelle Plasmen erschweren.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

## Zur Bestimmung von Temperatur und Geschwindigkeit der Plasmaströmung aus einem Plasmabrenner

B. AHLBORN \*

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. 20 a, 466—474 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

A two-step model of the heating processes in a plasma jet is given. In this model, a hot interior and colder sheath is postulated, and the conservation theorems for mass, momentum and energy are solved so that the plasma velocity and temperature can be calculated if the power supply, pressure fall over the heating length, and the cross-sectional area of the luminous plasma stream are known. The accelerating action of the electromagnetic forces is considered as well as the JOULE heating caused by the arc current.

This model was tested by using a newly developed method to measure the average velocity and by using spectroscopy to measure the temperature of the plasma jet. The applicability of the "two step" model is shown by these experiments.

Als Plasmabrenner soll eine Lichtbogenanordnung mit düsenförmiger Anode und konzentrischer Kathode (Abb. 1) bezeichnet werden, in der eine kalte Gasströmung auf hohe Temperaturen ( $T > 10\,000$  °K) aufgeheizt wird, die die Anode als Plasmastrahl verläßt. Wegen der großen Strömungsgeschwindigkeit des Plasmastrahls und seines hohen Energieinhaltes haben Plasmabrenner für zahlreiche Zwecke technische Verwendung gefunden. Für viele Probleme wird daher gefordert, die Temperatur und die Geschwindigkeit des Plasmas mit einfachen Mitteln möglichst genau zu bestimmen und auch ihre Abhängigkeit von frei vorgebbaren Variablen des Brenners, wie Gasdurchsatz und Leistungszufuhr, anzugeben. Diese Zusammenhänge lassen sich beschreiben, wenn man den Plasmabrenner als Durchlauferhitzer für eine Gasströmung (eindimensional, ohne Reibung und Wärmeleitung) behandelt. Die bekannten Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie können dabei benutzt werden, um Mittelwerte für Geschwindigkeit und Temperatur hinter der Aufheizungszone zu berechnen. Leider unterscheiden sich diese über den ganzen Querschnitt ge-

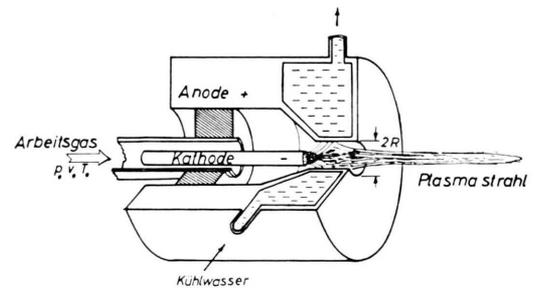


Abb. 1. Plasmabrenner.

mittelten Temperaturen und Geschwindigkeiten oft um mehr als den Faktor 2 von den im Plasmastrahl gemessenen Werten<sup>1, 2</sup>. Dieser Ansatz – im folgenden „Einstufenmodell“ genannt – gibt daher nur ein qualitatives Bild der Vorgänge im Plasmabrenner.

Um eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment zu erhalten, haben wir das Einstufenmodell durch zwei Annahmen verfeinert und auch elektromagnetische Kräfte des Entladungsstromes berücksichtigt. Es wird dabei

\* Auszug aus einer Dissertation der Technischen Hochschule München, 1964.

<sup>1</sup> R. E. JAHN, Brit. J. Appl. Phys. 14, 585 [1963].

<sup>2</sup> W. NEUMANN, Exp. Techn. Phys. 10, 124 [1962].

1. die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung nach der Aufheizung durch ein Zweistufenprofil mit einem heißen Kern und einer kalten Randzone beschrieben (vgl. Abb. 2); und
2. angenommen, daß die effektive Leistung  $W$  nur zur Aufheizung und Beschleunigung des Gases im heißen Kern dient ( $W = L - Q$ , wo  $L$  = elektrische Leistung und  $Q$  = Kühlverluste im Brenner).

Mit diesen Annahmen werden wir zunächst Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie ableiten. Die daraus berechenbare Geschwindigkeit und Temperatur im heißen Kern werden dann mit Meßwerten verglichen.

### I. Zweistufenmodell

Auch beim Zweistufenmodell fassen wir den Plasmabrenner wie ein Rohr mit konstantem Querschnitt auf (Abb. 2). Das kalt anströmende Arbeitsgas hat bei  $z_0$  eine homogene Verteilung von Druck  $p_0$ , Geschwindigkeit  $v_0$  und Temperatur  $T_0$ . Es wird dann nahe der Rohrachse durch die Leistung  $W$  aufgeheizt. Wir denken uns eine hydrodynamische

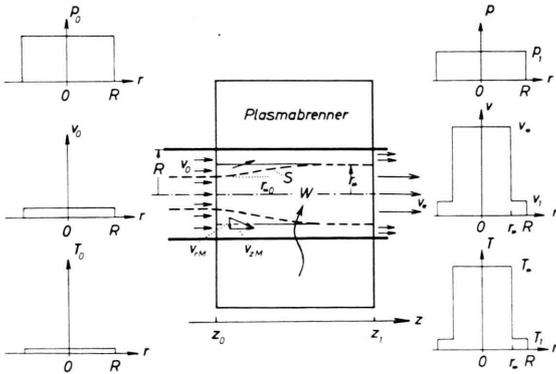


Abb. 2. Zweistufenmodell für den Plasmabrenner.

Stromröhre  $S$ , welche den heißen Kern von der nicht aufgeheizten Randströmung trennt. Am Ende des Plasmabrenners, bei  $z_1$ , möge sich dann eine Zweistufenverteilung für Geschwindigkeit und Temperatur eingestellt haben, während der Druck dort über den ganzen Querschnitt konstant und gleich dem Enddruck  $p_1$  im Außenraum sei. (Wir betrachten nur Unterschallströmungen.)

Dieses Modell ist sicher eine Idealisierung der wirklichen Verhältnisse, doch fügen sich alle Versuchsergebnisse zwanglos in dies Bild ein.

