

# Kraftfreie Magnetfelder II

Von A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 12 a, 855—859 [1957]; eingegangen am 5. September 1957)

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der kraftfreien Magnetfelder wird für den zylindersymmetrischen Fall angegeben. Die Energiedichte des Magnetfeldes kann als Funktion des Abstandes von der Symmetrieachse vorgegeben werden, sie muß nur zwei Ungleichungen befriedigen. Die Komponenten des magnetischen Feldvektors und der elektrischen Stromdichte folgen dann durch Differentiation. Durch Konstruktion eines Beispiels wird gezeigt, daß ein solches Feld Impuls und Drehimpuls in Richtung der Achse transportieren kann in einem Ausmaß, das durch den Gesamtstrom und den gesamten magnetischen Fluß nicht bestimmt ist.

The general solution of the differential equation of force-free magnetic fields is given in the case of cylindrical symmetry. The energy density has to fulfil two inequalities; apart from this, it can be freely chosen as function of the distance from the axis of symmetry. The components of the field as well as the electric current density follow from it purely by differentiation. By explicitly constructing a three-parameter family of such force-free fields it is shown that the amount of momentum and of angular momentum transported by the field in the direction of the axis is not determined by the total magnetic and electric flux of the field.

Wir nennen Magnetfelder kraftfrei, wenn sie in einem Gebiete keine Kraft auf die Materie ausüben. Die Materie soll als nichtpolarisierbar vorausgesetzt sein; dann ist die Dichte der Kraft, die das Magnetfeld ausübt,

$$\mathbf{f} = (1/c) [\mathbf{j}, \mathbf{\zeta}], \quad (1)$$

wo  $\mathbf{j}$  die Dichte des elektrischen Stromes ist. Trivialerweise kraftfrei sind also Magnetfelder in den Gebieten, in denen kein elektrischer Strom fließt. Wenn aber Strom fließt, so muß er in dem ganzen betrachteten Gebiet an jedem Ort parallel zum jeweiligen Magnetfeld sein. Wir hatten bereits früher<sup>1</sup> auf die Bedeutung dieser kraftfreien Magnetfelder für astrophysikalische Probleme hingewiesen. Darüber hinaus scheinen sie auch für terrestrische Experimente mit großen Feldstärken wichtig zu sein. In der zitierten Arbeit hatten wir die allgemeine Lösung gegeben für die rotationssymmetrischen kraftfreien Felder, bei denen der Strom nicht nur parallel, sondern auch proportional zum Felde ist. CHANDRASEKHAR hat dann gezeigt<sup>2</sup>, daß sich unsere Lösung durch GEBENBAUERSche Funktionen einfach darstellen läßt. Wir verschärfen nun die Symmetriebedingung, indem wir von unseren Lösungen die Symmetrie eines Kreiszylinders fordern — also Invarianz der Lösung gegen Rotation um eine Achse und gegen Verschiebung parallel zur Achse, während wir dafür die Bedingung der Proportionalität aufgeben. Bei Zylindersymmetrie sind alle Feldlinien

notwendig Schraubenlinien um die Achse mit einer Steigung, die längs jeder Feldlinie konstant ist, aber von Feldlinie zu Feldlinie verschieden sein kann.

Wir führen Zylinderkoordinaten  $z, s, \varphi$  ein und betrachten die entsprechenden Komponenten des Magnetfeldes. Wegen der Zylindersymmetrie sind dann die Feldkomponenten Funktionen nur von  $s$ . Für das Verschwinden der Divergenz ist für Felder, die auch für  $s=0$  regulär sind, notwendig und auch hinreichend, daß  $H_s \equiv 0$ . Es bleiben die beiden anderen Komponenten zunächst frei verfügbar; aus diesen folgt für den elektrischen Strom

$$\begin{aligned} (4\pi/c) j_\varphi &= \text{rot}_\varphi \mathbf{\zeta} = -dH_z/ds, \\ (4\pi/c) j_z &= \text{rot}_z \mathbf{\zeta} = (1/s) d(sH_\varphi)/ds, \\ j_s &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

In der Gleichung, die die Kraftfreiheit beschreibt,

$$-4\pi \mathbf{f} = [\mathbf{\zeta} \text{ rot } \mathbf{\zeta}] = 0, \quad (3)$$

ist nur die  $s$ -Komponente nicht schon auf Grund der Symmetrieannahmen befriedigt; diese ergibt die Gleichung

$$s^2(dH_z^2/ds) = -d(s^2 H_\varphi^2)/ds. \quad (4)$$

Im folgenden wird es sich also nur um Lösungen dieser Gleichung handeln.

