

Der Widerstand und das Feld eines rechteckigen HALL-Plättchens

Von JOCHEN HAEUSLER

Aus dem Institut für Theorie der Elektrotechnik der Technischen Hochschule Stuttgart
(Prof. W. BADER)

(Z. Naturforsch. 17 a, 506—513 [1962]; eingegangen am 9. Februar 1962)

Die Abhängigkeit des Widerstandes eines rechteckigen HALL-Plättchens vom HALL-Winkel α und Seitenverhältnis λ wird mit Hilfe der konformen Abbildung untersucht. Als Lösungen werden Beziehungen zwischen den Widerständen von Plättchen reziproker Seitenverhältnisse, sowie Reihendarstellungen und einfache Näherungen für den Widerstand $R(\alpha, \lambda)$ im gesamten Wertebereich angegeben.

Es wird hervorgehoben, daß selbst bei unsymmetrischer Form des Plättchens der Widerstand invariant gegenüber der Umkehr des magnetischen Feldes ist, obwohl sich die elektrischen Felder im Plättchen in beiden Fällen stark unterscheiden. Dies wird für ein Parallelogramm unter geeigneten Bedingungen in zwei Feldlinienbildern gezeigt.

Zur Ermittlung des Feldlinienbildes eines rechteckigen HALL-Plättchens werden konforme Abbildungen vorgestellt, die die Angabe der elektrischen Feldstärke im Plättchen nach Betrag und Winkel, des Ladungsbesatzes auf den freien Seiten und der Stromdichte in elementarer Rechnung ermöglichen. Dabei fällt besonders die in Elektrodennähe ungleichmäßige Durchströmung auf, die hinsichtlich der Belastbarkeit des Plättchens interessant sein dürfte. Dies kann anschaulich einem ermittelten Feldlinienbild entnommen werden.

1. Die Aufgabe und Bemerkungen zum Lösungsgang

Für ein rechteckiges Plättchen, das vielen technischen Anwendungen zugrunde liegt, soll die Widerstandsänderung und Feldverzerrung im transversalen Magnetfeld untersucht werden. Zur Widerstandsberechnung wird die Methode der konformen Abbildung von WICK¹ übernommen und über bereits bekannte Zwischenergebnisse² zu abschließenden Resultaten geführt.

Zur Ermittlung des Feldlinienbildes bieten sich wesentlich einfachere Abbildungen als die von WICK angegebenen an, die in diesem Zusammenhang erstmals vorgestellt und angewandt werden. Ausgehend vom HALL-Effekt im beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiter wird im folgenden der Rechengang geschildert.

2. Kräfteplan und Feld im unendlich langen Leiter

Wird in einem beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiter der Dicke d und der Breite b der Stromtransport von nur einer Trägerart — im folgenden Elektronen — besorgt, so gilt im transversalen magnetischen Feld an jedem Elektron der in Abb. 1 gezeigte Kräfteplan.

Im stationären Zustand wirkt der LORENTZ-Kraft $\mathfrak{R}_L$ die Kraft $\mathfrak{R}_{el}$ infolge des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_2$ gleich groß entgegen. Die Feldstärke $\mathfrak{E}_2$ entsteht zwischen den zu einem freien Rand abgetriebenen Elektronen und dem Elektronenmangel auf dem anderen Rand.

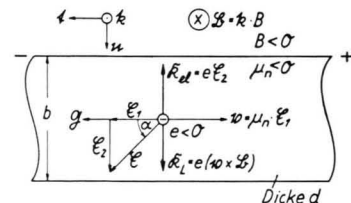


Abb. 1. Kräfteplan im beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiter.

$\mathfrak{E}_2$ und die ursprüngliche Feldstärke $\mathfrak{E}_1$ resultieren zur Gesamtfeldstärke $\mathfrak{E}$. Diese schließt mit der ursprünglichen Feldstärke, bzw. der Stromdichte $\mathfrak{G} = \kappa \mathfrak{E}_1$ den HALL-Winkel α ein.

κ ist die spezifische Leitfähigkeit, μ_n die Elektronenbeweglichkeit des betrachteten Leiters. Für den HALL-Winkel gilt:

$$\tan \alpha = \mu_n B. \quad (1)$$

Da nach Abb. 1 $B < 0$ gesetzt wurde und $\mu_n < 0$ ist, ergibt sich $\tan \alpha > 0$.

Gemäß $\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi$ erhält man das in Abb. 2 gezeigte Feldlinienbild für den beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiter.

¹ R. F. WICK, J. Appl. Phys. 25, 741 [1954].

² H. J. LIPPMANN u. F. KUERT, Z. Naturforsch. 13 a, 462 [1958].

Dabei wird deutlich, wie zwischen den Punkten 1 und 2 eine Spannung, die sog. HALL-Spannung, entsteht. Da die HALL-Spannung im folgenden nicht weiter untersucht wird, sei nur kurz auf die bekannte Beziehung verwiesen, die sich nach dem Ansatz $U_{H\infty} = b E_2$ und entsprechender Umrechnung ergibt:

$$U_{H\infty} = (R_H/d) B i. \quad (2)$$

R_H ist die sog. HALL-Konstante³ und i der den

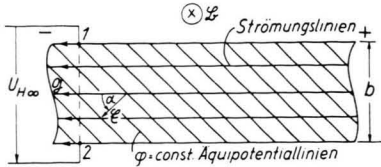


Abb. 2. Feldlinienbild des beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiters.