### II. Erhaltungssätze

Zur Aufstellung von Erhaltungssätzen für das Zweistufenmodell gehen wir aus von den bekannten differentiellen Gleichungen einer stationären Strömung. Bekanntlich gilt mit  $\partial/\partial t = 0$ :

$$\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varrho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + [\mathbf{j} \times \mathfrak{B}], \quad (2)$$

$$\varrho \mathbf{v} \operatorname{grad} (h + \frac{1}{2} v^2) = \operatorname{div} \mathbf{q} + A_{el}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} [\varrho \mathbf{v} (h + \frac{1}{2} v^2)] = \operatorname{div} \mathbf{q} + A_{el},$$

- mit  $\varrho$  = Dichte  $\text{g cm}^{-3}$ ,  
 $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$  = Geschwindigkeit  $\text{cm/sec}$ ,  
 $\mathbf{j}$  = Stromdichte  $\text{Amp/cm}^2$ ,  
 $\mathfrak{B}$  = Magnetische Induktion,  
 $h = u + p/\varrho$  = Enthalpie/ $\text{gr}$ ,  
 $u$  = Innere Energie/ $\text{gr}$ ,  
 $\mathbf{q}$  = Wärmestrom,  
 $A_{el}$  = elektrische Arbeit pro Volumenelement.

Integriert man diese Gleichungen über ein Volumen  $G$  mit der Oberfläche  $O$ , so ergibt sich ganz allgemein mit Anwendung des GAUSSSchen Satzes:

$$\oint_O \varrho (\mathbf{v} \, d\mathbf{f}) = 0, \quad (4)$$

$$\oint_O \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \, d\mathbf{f}) + \oint_O p \, d\mathbf{f} - \mathfrak{R}(G) = 0, \quad (5)$$

$$\oint_O \varrho (\frac{1}{2} v^2 + h) (\mathbf{v} \, d\mathbf{f}) = L - Q = W \quad (6)$$

mit  $\mathfrak{R}(G) = \int_G [\mathbf{j} \times \mathfrak{B}] \, d\tau,$

$$L = \int_G A_{el} \, d\tau, \quad Q = \int_G \operatorname{div} \mathbf{q} \, d\tau = \oint_G \mathbf{q} \, d\mathbf{f}.$$

Diese Integrale können unter vereinfachenden Annahmen über die Größen  $\varrho, \mathbf{v}, h, p$  elementar ausgewertet werden:

Nimmt man als Integrationsgebiet einen Abschnitt aus einer Rohrströmung, bei der alle Größen in jedem Querschnitt nicht vom Radius abhängen, und vernachlässigt zusätzliche äußere Kräfte, so ergeben sich die bekannten Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \varrho_0 v_0 &= \varrho_1 v_1 = \text{const}, \\ p_0 + \varrho_0 v_0^2 &= p_1 + \varrho_1 v_1^2, \\ \frac{1}{2} v_0^2 + h_0 + \frac{W}{\varrho_0 v_0 F} &= \frac{1}{2} v_1^2 + h_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Auch nach den Annahmen des Zweistufenmodells lassen sich die allgemeinen Integrale (4), ... berechnen. Man wählt als Integrationsgebiet zweckmäßig den inneren Teil der Strömung.

*Massenerhaltung*

Als Integrationsgebiet für die Kontinuitätsgleichung betrachten wir das Volumen der Stromröhre S zwischen dem Querschnitt bei  $z_0$  und dem Querschnitt bei  $z_1$ . Mit  $F_* = \pi r_*^2$ ,  $F_{*0} = \pi r_{*0}^2$ ,  $v = (v_r, 0, v_z)$  und  $v \cong v_z \gg v_r$  ergibt die Integration der Gl. (4) die Beziehung:

$$\varrho_* v_* F_* = \varrho_0 v_0 F_{*0} = i_* \quad (8)$$

*Impulssatz*

Zur Aufstellung des Impulssatzes ist ein etwas größeres Integrationsgebiet  $G_*$  zweckmäßiger, nämlich ein Zylinder mit der Grundfläche  $F_*$ , der die Stromröhre ganz umschließt und seine Grund- und Deckfläche bei  $z_0$  bzw.  $z_1$  hat. Die z-Komponente der Gl. (5) enthält dann die Terme:

$$-\int_{\substack{\text{Fläche } F_* \\ \text{bei } z_0}} \varrho v_z^2 df_z + \int_{\substack{\text{Fläche } F_* \\ \text{bei } z_1}} \varrho v_z^2 df_z + \int_{\substack{\text{Mantel} \\ \text{bei } r=r_*}} \varrho v_z v_r df_r \\ = \int_{\substack{\text{Fläche} \\ \text{bei } z_0}} p df_z - \int_{\substack{\text{Fläche} \\ \text{bei } z_1}} p df_z + K_*$$

mit 
$$K_* = \int_{G_*} [j \times \mathfrak{B}]_z d\tau,$$
  

$$df_z = 2 \pi r dr.$$

Mit den Annahmen des Zweistufenmodells können alle Terme bis auf das Integral über die Mantelfläche direkt berechnet werden:

$$-\varrho_0 v_0^2 F_* + \varrho_* v_*^2 F_* \quad (9)$$

$$+ \int_{z_0}^{z_1} \varrho_M v_{zM} v_{rM} 2 \pi r_* dz = p_0 F_* - p_1 F_* + K_*.$$

Dieses Integral über den Zylindermantel bestimmt den seitlich abströmenden Impuls (vgl. Abb. 2) und enthält daher die nicht näher bekannten Größen  $v_{zM}$  und  $v_{rM}$  (der erste Index bezeichnet die Komponente des Geschwindigkeitsvektors, der zweite Index gibt den Ort, an welchem die Komponente betrachtet werden soll). Man macht sich nun leicht klar, daß dieser Impuls von Materie transportiert wird, welche außerhalb der Stromröhre S durch die Ringfläche  $F_* - F_{*0}$  in die Grundfläche des Integrationsgebietes einströmt. Weil keine Masse verlorengeht, gilt dann

$$\varrho_0 v_0 (F_* - F_{*0}) = \int_{z_0}^{z_1} \varrho_M v_{rM} 2 \pi r_* dz \quad (10)$$

Zieht man nun für eine Abschätzung in Gl. (9) einen mittleren Wert von  $\bar{v}_{zM}$  vor das Integral über die