Sie hat zunächst die triviale Lösung

$$H_z = \text{const}; \quad H_\varphi = 0.$$

Hat man weiter zwei Lösungen  $\mathbf{\zeta}^{(1)}$  und  $\mathbf{\zeta}^{(2)}$ , so ist

<sup>1</sup> R. LÜST u. A. SCHLÜTER. Z. Astrophys. 34, 263 [1954].

<sup>2</sup> S. CHANDRASEKHAR, Proc. Nat. Acad. Sci. 42, 1 [1956].

für beliebige Konstante  $a_1, a_2 \geq 0$  auch das Feld, dessen Komponenten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} H_z &= \pm \sqrt{a_1 (H_z^{(1)})^2 + a_2 (H_z^{(2)})^2}, \\ H_\varphi &= \pm \sqrt{a_1 (H_\varphi^{(1)})^2 + a_2 (H_\varphi^{(2)})^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

eine Lösung. Insbesondere kann man in diesem Sinne stets die triviale Lösung hinzufügen.

Die Lösungen der Gl. (4) können gefunden werden, indem man eine der beiden Komponenten willkürlich (aber sinnvoll) vorgibt und die andere dann durch Differentiation und anschließende Integration bestimmt. Zweckmäßiger ist aber folgendes Vorgehen: Wir definieren

$$q(s) = H_z^2 + H_\varphi^2, \quad (6)$$

so daß  $q$  [bis auf den lästigen Faktor  $(1/8\pi)$ ] die Energiedichte des Feldes darstellt. Wenn  $q(s)$  vorgegeben ist, folgt wegen Gl. (4) die Feldkomponente allein durch Differentiation zu

$$\begin{aligned} H_\varphi^2 &= - (s/2) dq/ds, \\ H_z^2 &= q + (s/2) dq/ds = d(s^2 q)/ds^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Dies einfache Verfahren, die Komponenten kraftfreier Magnetfelder durch Differentiation aus einer erzeugenden Funktion zu gewinnen, scheint trotz der physikalischen Bedeutung der Erzeugenden kein einfaches Analogon für Felder geringerer Symmetrie zu besitzen.

Die früheren Versuche, kraftfreie Magnetfelder zu finden, gingen von der Gl. (3) in der Form

$$\text{rot } \vec{H} = \alpha \vec{H}$$

aus. Unter den gegenwärtigen Symmetrieanahmen ist  $\alpha = \alpha(s)$ . Alle früheren Lösungen entsprachen der speziellen Annahme  $\alpha = \text{const}$ . Hier ergibt sich der Zusammenhang ( $q' = dq/ds$  usw.):

$$\alpha = \pm \frac{3q' + sq''}{-sq'(2q + sq')}.$$

Die Vorgabe von  $\alpha(s)$  führt jetzt zu einem Integrationsproblem, das schwieriger als die ursprüngliche Formulierung der Gl. (4) ist. Die einzige Lösung dieser Differentialgleichung mit  $\alpha = \text{const}$ , die die im folgenden aufgestellten Regularitätsforderungen befriedigt, ist

$$q(s) = A^2 \{ J_0^2(\alpha s) + J_1^2(\alpha s) \}$$

( $A = \text{const}$ ;  $J_0, J_1 = \text{BESSEL-Funktion}$ ).

Dies führt auf

$$H_\varphi = A J_0(\alpha s), \quad H_z = A J_1(\alpha s),$$

d. h. zu dem von LUNDQUIST<sup>3</sup> gefundenen einfachsten kraftfreien Feld.