Leiter durchfließende Strom, d die Dicke des Leiters in Richtung des magnetischen Feldes.

3. Verstofflichung

Verstofflicht man in dem gewonnenen Feldlinienbild zwei Äquipotentiallinien durch hochleitende Elektroden und legt zwischen diesen eine Spannung an, die der Potentialdifferenz zwischen den verstofflichten Äquipotentiallinien entspricht, so liegt in der nunmehr endlichen Anordnung – einem Parallelogramm – ein bekanntes Feld, nämlich das des unendlich langen Leiters, vor. Dies gilt für jeweils einen bestimmten HALL-Winkel.

4. Konforme Abbildung

Durch konforme Abbildung des Parallelogramms auf ein Rechteck können HALL-Spannung, Widerstand, Feldbild und Ladungsbesatz für das Rechteck ermittelt werden.

Aufbauend auf den Arbeiten von WICK¹ sowie LIPPMANN und KUHRT² soll zunächst auf die Widerstandsberechnung eingegangen werden. Zum Verständnis der folgenden Abbildungsschritte ist ein Hinweis auf die SCHWARZ-CHRISTOFFELSche Formel erforderlich.

Nach dieser Abbildungsfunktion

$$z(\zeta) = \Re \int_0^{\zeta} (t - \xi_1)^{-\gamma_1/\pi} (t - \xi_2)^{-\gamma_2/\pi} \dots (t - \xi_n)^{-\gamma_n/\pi} dt + \Im \quad (3)$$

läßt sich die obere ζ -Halbebene auf ein n -Eck abbilden, wobei n vorgeschriebene Punkte der ξ -Achse in n Eckpunkte übergehen, und die Winkel durch Wahl der γ_n bestimmt werden können (vgl. Abb. 3).

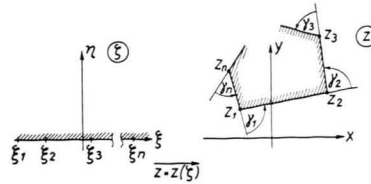


Abb. 3. SCHWARZ-CHRISTOFFELSche Formel.

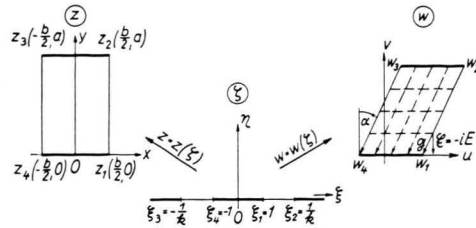


Abb. 4. Die Abbildungsschritte zur Ermittlung des Widerstandes.

Den Widerstand des Rechteckes ermittelt man in folgenden Abbildungsschritten, die in Abb. 4 gezeigt sind. Zunächst wird aus der Abbildung des Rechteckes der z -Ebene auf die obere ζ -Halbebene der Zusammenhang zwischen dem Seitenverhältnis $\lambda = a/b$ des Rechteckes und der Größe k der ζ -Ebene bestimmt. Darauf wird die obere ζ -Halbebene auf das Parallelogramm der w -Ebene abgebildet. Da das Parallelogramm ein Ausschnitt aus dem unendlich langen Leiter ist, kann aus dem somit bekannten Feld der Widerstand ermittelt werden.

Der erste Abbildungsschritt

$$z(\zeta) = \Re \int_0^{\zeta} (t-1)^{-1/2} (t-1/k)^{-1/2} \cdot (t+1/k)^{-1/2} (t+1)^{-1/2} dt + \Im, \quad (4)$$

$$z(\zeta) = A_1 \int_0^{\zeta} [(1-t^2)(1-k^2 t^2)]^{-1/2} dt$$

führt auf tabellierte elliptische Integrale und liefert den Zusammenhang:

$$\lambda = a/b = K(\sqrt{1-k^2})/[2K(k)] = K(k')/[2K(k)]. \quad (5)$$

In (5) sind K Abkürzungen für vollständige elliptische Integrale 1. Gattung vom Modul k und seinem komplementären Modul $k' = \sqrt{1-k^2}$. Mit Hilfe der Transformationsformeln für vollständige elliptische Integrale⁴

$$\frac{1}{2}(1+k) K(k') = K\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$$

³ E. H. PUTLEY, The HALL Effect and Related Phenomena. Butterworth, London 1960.

⁴ OBERHETTINGER-MAGNUS, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Springer-Verlag, Berlin 1949.

und $(1+k) K(k) = K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$ wird aus (5)

$$\begin{aligned} \lambda &= K\left(\frac{1-k}{1+k}\right) / K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \\ &= K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2}\right) / K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Umformung wird später benötigt.