Mantelfläche, so ergibt sich mit Gl. (10)

$$\int_{z_0}^{z_1} \varrho_M v_{zM} v_{rM} 2 \pi r_* dz \approx \bar{v}_{zM} \int_{z_0}^{z_1} \varrho_M v_{rM} 2 \pi r_* dz = \bar{v}_{zM} \varrho_0 v_0 (F_* - F_{*0}) \quad (11)$$

Unter Verwendung der Massenerhaltung (8) erhält man mit (9) und (11) den Impulssatz:

$$\varrho_* v_*^2 \left(1 - \frac{\bar{v}_{zM}}{v_*}\right) - \varrho_0 v_0^2 \left(1 - \frac{\bar{v}_{zM}}{v_0}\right) = p_0 - p_1 + \frac{K_*}{F_*}.$$

Macht man nun die plausible Annahme  $v_{zM} \approx v_0$  (d. h. annähernd unveränderte Geschwindigkeit in Gebieten, wo keine Leistung zugeführt wird) und setzt die durch Experimente bestätigte Abschätzung  $v_* \gg v_0$ ,  $v_{zM}$  ein, so vereinfacht sich der Impulssatz für den heißen Kern:

$$\varrho_* v_*^2 = p_0 - p_1 + K_*/F_* \quad (12)$$

Hier muß jedoch die magnetische Kraft  $K_*$  noch berechnet werden.

In jedem Lichtbogen treten LORENTZ-Kräfte [ $j \times \mathfrak{B}$ ] auf. Diese erhöhen bei Zylindergeometrie der Entladung nur den Druck im Inneren. Sie können aber, wie MAECKER<sup>3</sup> zeigte, zu einer Beschleunigung des Plasmas führen, sobald die Stromdichte  $j$  und damit  $\mathfrak{B}$  bei einer Einschnürung oder Aufweitung des Entladungskanals in Achsenrichtung variiert. Bei einem Plasmabrenner erfolgt von der Kathodenspitze zur Anode eine Aufweitung des stromführenden Querschnitts. Daher darf man die LORENTZ-Kraft in der Impulsbilanz nicht außer acht lassen.

Als schematisiertes elektrisches Modell eines Plasmabrenners betrachten wir in Abb. 3 eine rotationssymmetrische Entladung. Das Eigenmagnetfeld des Entladungsstromes hat nur die  $\varphi$ -Komponente;  $\mathfrak{B} = (0, B, 0)$ . Mit Hilfe einiger Vektorumformun-

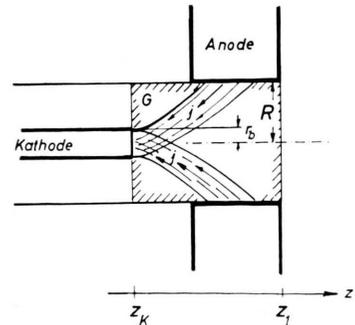


Abb. 3. Elektrisches Modell des Plasmabrenners.

<sup>3</sup> H. MAECKER, Z. Phys. 141, 198 [1955].

gen schreiben wir das Volumenintegral über die LORENTZ-Kraft:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \int_{\text{Volumen}} [\mathbf{j} \times \mathfrak{B}] d\tau = \int \frac{1}{\mu_0} [\text{rot } \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}] d\tau \\ &= - \int \frac{\text{grad } \mathfrak{B}^2}{2 \mu_0} d\tau + \int \frac{(\mathfrak{B} \text{ grad}) \mathfrak{B}}{\mu_0} d\tau \\ &= - \oint_0 \frac{\mathfrak{B}^2}{2 \mu_0} d\vec{f} + \oint_0 \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0} (\mathfrak{B} d\vec{f}). \end{aligned}$$

Bei der Integration über ein rotationsymmetrisches Volumen  $G$  ergibt sich für die resultierende Kraft nur eine  $z$ -Komponente. Der Term mit  $(\mathfrak{B} d\vec{f})$  verschwindet, da  $\mathfrak{B}$ , das nur eine  $\varphi$ -Komponente hat, überall senkrecht zur Normalenrichtung der Integrationsoberfläche liegt. Die Integration ist über den Querschnitt bei  $z_K$  und  $z_1$  zu erstrecken (vgl. Abb. 3). Bei  $z_1$  verschwindet aber das Magnetfeld überall auf der Integrationsfläche. Daher bleibt nur ein Integral über den Querschnitt bei  $z_K$ , welches in zwei Teilintegrale aufgespaltet werden kann:

$$\mathfrak{K}_z = K = \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^R B^2 r dr = \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^{r_b} B^2 r dr + \frac{\pi}{\mu_0} \int_{r_b}^R B^2 r dr. \quad (13)$$

Hier muß das Magnetfeld als Funktion vom Radius bekannt sein. Für die äußere Teilfläche  $r_b \leq r \leq R$  ( $r_b$  = Brennfleckradius,  $I$  = Gesamtstrom) gilt

$$B(r) = \mu_0 I / 2 \pi r. \quad (14)$$

Innerhalb des Brennflecks findet man unter der Annahme konstanter Stromdichte mit  $j_K = I / \pi r_b^2$ ,  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  für  $0 < r \leq r_b$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r j_K r dr = \frac{\mu_0}{2 \pi r_b^2} I. \quad (15)$$

Setzt man diese Werte in Gl. (13) ein und mißt  $I$  in Ampère, so ergibt sich die Kraft:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^{r_b} \frac{\mu_0^2 I^2 r^3}{4 \pi^2 r_b^4} dr + \frac{\pi}{\mu_0} \int_{r_b}^R \frac{\mu_0^2 I^2}{4 \pi^2 r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4 \pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{R}{r_b} \right) [\text{Newton}] \\ &= \frac{I^2}{100} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{R}{r_b} \right) [\text{dyn}]. \end{aligned} \quad (16)$$

In diesen Ausdruck geht neben der willkürlich wählbaren Bogenstromstärke  $I$  der Radius des Kathodenbrennflecks  $r_b$  ein. Um einen Zusammenhang zwischen diesen Größen zu finden, wurde ein Plasma-

brenner entwickelt, bei dem man durch ein seitliches Fenster den Kathodenbrennfleck beobachten kann. In der Brennkammer bemerkt man vor der thorierten Wolframkathode eine bläulich leuchtende Fackel, die keulenförmig auf der Kathode ansetzt. Die Berührungsfäche wird durch einen Saum glühenden Wolframs gebildet. Die Größe der Kathodenfackel und insbesondere ihre Ansatzfläche hängt nur von der Stromstärke ab. Weder der Gasdurchsatz noch der Elektrodenabstand habe einen Einfluß auf dieses Kathodengebiet. Wir identifizieren daher die Ansatzfläche auf der Kathode mit dem Kathodenbrennfleck. Der Brennfleckradius wurde in einer 25-fach vergrößerten Projektion bei verschiedenen Stromstärken vermessen. Da die Ansatzfläche selbst meist etwas diffus erschien, wurden stets die Umrisse von Kathode und Kathodenfackel (Abb. 4) gezeichnet und daraus  $r_b$  bestimmt.