Nicht jede Wahl von  $q(s)$  führt zu einem Feld. Aus  $H_\varphi^2 \geq 0$  folgt, daß die Energiedichte mit wach-

sendem Abstand von der Symmetrieachse nirgendwo zunehmen darf. Aus  $H_z^2 \geq 0$  folgt andererseits, daß  $s^2 q$  nirgendwo nach außen abnehmen darf. Wenn wir annehmen, daß  $q(s)$  für  $s \rightarrow 0$  eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$q(s) = \sum_{r=0} q_r s^r$$

besitzt, folgt

$$\begin{aligned} \text{aus } H_z^2 \geq 0, & \quad \text{daß } q_0 \geq 0, \\ \text{aus } j_z \text{ endlich,} & \quad \text{daß } q_1 = 0, \\ \text{aus } H_\varphi^2 \geq 0, & \quad \text{daß } q_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Wenn das kraftfreie Magnetfeld sich bis in unendliche Entfernung von der Achse erstreckt und  $q$  dort als Funktion von  $(1/s)$  analytisch ist, existiert die Entwicklung

$$q(s) = \sum_{r=0}^{\infty} k_r s^{-r}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} H_\varphi^2 &= \frac{1}{2} k_1 s^{-1} + k_2 s^{-2} + \frac{3}{2} k_3 s^{-3} + \dots, \\ H_z^2 &= k_0 + \frac{1}{2} k_1 s^{-1} + 0 - \frac{1}{2} k_3 s^{-3} - \dots. \end{aligned}$$

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1.  $k_0$  und  $k_1$  sind nicht beide 0. Für  $s \rightarrow \infty$  fällt  $H_z$  nicht schwächer als  $s^{-1/2}$  ab. Mindestens ein Teil des Stromes, der das Feld erzeugt, muß dann im Unendlichen fließen. Wir wollen diesen Fall daher nicht weiter betrachten. Es bleibt:

2.  $k_0$  und  $k_1$  sind 0. Da die Koeffizienten der Potenzen  $s^{-3}, s^{-4}$  und alle folgenden in der Entwicklung von  $H_\varphi^2$  und von  $H_z^2$  mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten, folgt notwendig aus der Definitheit beider Quadrate, daß  $k_2 > 0$ , und das erste folgende nichtverschwindende  $k_r < 0$ . Daher fällt  $H_\varphi$  genau wie  $(1/s)$ , und für den Gesamtstrom

$$J = 2\pi \int_0^\infty j_z s ds$$

folgt mit Gl. (2)

$$J = \frac{c}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} (s H_\varphi) = \pm \frac{c}{2} \sqrt{k_2} \neq 0, \quad \infty. \quad (8)$$

Der magnetische Gesamtfluß

$$F = 2\pi \int_0^\infty H_z s ds \quad (9)$$

konvergiert genau dann, wenn  $k_3$  und  $k_4 = 0$ .

Im betrachteten zylindersymmetrischen Falle hat der MAXWELLSche Spannungstensor die Gestalt

<sup>3</sup> S. LUNDQUIST, Ark. Fys. 2, 361 [1950].

$$T = \begin{pmatrix} & z & s & \varphi \\ \begin{matrix} z \\ s \\ \varphi \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}H_z^2 + \frac{1}{2}H_\varphi^2 & -H_z H_\varphi & 0 \\ -H_z H_\varphi & \frac{1}{2}H_z^2 - \frac{1}{2}H_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}H_z^2 + \frac{1}{2}H_\varphi^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4\pi} \quad (10)$$

Die Dichte des Flusses in  $z$ -Richtung der  $z$ -Komponente des Impulses ist  $T_{zz}$ , und damit ist der gesamte durch eine Röhre um die Symmetrieachse mit dem Radius  $R$  hindurchtransportierte Impuls (der wegen der Symmetrie die  $z$ -Richtung hat):

$$P(R) = 2\pi \int_0^R T_{zz} s \, ds = -\frac{1}{4} \int_0^R (H_z^2 - H_\varphi^2) s \, ds. \quad (11)$$

Das Vorzeichen von  $P$  ist negativ, wenn der Impuls-transport einem Druck längs der Achse entspricht, und positiv, wenn er einem Zug entspricht.

Mit  $P$  eng verbunden ist die magnetische Energie pro Längeneinheit längs der  $z$ -Achse, die gegeben ist durch

$$E(R) \, dz = \frac{dz}{4} \int_0^R (H_z^2 + H_\varphi^2) s \, ds = \frac{dz}{4} \int_0^R q(s) s \, ds. \quad (12)$$