Die Abbildungsfunktion für den zweiten Schritt lautet:

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \Re \int_0^{\zeta} (t-1)^{-(1/2-\alpha/\pi)} (t-1/k)^{-(1/2+\alpha/\pi)} \\ &\quad \cdot (t+1/k)^{-(1/2-\alpha/\pi)} (t+1)^{-(1/2+\alpha/\pi)} dt + \Im, \\ w(\zeta) &= A_2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} [(t-1)(t+1/k)]^{-(1/2-\alpha/\pi)} \\ &\quad [(t+1)(t-1/k)]^{-(1/2+\alpha/\pi)} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

5. Ermittlung von $R(\alpha, \lambda)$

Für den Widerstand des Parallelogramms gilt $R = U/I$, wobei sich U und I durch die Feldstärke E

ausdrücken lassen (vgl. Abb. 1 und Abb. 4 rechts):

$$U = E(\cos \alpha) |w_2 - w_1|,$$

$$I = G_N d(w_1 - w_4),$$

$$G_N = G \cos \alpha; \quad G = \kappa E \cos \alpha \quad (\text{vgl. Abschn. 2}),$$

$$I = d \kappa E(\cos^2 \alpha) (w_1 - w_4),$$

$$R = \frac{1}{\kappa d} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{|w_2 - w_1|}{(w_1 - w_4)}. \quad (8)$$

In (8) ist $|w_2 - w_1|/(w_1 - w_4) = \lambda'$ das Seitenverhältnis des Parallelogramms. Den Seiten entsprechen in der ζ -Halbebene die Strecken ξ_1 bis ξ_2 und ξ_4 bis ξ_1 .

Nennt man den Integranden in (7) $f(t)$, so gilt für den Widerstand

$$R = \frac{1}{\kappa d} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\int_1^{1/k} f(t) dt}{\int_{-1}^1 f(t) dt}. \quad (9)$$

Da (5) bzw. (6) einen Zusammenhang zwischen λ und k festlegen, ist somit für das Rechteck ein Ausdruck für $R = R(\alpha, \lambda)$ gefunden.

LIPPMANN und KUERT² geben nach geeigneter Substitution und unter Berücksichtigung der Feldabhängigkeit der Leitfähigkeit $\kappa = \kappa(\alpha)$ für $R(\alpha, \lambda)$ an:

$$R(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\kappa(\alpha) d} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\int_0^\infty \cosh(2\alpha v/\pi) [\sinh^2 v + 4k/(1+k)^2]^{-1/2} dv}{\int_0^\infty \cosh(2\alpha v/\pi) [\sinh^2 v + ((1-k)/(1+k))^2]^{-1/2} dv}. \quad (10)$$

$\kappa(\alpha)$ ist aus Messungen bekannt. Nach einfacher Umformung wird aus (10):

$$R(\alpha, \lambda) \kappa(\alpha) d \cos \alpha = \frac{\int_0^\infty \cosh(2\alpha v/\pi) [\sinh^2 v + (2\sqrt{k}/(1+k))^2]^{-1/2} dv}{\int_0^\infty \cosh(2\alpha v/\pi) [\sinh^2 v + 1 - (2\sqrt{k}/(1+k))^2]^{-1/2} dv}. \quad (11)$$

Hier wird deutlich, daß bei Vertauschung von $1 - [2\sqrt{k}/(1+k)]^2$ mit $[2\sqrt{k}/(1+k)]^2$ der Ausdruck (11) in seinen reziproken Wert übergeht. Das gleiche gilt für das Seitenverhältnis in (6).

$$\text{Somit wird} \quad R(\alpha, \lambda) R(\alpha, 1/\lambda) = [1/\kappa(\alpha) d \cos \alpha]^2 \quad (12a)$$

und in bezogener Darstellung:

$$\begin{aligned} r(\alpha, \lambda) &= R(\alpha, \lambda)/R(0, \lambda), \\ r(\alpha, \lambda) r(\alpha, 1/\lambda) &= [\kappa(0)/\kappa(\alpha) \cos \alpha]^2. \end{aligned} \quad (12b)$$

Läßt man in (12b) die Abhängigkeit der Leitfähigkeit $\kappa(\alpha)$ unberücksichtigt, so werden die rein geometrisch bedingten Zusammenhänge deutlicher. Mit dem von der CORBINO-Scheibe her bekannten relativen Widerstand

$$r_{\text{Corb}} = 1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\text{wird} \quad r(\alpha, \lambda) r(\alpha, 1/\lambda) = r_{\text{Corb}} = 1 + \tan^2 \alpha. \quad (13a)$$

Aus (13a) ist für $\lambda = 1$ abzulesen:

$$r(\alpha, 1) = \sqrt{r(\alpha, \lambda) r(\alpha, 1/\lambda)} = \sqrt{r_{\text{Corb}}} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (13b)$$

Wir können diese Erkenntnis, die bisher nur für $\lambda = 0$ bzw. ∞ gefunden wurde, folgendermaßen formulieren:

Das Produkt der relativen Widerstände zweier Plättchen reziproker Seitenverhältnisse ist gleich dem relativen Widerstand der CORBINO-Scheibe. Der relative Widerstand eines quadratischen Plättchens ist gleich dem geometrischen Mittel der relativen Widerstände zweier Plättchen reziproker Seitenverhältnisse.

Die mit (12) bzw. (13) gefundene Beziehung vereinfacht die Ermittlung des Widerstandes, denn mit der Lösung für $0 \leq \lambda \leq 1$ sind auch die Werte $1 \leq \lambda \leq \infty$ gefunden und umgekehrt.