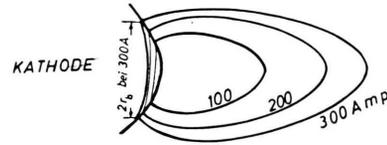


Abb. 4. Kathodenfackel, Umrisse bei verschiedenen Stromstärken.

In Abb. 5 wurde der Brennfleckradius als Funktion der Stromstärke  $I$  dargestellt. Bei der verwendeten thorierten Wolframkathode liegen alle Meßpunkte recht gut auf der Kurve

$$r_b = 6,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{I} \quad [\text{cm}].$$

Berechnet man daraus die mittlere Stromdichte  $j_K = I / \pi r_b^2$ , so ergibt sich für alle Messungen der

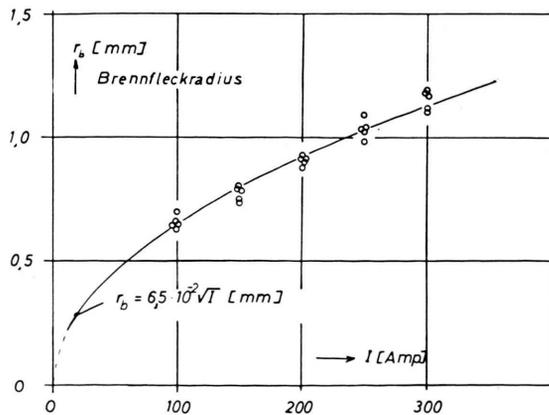


Abb. 5. Brennfleckradius bei verschiedenen Stromstärken. Thorierte Wolframkathode.

konstante Wert  $j_K = 7,5 \cdot 10^3 \text{ A/cm}^2$ . Man erhält dann mit Gl. (16) die elektromagnetische Zusatzkraft

$$K = \frac{I^2}{100} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{R}{6,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{I}} \right\} [\text{dyn}], \quad (17)$$

[ $R$  in cm und  $I$  in Ampère]. Da uns im Impulssatz für das Zweistufenmodell jedoch nur ein innerer Zylinder mit dem Radius  $r$  interessiert, ist die Integration in Gl. (13) nur bis zu dieser Grenze zu erstrecken. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_* &= \frac{I^2}{100} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{r_*}{6,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{I}} \right\} \\ &= \frac{I^2}{100} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \sqrt{j_K (F_*/I)} \right\} [\text{dyn}]. \end{aligned} \quad (18)$$

### Energiesatz

Bei der Aufstellung des Energiesatzes für das Zweistufenmodell integrieren wir wieder über das Volumen, welches die Stromröhre  $S$  zwischen  $z_0$  und  $z_1$  aus der Strömung herauschneidet (vgl. Abb. 2). Dabei ergibt sich aus Gl. (6)

$$\varrho_* v_* F_* (\frac{1}{2} v_*^2 + h_*) - \varrho_0 v_0 F_{*0} (\frac{1}{2} v_0^2 + h_0) = L - Q = W$$

und mit (8)

$$\frac{1}{2} v_*^2 + h_* = \frac{1}{2} v_0^2 + h_0 + W/i_*. \quad (19)$$

Es ist nun bequem und bedeutet bei der hier betrachteten Unterschallströmung auch keinen großen Fehler, wenn man die kinetische Energie in der letzten Gleichung vernachlässigt. Dies zeigt die Abb. 6, in der die Zustandsgrößen  $c^2/2$  und  $h - h_0$  im Temperaturgebiet zwischen 10 000 und 20 000 °K verglichen werden. Wie man der Darstellung entnimmt,

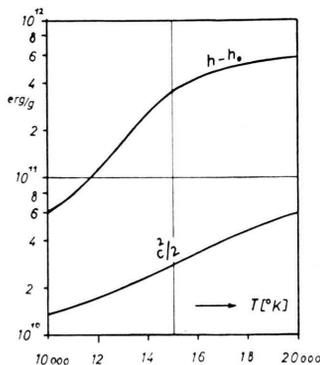


Abb. 6. Vergleich von Enthalpiedifferenz  $h - h_0$  und kinetischer Energie bei Schallgeschwindigkeit.

liegt die kinetische Energie bei Schallgeschwindigkeit  $c$  noch um den Faktor 4 unter der Differenz der Enthalpien. Für Geschwindigkeiten  $v_* \leq c_*/3$  gilt daher die Näherung

$$h_* - h_0 = W/i_* \quad (20)$$

mit einem Fehler von weniger als 3%.

Prinzipiell könnte man noch die drei Erhaltungssätze für das kalte Randgebiet ableiten, doch wird diese Zone durch das Zweistufenmodell nur recht ungenau beschrieben. Natürlich wird ein, wenn auch geringer, Bruchteil der Leistung  $W$  in das Randgebiet eingekoppelt. Diese kleine Leistungszufuhr genügt aber schon, um die Verhältnisse in dem Randgebiet völlig unübersehbar zu machen.