Wir hatten gefunden, daß  $s^2 q(s)$  nirgendwo abnehmen darf, daher divergiert das Integral für  $R \rightarrow \infty$  mindestens logarithmisch. Durch partielle Integration läßt sich nun  $P$  umformen in

$$P(R) = -E(R) + \frac{1}{4} q(R) R^2. \quad (13)$$

Für die Felder, die so schnell wie möglich nach außen abnehmen [d. h.  $q(s) \rightarrow \text{const}/s$ ], divergiert also auch  $P$  logarithmisch, und zwar im Sinne eines Zuges. Die Dichte des Flusses in  $z$ -Richtung der Drehimpulskomponente, die einer Drehung um die  $z$ -Achse entspricht, ist  $T_{zs}$ , und damit ist der gesamte Drehimpulsstrom analog zu oben:

$$D = 2\pi \int_0^\infty T_{zs} s^2 \, ds = -\frac{1}{4} \int_0^\infty H_z H_\varphi s^2 \, ds. \quad (14)$$

Wenn wir nach der Möglichkeit von Impuls- und Drehimpuls-Transport durch zylindersymmetrische kraftfreie Magnetfelder fragen, denken wir vor allem an folgende Situation (vgl. Abb. 1). In dem Halbraum I ( $z \geq z_1, > z_2$ ) haben wir ein kraftfreies Feld. Ebenso im Halbraum II ( $z \leq z_2$ ). In der dazwischenliegenden Scheibe III haben wir ein Feld, das wir nicht näher betrachten, das aber nicht kraft-

frei und auch nicht notwendig zylindersymmetrisch ist; auf dieses Gebiet soll durch das (in sich) kraftfreie Feld I und II eine Kraft bzw. ein Drehmoment ausgeübt werden. Der Aneinanderschluß dieser Felder ist möglich, wenn sowohl der gesamte magnetische Fluß  $F$  als auch der gesamte Strom  $J$  in allen Gebieten derselbe ist. Die gesamte (in  $z$ -Richtung) auf die Scheibe III ausgeübte Kraft ist gleich der Differenz des Impulsstromes  $P$  der Felder in I und II.

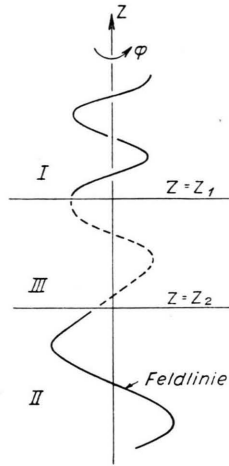


Abb. 1. Aufteilung in kraftfreie Gebiete (I und II) und ein Gebiet III, auf das Kraft- und Drehmoment ausgeübt wird.

Entsprechend ist das Drehmoment auf die Scheibe gleich der Differenz des Drehimpulsstromes  $D_I$  und  $D_{II}$ . Die Behauptung, daß kraftfreie Magnetfelder Impuls und Drehimpuls transportieren, präzisieren wir daher so: Der gesamte Impuls- und Drehimpuls-Strom in der Richtung der Achse eines zylindersymmetrischen kraftfreien Magnetfeldes verschwindet nicht notwendig und ist auch nicht durch den gesamten magnetischen Fluß und elektrischen Strom in der Richtung der Achse bestimmt.

In der Tat ist nicht zu sehen, daß die Integrale  $J$  und  $F$  zusammen mit der Differentialgleichung (4) auch die Integrale  $P$  und  $D$  bestimmen sollten. Noch weniger war das wegen der größeren Freiheit bei den früheren betrachteten rotationssymmetrischen Feldern zu erwarten. Trotzdem war uns dort der Beweis der analogen Behauptung nicht gelungen, da die einzigen gefundenen kraftfreien Felder keinen Drehimpuls transportieren.

Wir beweisen die Behauptung durch die explizite Konstruktion von kraftfreien Magnetfeldern mit drei freien Parametern, zwischen denen durch Wahl des Stromes  $J$  und des Flusses  $F$  nur zwei Bedingungen bestehen, so daß bei festem  $J$  und  $F$  noch eine einparametrische Freiheit für den Impulsstrom  $P$  und Drehimpulsstrom  $D$  besteht, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Eine zuverlässige Wahl von  $q$  mit genügend Freiheit, bei der die Integrale über eine Scheibe unendlichen Durchmessers elementar durchführbar sind (soweit sie existieren), ist die folgende:

$$q(s) = 4(J/c)^2 k^2 \{1 + (ks)^{1/\nu}\}^{-2\nu} \quad (15)$$

( $c$  = Lichtgeschwindigkeit;  $k, \nu > 0$ ).