Wir kehren nun zu Gl. (10) zurück. Setzt man dort $\alpha/\pi = p$, $e^{2v} = t$, so lassen sich Zähler- und Nennerintegral auf die Form

$$R(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\kappa(\alpha) d \cos \alpha} \frac{\int_0^\infty (t p^{-1/2} + t^{-p-1/2}) (t^2 + 2v t + 1)^{-1/2} dt}{\int_0^\infty (t p^{-1/2} + t^{-p-1/2}) (t^2 - 2v t + 1)^{-1/2} dt} \quad \text{mit} \quad v = [8/(1+k)^2] - 1$$

zurückführen, für die eine Reihendarstellung bekannt ist⁵. Es ergibt sich:

$$R(\alpha, \lambda) = [1/(\kappa(\alpha) d \cos \alpha)] [(g-1)/(g+1)], \quad (14a)$$

wobei in g tabellierte F -Funktionen und hypergeometrische Reihen F eingehen:

$$g = \frac{\Gamma[(1/2) - \varepsilon] \Gamma[\varepsilon]}{2v \Gamma[1 - \varepsilon] \cdot \Gamma[(1/2) + \varepsilon]} \cdot \frac{F[(1/2) - \varepsilon; \varepsilon; 1/2; v^2]}{F[1 - \varepsilon; (1/2) + \varepsilon; 3/2; v^2]} \quad (14b)$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon = 1/4 - \alpha/2\pi. \quad (14c)$$

Das Ergebnis (14a) bis (14c) erlaubt einmal eine Auswertung mit Hilfe von Rechenmaschinen, zum anderen sind für kleine v , d. h. $\lambda \approx 1$, Näherungen für g aus (14b) angebbbar:

$$g \approx \frac{2}{\sin 2\pi\varepsilon} \left(\frac{[(1/2) + \varepsilon] (1 - \varepsilon) \pi}{\Gamma[(3/2) + \varepsilon] \Gamma[2 - \varepsilon]} \right)^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon(1 - 2\varepsilon) \{ [1 + (\varepsilon/3) \cdot (1 - 2\varepsilon)] (\ln[1/(1 - v^2)] - v^2) + v^2 \}}{(1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2) [\ln[(1+v)/(1-v)] - 2v + 2v]}. \quad (14d)$$

Diese Näherung ist für den Bereich $0,5 \lesssim \lambda \lesssim 2$ mit einem Fehler $\lesssim 1\%$ anwendbar. Sie ist jedoch noch relativ aufwendig und enthält λ nur über die Zwischengröße k aus der konformen Abbildung. Daher sollen zum Abschluß der Widerstandsberechnung Näherungen vorgestellt werden, die R direkt als Funktion von α und λ liefern. Für $\alpha = \pi/4$ und $\alpha = \pi/6$ lassen sich die Integrale (10) auf tabellierte elliptische Integrale zurückführen. Für den ersten Fall sei der Rechengang angedeutet:

$$R(\pi/4, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa(\pi/4) d} \frac{\int_0^\infty \cosh(v/2) [\sinh^2 v + (4k)/(1+k)^2]^{-1/2} dv}{\int_0^\infty \cosh(v/2) [\sinh^2 v + ((1-k)/(1+k))^2]^{-1/2} dv}.$$

Die Substitution $\sinh(v/2) = t$ führt auf

$$R(\pi/4, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa(\pi/4) d} \frac{\int_0^\infty [t^4 + t^2 + (k/(1+k)^2)]^{-1/2} dt}{\int_0^\infty [t^4 + t^2 + ((1-k)/2(1+k))^2]^{-1/2} dt}.$$

Als Lösung dieser Integrale findet man⁶

$$R(\pi/4, \lambda) = [1/(\kappa(\pi/4) d)] [K(1-k)/K(\sqrt{k})]. \quad (15)$$

Die graphische Darstellung der in (15) ermittelten Abhängigkeit ist unter anderem in Abb. 6 gezeigt. Der Kurvenverlauf wies auf ein asymptotisches Übergehen der Widerstandskurven in Parallelen hin, deren Ab-

⁵ GRÖRNER-HOFREITER, Integraltafel, Springer-Verlag, Wien 1958, 2. Teil, S. 184.

⁶ Siehe Anm. ⁵, S. 51.

stand von der Geraden des Grundwiderstandes ($\alpha=0$) nur eine Funktion des HALL-Winkels α ist. Tatsächlich geht der Widerstandsdruck (10) für $\lambda \rightarrow \infty$, d. h. $k \rightarrow 0$, in die Form über:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} R(\alpha, \lambda) &= R_0 + \varrho_\infty(\alpha) / [\varkappa(\alpha) d] \quad \text{mit} \quad R_0 = \lambda / [\varkappa(\alpha) d], \\ \lim_{k \rightarrow 0} R(\alpha, \lambda) &= [1 / (\varkappa(\alpha) d)] [\lambda + \varrho_\infty(\alpha)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Aufspaltung des Zählers in (10) und Reihenentwicklung des Nenners mit Auswertung dabei auftauchender Teilintegrale⁷ liefert:

$$R(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\varkappa(\alpha) d \cos \alpha} \frac{k \left[K(\sqrt{1-k^2}) + \frac{2}{1+k} \int_0^\infty [\cosh(2p\nu) - 1] \cdot \left(\sinh^2 \nu + \frac{4k}{(1+k)^2} \right)^{-1/2} d\nu \right]}{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{2k}{1+k} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} - p^2 \right) + \dots \delta^n \left(\frac{-1/2}{n} \right) \frac{2^{2n}}{(2n)!} \prod_1^n [(n-1/2)^2 - p^2] \right\}}$$

mit $\delta = [(1-k)/(1+k)]^2 - 1$. — Da $K(0) = \pi/2$ ist, wird im Grenzfall:

$$\begin{aligned} \lim_{\varkappa \rightarrow 0} R(\alpha, \lambda) &= \frac{1}{\varkappa(\alpha) d} \left[\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{2K(k)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cosh(2p\nu) - 1}{\sinh \nu} d\nu \right] \\ &= \frac{1}{\varkappa(\alpha) d} \left(\lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh(2p\nu) + e^{-2p\nu} - 1}{\sinh \nu} d\nu \right). \end{aligned} \quad (17)$$