### III. Auflösung der Erhaltungssätze

Die drei Erhaltungssätze des Zweistufenmodells (8), (12), (20)

$$\varrho_* v_* F_* = \varrho_0 v_0 F_{*0} = i_*,$$

$$\varrho_* v_*^2 = p_0 - p_1 + K_*/F_*$$

mit 
$$K_* = \frac{I^2}{100} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \frac{r_*}{6,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{I}} \right\},$$

$$F_* = \pi r_*^2,$$

$$h_* - h_0 = W/i_*,$$

ergänzt durch die zwei Zustandsfunktionen des betrachteten Arbeitsgases,

$$h = h(p, T), \quad \varrho = \varrho(p, T),$$

enthalten neben den frei wählbaren Variablen  $p_1$ ,  $v_0$ ,  $h_0$  (bzw.  $T_0$ ) und  $W$  (bzw.  $I$ ) noch die abhängigen Größen  $p_0$ ,  $h_*$ ,  $\varrho_*$ ,  $v_*$ ,  $T_*$ ,  $F_*$  und  $F_{*0}$ . Wenn man von diesen Größen zwei durch Messung ermitteln kann, so lassen sich die fünf anderen Unbekannten durch das Gleichungssystem bestimmen.

Wir haben neben den freien Variablen die Größen  $p_0$  und  $F_*$  gemessen und konnten dadurch  $v_*$ ,  $T_*$ ,  $\varrho_*$ ,  $h_*$  und auch die durch Messungen kaum zu kontrollierende Größe  $F_{*0}$  berechnen. Mit Rücksicht darauf, daß in den Zustandsfunktionen stets die komplizierte Temperaturabhängigkeit der SAHA-Gleichung enthalten ist, geben wir eine graphische Darstellung, bei der Zustandsdiagramme oder Wertetabellen der Funktionen  $h(p, T)$  und  $\varrho(p, T)$  verwendet werden können, die schon von verschiedenen Autoren berechnet wurden (z. B. <sup>4, 5</sup>).

<sup>4</sup> K. F. KNOCHE, Wärmediagramme von Argonplasma bis 100 000 °K, Dissertation, Braunschweig 1961.

<sup>5</sup> F. BURHORN u. R. WIENECKE, Z. Phys. Chem., Lpz. **215**, 269, 285 [1960].

Es wird nun zunächst der Impulssatz (12) nach  $v_*$  aufgelöst

$$v_* = \sqrt{\frac{p_0 - p_1 + K_*/F_*}{\rho_*}} = \sqrt{\frac{\Delta p + K_*/F_*}{\rho_*}}. \quad (21)$$

und in den Energiesatz eingesetzt. Dabei ergibt sich:

$$\frac{W}{F_* \sqrt{\Delta p + K_*/F_*}} = (h_* - h_0) \sqrt{\rho_*} = x(T_*, \rho_*). \quad (22)$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält nur meßbare Größen. Auf der rechten Seite stehen dagegen Zustandsgrößen des Endzustandes nach der Aufheizung.  $x = (h - h_0) \sqrt{\rho}$  hängt im Prinzip von zwei Zustandsgrößen ab. In Abb. 7 ist  $x$  für festes  $p_1$  ( $= 1$  at) einmal als Funktion von  $T$  und dann als Funktion von  $\rho$  dargestellt. Dabei liegen die Zustandswerte für Argon von KNOCHÉ<sup>4</sup> zugrunde.

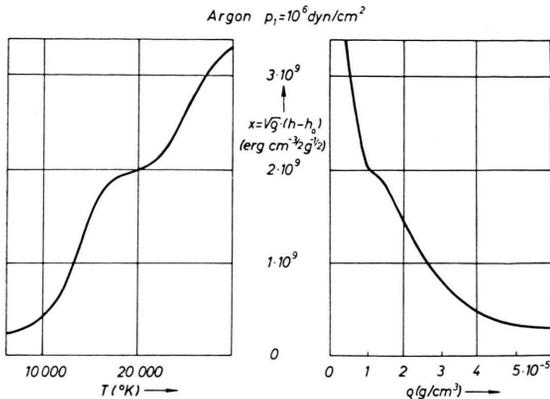


Abb. 7.  $x = (h - h_0) \sqrt{\rho}$  als Funktion von Temperatur und Dichte, Argon. Berechnet für den Druck  $p = 1$  at nach Zustandswerten von KNOCHÉ.

Um nun die Temperatur  $T_*$  im heißen Kern zu bestimmen, braucht man nur aus den Meßwerten die Größe  $x = W / (F_* \sqrt{\Delta p + K_*/F_*})$  zu berechnen, um dann aus Abb. 7 unmittelbar die zugehörige Temperatur  $T_*$  abzulesen. Zur Ermittlung von  $v_*$  entnimmt man zunächst der Kurve  $x(\rho)_*$  die Dichte  $\rho_*$  im heißen Kern und kann damit  $v_*$  aus Gl. (21) berechnen. Schließlich läßt sich  $F_{*0}$  mit Hilfe von Gl. (20) angeben.

#### IV. Messungen

Zur Prüfung des Zweistufenmodells wurden  $T_*$  und  $v_*$  direkt gemessen und außerdem nach der Modellvorstellung aus den Werten  $W$ ,  $I$ ,  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $F_*$  berechnet. Die Versuche wurden mit Argon als Arbeitsgas durchgeführt.

Bei den Experimenten verwendeten wir einen Plasma-brenner mit auswechselbarer Anode. Es wurden die Anodenbohrungen 4 mm  $\Phi$  und 7 mm  $\Phi$  untersucht. Der Gasdurchfluß wurde so einreguliert, daß der Brenner stets genügend weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit arbeitete. Der Enddruck  $p_1$  war dann gleich dem Luftdruck im Labor. Der Anfangsdruck  $p_0$  wurde eben oberhalb der Brennkammer mit einem Wasser-manometer gegen den Außendruck  $p_1$  gemessen. Bei den Versuchen lag die Differenz  $p_0 - p_1$  etwa bei 0,1 at. Die Leistungszufuhr  $W$  bestimmten wir einmal aus der Differenz der elektrischen Leistung  $L$  und der Verlustleistung  $Q$  im Kühlwasser des Brenners. Als Kontrolle für diese Messungen kühlten wir den Plasmastrahl in einem wassergekühlten Rohr (Wärmeaustauscher) kontinuierlich auf Zimmertemperatur ab und bestimmten kalorimetrisch die Leistung  $W$ , die dabei im Wärmeaustauscher frei wurde.  $W$  und  $L - Q$  stimmten im Rahmen der Versuchsgenauigkeit gut überein. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ergibt sich aus einer Messung des Durchflußvolumens  $\psi$  ( $\text{cm}^3/\text{sec}$ ):  $v_0$  ist nach Definition die Geschwindigkeit, mit welcher das kalte Gas durch eine Anfangskontrollfläche der Größe  $F = \pi R^2$  strömt; daher ist  $v_0 = \psi / F$ .

Das Durchflußvolumen wurde mit einem handelsüblichen Durchflußzähler bestimmt. — Zur Bestimmung von  $F_* = \pi r_*^2$  nahmen wir an, daß der leuchtende Plasmastrahl und der heiße Kern des Zweistufenmodells miteinander identisch sind. Der Durchmesser  $2r_*$  des Plasmastrahls am Brennerausgang konnte in einer Projektion vermessen werden. Dazu zeichneten wir den Umriß des Strahls in 5-facher Vergrößerung. Da die Kontur des Strahls etwas diffus ist, hat man beim Zeichnen eine gewisse Willkür, die vielleicht einen Fehler von  $\delta F_*/F_* = 25\%$  verursacht. Schätzt man aber den Gesamtfehler des Produkts  $x = W / (F_* \sqrt{\Delta p + K_*/F_*})$  sehr großzügig auf  $\delta x/x = 50\%$ , so ergibt sich damit im Temperaturgebiet des Plasmastrahls nur eine Unsicherheit von  $\delta T_*/T_* \approx 13\%$  und  $\delta v_*/v_* \approx 15\%$ .

Die radiale Temperaturverteilung wurde spektroskopisch mit einem Steinheil GH-Drei-Prismen-Spektrographen (Kamera  $f = 640$  mm, Kollimator  $f = 650$  mm) aus der Absolutintensität der Al-Linie 4300 Å ( $1S_4 - 3P_8$ ) bestimmt, für die wir nach<sup>6</sup> als Übergangswahrscheinlichkeit  $A_{21}^m = 3,45 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$  benutzen. Als Normalstrahler diente der Kohlebogen. Bei der Umrechnung der Querverteilung auf das radiale Temperaturprofil konnten wir einen Analogrechner zur Lösung der ABELSchen Integralgleichung nach<sup>7</sup> verwenden.

Die Geschwindigkeitsmessung ist in Abb. 8 schematisch dargestellt. Durch einen kleinen Kondensator ( $C = 3,5 \mu\text{F}$ ), welcher parallel zum Brenner geschaltet werden konnte, wurde der Bogenstrom kurzzeitig vermindert. Dadurch wurde ein Volumenelement des Arbeitsgases im Brenner schwächer aufgeheizt. Weil es dann auch schwächer leuchtete, konnte es als Marke

<sup>6</sup> W. E. GERICKE, Z. Astrophys. 53, 68 [1961].

<sup>7</sup> G. BOLD, Ein Gerät zur Lösung der ABELSchen Integralgleichung, Laborbericht des MPI, München 1963.

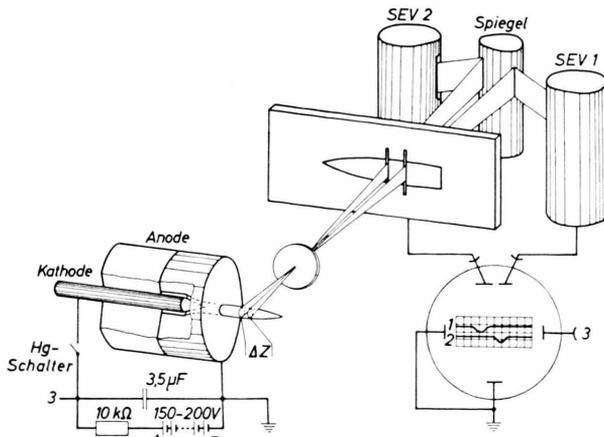


Abb. 8. Geschwindigkeitsmessung. Der Oszillograph wird extern beim Schließen des Hg-Schalters getriggert.

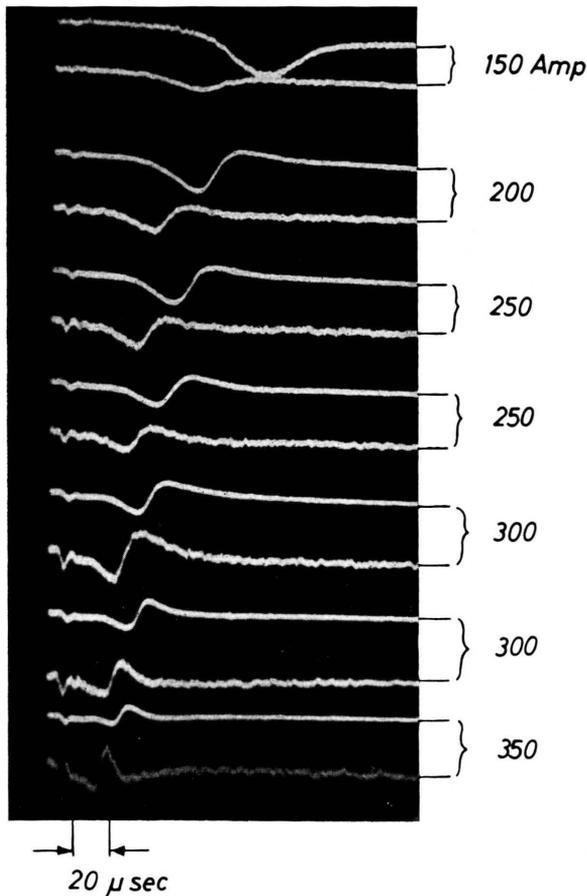


Abb. 9. Typische Serie von Oszillogrammen zur Geschwindigkeitsmessung. Bei konstantem Gasdurchsatz ist die Stromstärke variiert. Dadurch verändert sich die Geschwindigkeit des Plasmas.