λ geht bei diesem Grenzübergang natürlich selbst gegen ∞ ! Vergleicht man (16) mit (17), so erhält man

$$\varrho_\infty(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh(2\alpha\nu/\pi)}{\sinh \nu} d\nu + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha\nu/\pi} - 1}{e^\nu - e^{-\nu}} d\nu.$$

Die Lösung dieser Integrale ergibt⁸:

$$\begin{aligned} \varrho_\infty(\alpha) &= \tan \alpha - \frac{2}{\pi} \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} \right) \right], \\ \varrho_\infty(\alpha) &= \tan \alpha - \frac{2}{\pi} \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) + \mathfrak{E} + 2 \ln 2 \right], \\ \mathfrak{E} &= \text{EULERSche Konst.} = 0,577. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Ψ -Funktion findet man tabelliert⁹.

Nach (12 a) ergibt sich für $\lambda=1$ exakt:

$$R(\alpha, 1) = \frac{1}{\varkappa(\alpha) d} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}. \quad (19)$$

Nimmt man auch hier eine Aufspaltung in Grundwiderstand und winkelabhängigen Anteil vor, so ergibt sich

$$R(\alpha, 1) = \frac{1}{\varkappa(\alpha) d} (1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - 1) \quad (20)$$

mit $\varrho_1(\alpha) = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - 1$.

Es zeigt sich, daß zwischen $\varrho_\infty(\alpha)$ und $\varrho_1(\alpha)$ bereits

kein sehr großer Unterschied mehr besteht; während $\varrho_\infty(\alpha)$ und $\varrho_1(\alpha)$ mit $\alpha \rightarrow \pi/2$ nach ∞ streben, ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} [\varrho_\infty(\alpha) - \varrho_1(\alpha)] = 1 - (4/\pi) \ln 2 = 0,1177.$$

Diese Tatsache erlaubt die Konstruktion brauchbarer Näherungen, deren Gültigkeit im Vergleich mit den Lösungen für $\alpha=\pi/4$, $\alpha=\pi/6$ und alle λ bzw. $\lambda=1$ und alle α ermittelt wurde. Abb. 5 zeigt das Schema.

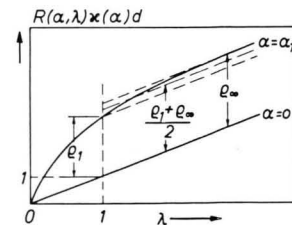


Abb. 5. Schema zur Konstruktion der Näherungen.

Für $\lambda \geq 1$ wird dem Grundwiderstand der winkelabhängige Anteil ϱ_1 , $(\varrho_1 + \varrho_\infty)/2$ oder ϱ_∞ hinzu-

⁷ Siehe Anm. ⁵, S. 54.

⁸ Siehe Anm. ⁵, S. 161 bzw. 55.

⁹ JAHNKE-EMDE-LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, Teubner-Verlag, Stuttgart 1960.

gefügt. Für $\lambda \leq 1$ werden Werte nach (12 b) ermittelt.

$$\lambda \geq 1: r(\alpha, \lambda) = \frac{\kappa(0)}{\kappa(\alpha)} \left(1 + \frac{\varrho(\alpha)}{\lambda} \right), \quad (21 a)$$

$$\lambda \leq 1: r(\alpha, \lambda) = \frac{\kappa(0)}{\kappa(\alpha)} \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \lambda \cdot \varrho(\alpha)}. \quad (21 b)$$

Für ϱ ist zu setzen bei

$$\lambda \approx 1: \varrho = \varrho_1(\alpha),$$

$$\lambda \leq 1: \varrho = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_\infty) \quad (21 c)$$

$$= \frac{\sin \alpha + 1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} - \frac{1}{\pi} \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) + \mathfrak{C} + 2 \ln 2 \right],$$

$$\lambda \leq 1: \varrho = \varrho_\infty(\alpha).$$

Im ersten und dritten Falle tritt ein maximaler Fehler $< 2,5\%$ auf, der im dritten Falle bei $\lambda = 1$ liegt, im ersten nicht genau lokalisiert werden kann. Im zweiten Falle bleibt der maximale Fehler $< 1,23\%$ für alle α und λ .

In Abb. 6 und 7 sind die Widerstandskurven graphisch dargestellt.

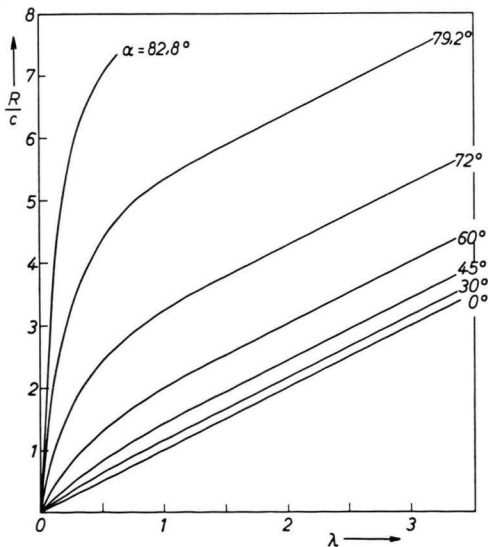


Abb. 6. Abhängigkeit des Widerstandes vom Seitenverhältnis $\lambda = a/b$ und vom HALL-Winkel α . ($c = 1/\kappa(\alpha)$ d.)

6. Widerstand einfach zusammenhängender HALL-Plättchen beliebiger Form

Es sei noch betont, daß die Lösung des Widerstandsausdrucks (10) die Lösung aller HALL-Plättchen mit einfach zusammenhängender Fläche und linienförmigen Elektroden längs des Randes enthält.

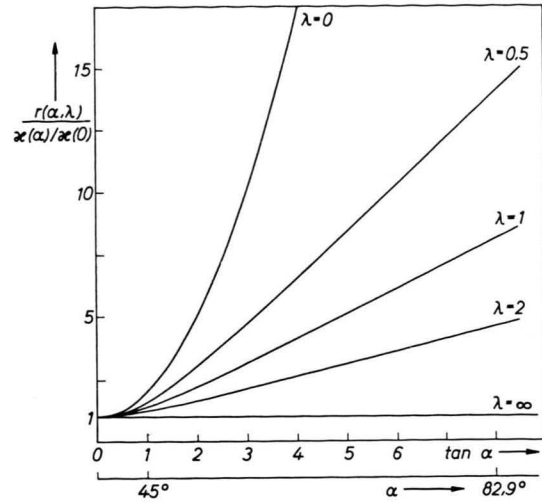


Abb. 7. Abhängigkeit des relativen Widerstandes $r = \frac{R(\alpha, \lambda)}{R(0, \lambda)}$ vom HALL-Winkel α und vom Seitenverhältnis $\lambda = a/b$. Da die ermittelte Abhängigkeit nur den Geometrieinfluß berücksichtigt, wurde $r(\alpha, \lambda) \cdot [\kappa(0)/\kappa(\alpha)]$ aufgetragen.

CORBINO-Scheibe: $\lambda = 0$.

Es ändert sich lediglich die Bedeutung der Hilfsgröße k je nach Abbildung. Als Grenzfall kommen noch zweifach – aber ganz von Elektroden – berandete Flächen hinzu (CORBINO-Scheibe).

W. BADER wies in diesem Zusammenhang auf eine eigenartige Erscheinung hin, die besonders bei unsymmetrischen HALL-Plättchen auffällt. In (10) wird deutlich, daß unabhängig von der geometrischen Form des Plättchens der Widerstand invariant gegen die Richtung des magnetischen Feldes ist:

$$R(\alpha, \lambda) = R(-\alpha, \lambda). \quad (22)$$

Das ist deswegen eigenartig, weil bei Feldumkehr in unsymmetrischen Plättchen eine ganz andere Anordnung des Feldes erzwungen wird, als sie bei der

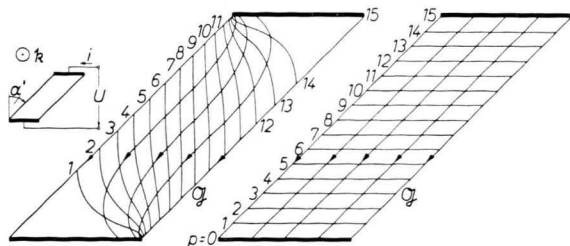


Abb. 8. Die Feldbilder eines Parallelogramms für die beiden Richtungen des transversalen Magnetfeldes. Der Widerstand ist von der Feldrichtung unabhängig: $R(\alpha) = R(-\alpha)$. $\varphi = (p/15)U$, $\alpha' = \pi/4$. Links: $B > 0$, $\alpha = -\alpha'$, rechts: $B < 0$, $\alpha = \alpha'$.

ursprünglichen Feldrichtung vorliegt. Diese Erscheinung wurde an einem Parallelogramm mit dem räumlichen Winkel $\alpha' = \pi/4$ bei den HALL-Winkeln $\alpha = \pi/4$ und $-\alpha$ untersucht. Die Feldbilder, deren Ermittlung noch vorgestellt wird, sind in Abb. 8 gegenübergestellt.

7. Ermittlung der Feldstärke des Plättchens

Da die zur Widerstandsberechnung beschriebene Abbildung nur über langwierige numerische Auswertung zu einem Feldlinienbild und der Feldstärke führt¹, ist eine Näherungsmethode zweckmäßig, die berücksichtigt, daß der feldverzerrende Elektroden- einfluß schon im Abstand einer Elektrodenlänge von der Elektrode aus gerechnet stark abgeklungen ist (Abb. 6).