für eine Laufzeitmessung dienen. Hierbei benutzen wir zwei Photo-Multiplier, die im Abstand  $\Delta z = z_2 - z_1$  auf verschiedene Querschnitte des Strahls fokussiert waren, und registrierten den Verlauf der Photospannung mit einem Zweistrahloszillographen. Sobald das dunklere Volumenelement vor dem betreffenden Multiplier vorbeizog, erniedrigte sich die Photospannung. Die Zeitdifferenz  $\Delta t$  der Signale ließ sich aus dem Abstand phasengleicher Punkte auf dem Oszillogramm ablesen. Abb. 9 zeigt eine typische Serie von Oszillogrammen. Die Amplitude des überlagerten Signals betrug etwa 20% der Photospannung bei ungestörtem Plasmastrahl. Wir nahmen daher an, daß der Brennermechanismus durch die Hilfsentladung nicht zu stark beeinträchtigt wurde und identifizierten die Geschwindigkeit des schwächer leuchtenden Volumenelements  $\bar{v} = \Delta z / \Delta t = v_*$  mit der mittleren Geschwindigkeit des ungestörten Plasmastrahls. Die Genauigkeit der Laufzeitmessung hängt von der „Schärfe“ des elektrischen Impulses ab. Sie hängt aber auch davon ab, wie stark die Markierung im Verlauf der Strömung wieder „zerfließt“. Diese Erscheinung kann sowohl auf Transportphänomene als auch auf ein Geschwindigkeitsprofil in der Strömung zurückgeführt werden.

In Abb. 9 ist vor dem Hauptsignal noch eine kleine Störung zu erkennen. Sie läuft mit einer Geschwindigkeit von  $(1,8 \pm 0,5)$  km/sec. Wir haben diese Störung als Schallwelle interpretiert, die durch den elektrischen Impuls ausgelöst wird und mit der Geschwindigkeit  $v_* + c_*$  fortschreitet. Da man außerdem  $v_*$  direkt messen kann, läßt sich die Schallgeschwindigkeit  $c_*$  angeben und damit die Temperatur  $T_*$  abschätzen. An Hand der  $c(T)$ -Werte<sup>4</sup> ergab sich dabei eine Temperatur von etwa 11 000 °K, was gut in die Größenordnung der spektroskopisch gemessenen Temperatur fällt.

## V. Diskussion der Meßergebnisse

Um nun das Modell in einem weiten Bereich zu testen, wurde sowohl der Gasdurchsatz ( $v_0$ ) als auch die Leistungszufuhr  $W$  (bzw. die Stromstärke  $I$ ) variiert. Da der Brenner bei großem  $v_0$  unruhig brennt und der Plasmastrahl dann turbulent wird, ist diese Geschwindigkeitsmessung nur unterhalb  $v_0 \approx 50$  m/sec  $\approx c_0/6$  brauchbar.

In Abb. 10 sind die Messungen an dem Brenner mit 4 mm Anodenbohrung dargestellt. Die nach dem Modell berechneten Werte (Kreise) liegen dabei sehr gut im Streubereich der Laufzeitmessungen (Dreiecke). (Würde man bei der Berechnung ein Einstufenmodell zugrunde legen, so dürften die Geschwindigkeiten nur etwa halb so groß sein.) Die Messungen bestätigen damit die Anwendbarkeit des Zweistufenmodells.

Auch beim Vergleich zwischen gemessener und berechneter Temperatur wurden Anfangsgeschwin-

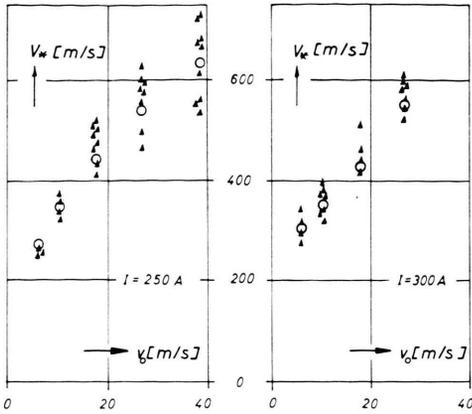


Abb. 10. Geschwindigkeitsmessung mit der Laufzeitmethode  $\blacktriangle$  und Geschwindigkeitsangabe nach dem Zweistufenmodell  $\circ$  bei verschiedenem Gasdurchsatz ( $v_0$ ) und verschiedenen Stromstärken  $I$  im Plasmabrenner.

digkeit und Leistung variiert. In Abb. 11 sind vier gemessene Temperaturverteilungen mit den dazu berechneten Zweistufenprofilen wiedergegeben. Man sieht, daß die gemessenen Temperaturen gut mit den Angaben des Modells übereinstimmen. Der radiale

ßen kann; sei es, wenn bei kleiner Ausströmgeschwindigkeit beide Gebiete lange miteinander in Berührung stehen oder wenn durch einen kleinen Düsendurchmesser im Mittel ein starker Temperaturgradient erzwungen wird. In Abb. 12 ist ein gemessenes Temperaturprofil dargestellt und außer-

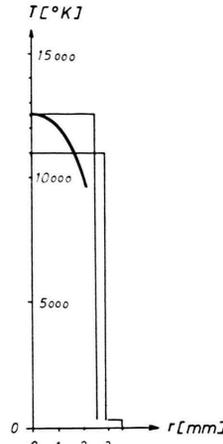


Abb. 12. Variationsbreite des Zweistufenmodells und gemessener Temperaturverlauf.

dem die maximale Schwankungsbreite des Zweistufenprofils eingetragen, welche aus der Unsicherheit der Messungen  $W$ ,  $\Delta p$  und  $F_*$  resultiert. In Abb. 13 ist schließlich neben dem gemessenen Temperaturverlauf und dem Zweistufenprofil noch das Einstufenprofil eingetragen, das sich unter denselben Versuchsbedingungen ergeben würde. Man erkennt daraus, daß das Zweistufenmodell mit der Annahme eines heißen Kerns eine erhebliche Verbesserung gegenüber dem Einstufenmodell bringt.

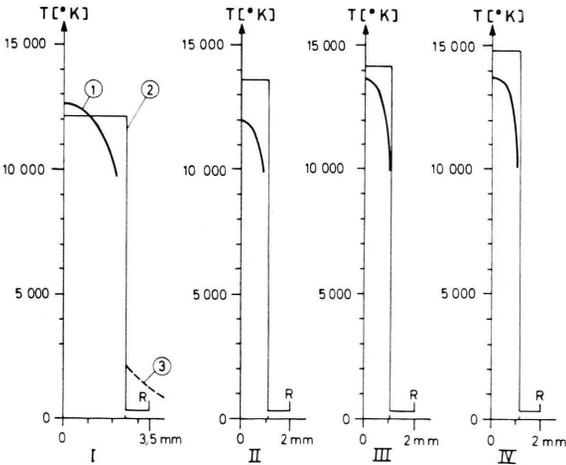


Abb. 11. Temperaturmessung (1), (3) und Zweistufenmodell (2).