Als Ausgangspunkt dient wieder das Feld des beidseitig unbegrenzten, unendlich langen Leiters (Abb. 2), jedoch wird jetzt nur eine Äquipotential- linie verstofflicht. Der gegen diese Elektroden ge- neigte Streifen wird auf einem rechtwinkligen be- grenzten abgebildet. Das bedeutet den Übergang vom beidseitig unbegrenzten zum einseitig begrenz- ten, unendlich langen Leiter. Abb. 9 zeigt die Ab- bildungsschritte.

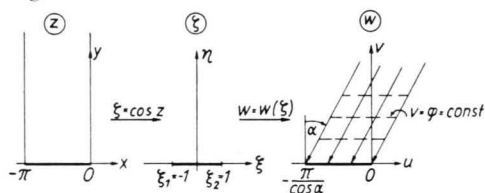


Abb. 9. Die Abbildungsschritte zur Ermittlung des Feldbildes.

Der Streifen der z -Ebene mit der Breite π wird durch

$$\xi = \cos z \quad (23)$$

auf die obere ξ -Halbebene abgebildet. Den zweiten Abbildungsschritt leistet ein Sonderfall der SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Formel für ein Dreieck, dessen einer Eckpunkt im Unendlichen liegt.

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \Re \int_1^{\xi} (t - \xi_1)^{-(1/2) + (i/\pi)} \cdot (t - \xi_2)^{-(1/2) - (i/\pi)} dt \\ &= \Re \int_1^{\xi} (t^2 - 1)^{-1/2} \cdot [(t - 1)/(t + 1)]^{i/\pi} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Durch Wahl der Elektrodenlänge $\pi/\cos \alpha$ in der w -Ebene hat der Streifen in der z - und w -Ebene die gleiche Breite. Setzt man in (24) $t = \cos \omega$, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (23) für die

Abbildungsfunktion

$$w = \Re \int_0^z [\tan(\omega/2)]^{2i/\pi} d\omega. \quad (25)$$

Da in der Ebene $w = u + i v$ v die Potentialfunktion ist, gilt für die Feldstärke in der z -Ebene

$$\mathfrak{E} = i \overline{\partial w} / \partial z. \quad (26)$$

Mit (25) und (26) und den Randbedingungen für $\mathfrak{E}$ ergibt sich $\Re' = 1$, und die Abbildungsfunktion lautet:

$$w = \int_0^z [\tan(\omega/2)]^{2i/\pi} d\omega. \quad (27)$$

Für die Feldstärke erhält man:

$$\mathfrak{E} = i [\tan(z/2)]^{2i/\pi}$$

und nach Zerlegung in Betrag und Winkel

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\cosh y - \cos x}{\cosh y + \cos x} \right)^{2/\pi} \exp \left\{ -i \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\alpha}{\pi} \arctan \frac{\sinh y}{\sin x} \right) \right\}. \quad (28)$$

Aus (28) ergeben sich als Isodynamen (Kurven konstanten Feldstärkebetrages):

$$y = \operatorname{arcosh} \left(\frac{1 + c_1^{\pi/2}}{1 - c_1^{\pi/2}} \cos x \right) \quad (29)$$

und als Isoklinen (Kurven konstanten Winkels):

$$y = \operatorname{arsinh} [(\sin x) \tan((\pi/2 - \alpha)(c_2 - \pi/2))] \quad (30)$$

mit $\pi/2 \geq c_2 \geq \pi/2 - \alpha$.

Die Kurven sind in Abb. 10 für $\alpha = \pi/4$ dargestellt. Dort sind ebenfalls unter Einführung eines neuen Koordinatensystems einige wichtige Beziehungen zusammengestellt, die sich aus (29) und (30) ergeben. Bei Änderung des HALL-Winkels ändert sich lediglich die Bezifferung, nicht die Form der Kurven.

Die Kenntnis der Feldstärke nach Betrag und Winkel erlaubt Aussagen über den Ladungsbesatz

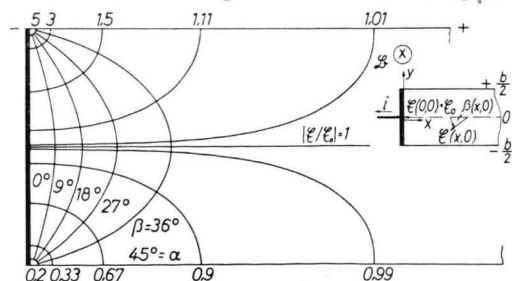


Abb. 10. Isodynamen und Isoklinen der elektrischen Feldstärke für $\alpha = \pi/4$. Es ist $\beta(x, \pm b/2) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x, y) = \alpha$ für

$$\begin{aligned} |y| \leq b/2, \quad |\mathfrak{E}(x, y)| |\mathfrak{E}(x, -y)| &= |\mathfrak{E}_0|^2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} |\mathfrak{E}(x, y)| &= |\mathfrak{E}_0|. \end{aligned}$$

an den freien Seiten, d. h. die Ladung pro Längenelement des Randes. Ist E_N die Normalkomponente dort, so gilt für den Ladungsbesatz σ mit der Dielektrizitätskonstanten ε :

$$\sigma = d \varepsilon E_N, \quad (31)$$

und beim unendlich langen Leiter (Abb. 1 und 2)

$$\sigma_\infty = d \varepsilon E \sin \alpha.$$

Nach Abb. 9 erhält man aus (28):

$$x=0: \quad \sigma/\sigma_\infty = -[\tanh(y/2)]^{2\alpha/\pi}, \quad (32a)$$

$$x=-\pi: \quad \sigma/\sigma_\infty = [\cotanh(y/2)]^{2\alpha/\pi}. \quad (32b)$$

Für die Belastung des Plättchens ist die in Elektrodennähe ungleichmäßige Durchströmung interessant. Bezogen auf den Betrag der Stromdichte im unendlich langen Leiter

$$G_\infty = \kappa E \cos \alpha$$

erhält man für die Stromdichte bei Austritt aus der Elektrode

$$y=0: \quad G/G_\infty = [\tan(x/2)]^{2\alpha/\pi}. \quad (33)$$

Abb. 11 zeigt die in (32 a und b) und (33) ermittelten Abhängigkeiten nach Einführung eines neuen Koordinatensystems für einen HALL-Winkel $\alpha = \pi/4$.

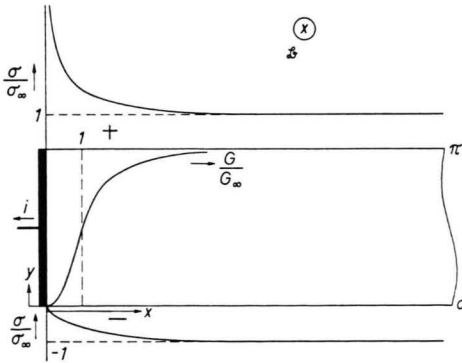


Abb. 11. Ladungsbesatz σ/σ_∞ und Betrag der Stromdichte G/G_∞ für $\alpha = \pi/4$. In diesem Fall ist:

- am oberen Rand: $\sigma = \sigma_\infty \sqrt{\coth(x/2)}$,
- am unteren Rand: $\sigma = -\sigma_\infty \sqrt{\tanh(x/2)}$,
- an der Elektrode: $G = G_\infty \sqrt{\tan(y/2)}$; $x=0$.

8. Ermittlung des Feldlinienbildes

Wendet man auf die Abbildungsfunktionen (24) die Substitution

$$t = (\tau^m + 1)/(\tau^m - 1)$$

an, so wird mit $m = 2\pi/(\pi - 2\alpha)$

$$w = i e^{i\alpha} m \int_{f(z)} (\tau^m - 1)^{-1} d\tau, \quad (34)$$

wobei die obere Grenze $f(z) = [-i \cotan(z/2)]^{2/m}$ ist. (34) zeigt an, daß die Abbildungsfunktion für ganzzahlige m nach Partialbruchzerlegung elementar zu integrieren ist, d. h. für

$$\alpha/\pi = 1/2 - 1/m \quad (m \geq 2).$$

Für $\alpha = \pi/4$ wurde das Feldlinienbild ermittelt. Diese Abbildungsfunktion lautet nach Partialbruchzerlegung in (34):

$$w = \sqrt{2}(1-i) [\operatorname{arccotanh} \sqrt{-i \cotanh(z/2)} - \operatorname{arccot} \sqrt{-i \cotanh(z/2)}]. \quad (35)$$

Da sich die Umkehrfunktion nicht finden läßt, muß ein orthogonales Netz der z -Ebene in die w -Ebene abgebildet werden und an Hand dieses übertragenen Netzes werden die Äquipotential- und Strömungslinien auf den Streifen der z -Ebene übertragen.

Wie erwartet geht das Feld schon im Abstand von ein bis zwei Elektrodenlängen von der Elektrode in das Feld des unendlich langen Leiters über. Da die Äquipotentiallinien im Übergangsgebiet S-förmig verlaufen, ist bereits dort eine Auftrennung und Ergänzung zum endlichen rechteckigen Plättchen ohne großen Fehler möglich. So konnte das Feld für das Seitenverhältnis $\lambda = 2,4$ ermittelt werden, das bei Vertauschung von Äquipotential- und Strömungslinien das Feldbild für $\lambda = 1/2,4$ mitliefert.

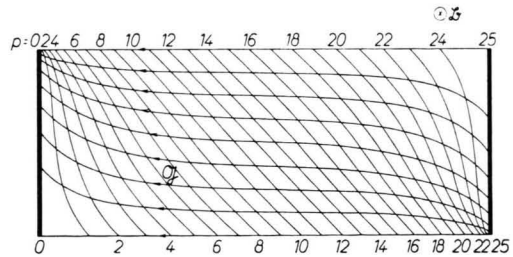


Abb. 12. Äquipotential- und Stromlinien eines rechteckigen HALL-Plättchens mit dem Seitenverhältnis $\lambda = 2,4$ beim HALL-Winkel $\alpha = \pi/4$. $\varphi = (p/25) U$. U = Spannung am HALL-Plättchen.

Abb. 12 zeigt das Feldlinienbild. Darin werden die stark durchströmten Ecken deutlich, deren Lage nur von der Feldrichtung, nicht von der Stromrichtung abhängt. Die Stromverteilung ist unabhängig von der Stromrichtung. Dagegen geht bei Umkehr des magnetischen Feldes das Feldlinienbild bezüglich der Längsachse des Plättchens in sein Spiegelbild über. Ferner kann man ablesen, daß mit wachsendem Abstand von der Elektrode die HALL-Spannung ihrem größten Wert in der Plättchenmitte zustrebt.