- I)  $W=0,93$  kW; 0,25 g Argon/sec;  $I=150$  Amp.,
- II)  $W=0,58$  kW; 0,22 g Argon/sec;  $I=150$  Amp.,
- III)  $W=1,06$  kW; 0,83 g Argon/sec;  $I=150$  Amp.,
- IV)  $W=1,80$  kW; 0,83 g Argon/sec;  $I=300$  Amp.

Abfall der gemessenen Temperaturverteilung hängt mit den radialen Wärmeverlusten in der Strömung zusammen, die das Modell natürlich nicht wiedergeben kann. Die Differenzen zwischen Experiment und Modell werden um so größer, je mehr Energie aus dem heißen Kern in die kalte Randzone abflie-

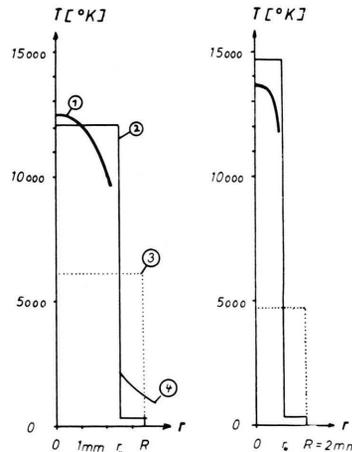


Abb. 13. Gemessener Temperaturverlauf (1), (4), Zweistufenmodell (2); Einstufenmodell (3).

Die spektroskopischen Messungen, die nur herunter bis zu Temperaturen von etwa 9000 °K möglich waren, ließen sich sehr gut ergänzen durch interferometrische Messungen [Abb. 13, Kurve (4)], die WITKOWSKI<sup>8</sup> unter denselben Bedingungen durchgeführt hat. Interpoliert man zwischen beiden Meßkurven, so erhält man praktisch ein Zweistufenprofil.

### Schlußbemerkung

Ziel dieser Arbeit war es, ein einfaches Modell für die Aufheizung des Arbeitsgases in einem Plasmabrenner zu finden. Der Vergleich zwischen Rechnung und Experiment zeigt, daß ein Zweistufenmodell ohne Reibung und Wärmeleitung brauchbar ist für die quantitative Beschreibung eines Plasmabrenners. Dieses Modell gibt die Möglichkeit, Endgeschwindigkeit und Endtemperatur im Plasmastrahl sehr schnell und mit guter Genauigkeit anzugeben, wenn man nur die Größen  $W$ ,  $I$ ,  $p_0 - p_1$  und  $F_*$  gemessen hat.

### Anhang

In Abb. 14 und Abb. 15 wird  $x = (h - h_0) \sqrt{\varrho}$  für verschiedene Gase als Funktion von Temperatur bzw. Dichte dargestellt.  $p = 1$  at. Die zugrunde liegenden Zustandswerte stammen von BURHORN und WIENECKE<sup>5</sup> (Wasserstoff und Stickstoff), von KNOCHE<sup>4</sup> (Argon) und FENEBERG<sup>9</sup> (Helium). Es ist zu erwarten, daß man auch bei Verwendung von He als Arbeitsgas mit dem Zweistufenmodell eine genaue Temperatur- und Geschwindigkeitsangabe machen kann, da die Heliumkurven ähnlich steil verlaufen wie die entsprechenden Argonkurven. Für Wasserstoff und Stickstoff erscheint das Zweistufenmodell dagegen weniger brauchbar. Die Messungen wurden jedoch bisher nur mit Argon durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. R. WIENECKE danke ich für die Stellung des Themas und für viele klärende Ratschläge. Herrn Dr. M. SALVAT schulde ich Dank für zahlreiche fördernde Diskussionen. Ich danke Herrn W. HOSS und Herrn P. REINHOLD, die bei der Durchführung der Experimente mitwirkten. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. E. FÜNFER, der mir die Möglichkeit gab, mit dieser Arbeit bei ihm zu promovieren.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

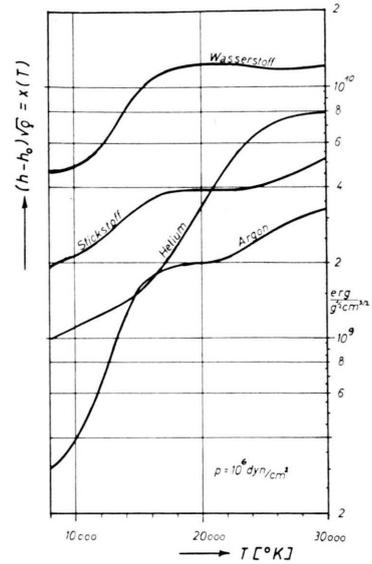


Abb. 14.  $x = (h - h_0) \sqrt{\varrho}$  als Funktion der Temperatur für Wasserstoff, Helium, Stickstoff und Argon.  $p = 1$  at.

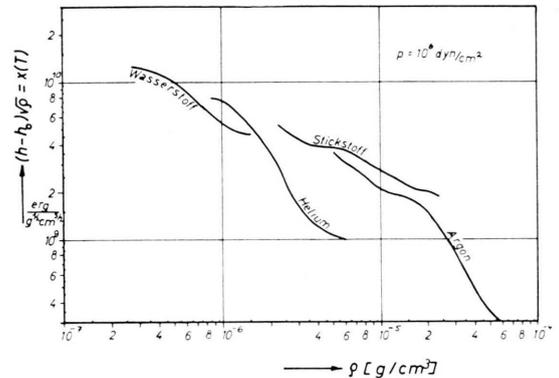


Abb. 15.  $x = (h - h_0) \sqrt{\varrho}$  als Funktion der Dichte für Wasserstoff, Helium, Stickstoff und Argon.  $p = 1$  at.

<sup>8</sup> S. WITKOWSKI, Bestimmung der Temperatur in einem Plasmastrahl aus interferometrischer Dichtemessung, IPP Garching, unveröffentlicht.

<sup>9</sup> W. FENEBERG, Zustandswerte von Helium, IPP Garching, unveröffentlicht.