Dieser Ansatz enthält 3 Parameter:  $J$  ist eine multiplikative Konstante, deren Bezeichnung vorwegnimmt, daß sie mit dem Gesamtstrom identisch ist;  $k$  hat die Dimension einer reziproken Länge, so daß für  $s \ll 1/k$  gilt  $q(s) \approx \text{const}$  und damit das Feld in ein homogenes achsen-paralleles Feld übergeht, während für  $s \gg 1/k$  gilt  $q(s) \approx \text{const} \cdot s^{-2}$  und damit das Feld das eines stromdurchflossenen Drahtes approximiert. Der Parameter  $\nu$  bestimmt dann die „Schärfe“ des Übergangs zwischen diesen beiden Grenzfällen (in dem Sinne, daß der Übergang für  $\nu \rightarrow 0$  diskontinuierlich wird).

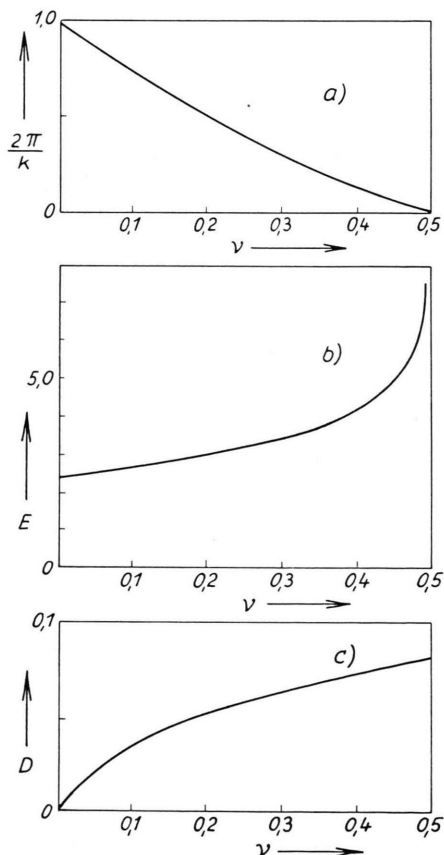


Abb. 2. Charakteristiken spezieller kraftfreier Felder festen Gesamtflusses ( $F=1$ ) und festen Gesamtstromes [ $(J/c)=1$ ] als Funktion des Formparameters  $\nu$ . a) Charakteristische Länge  $2\pi/k$ ; b) Nicht-divergenter Anteil der Energie  $E - (J^2/c^2) \ln R$ ; c) Drehimpulsstrom.

Aus diesem Ansatz folgt für die Felder  $\mathfrak{H}$  und  $j$ :

$$H_z = 2(J/c) k \{1 + (ks)^{1/\nu}\}^{-\nu-1/2},$$

$$H_\varphi = (ks)^{1/2\nu} H_z, \quad (16)$$

$$j_z = \frac{2\nu+1}{4\nu\pi} J k^{(1/2\nu)+1} s^{(1/2\nu)-1} \{1 + (ks)^{1/\nu}\}^{-\nu-3/2},$$

$$j_\varphi = (ks)^{1/2\nu} j_z$$

und damit die Vektorgleichung

$$\mathfrak{j} = \frac{2\nu+1}{8\nu\pi} c k^{1/2\nu} s^{(1/2\nu)-1} \{1 + (ks)^{1/\nu}\}^{-1} \mathfrak{H}. \quad (17)$$

Die Forderung, daß  $j_\varphi$  endlich bleibt für  $s \rightarrow 0$ , führt auf die Bedingung

$$0 < \nu < 1.$$

Fordert man auch Endlichkeit von  $j_z$ , so wird der Bereich von  $\nu$  weiter eingengt zu

$$0 < \nu < \frac{1}{2};$$

da  $j_z$  aber jedenfalls integrierbar bleibt, kann eine Unendlichkeit des achsenparallelen Stromes auf der Achse als ein Grenzfall einer realisierbaren starken Konzentration des Stromes bei  $s \approx 0$  angesehen werden.

Die Identifizierung von  $J$  mit dem Strom zwischen  $s=0$  und  $s=\infty$  läßt sich nun leicht an der asymptotischen Entwicklung von  $H_\varphi$  oder als Integral über  $j_z$  verifizieren. Für den gesamten Magnetfluß folgt

$$F = 2\pi \int_0^\infty H_z s ds = \frac{2\pi J}{k} \frac{\Pi(2\nu) \cdot \Pi(-\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(\nu - \frac{1}{2})} \quad (18)$$

$$[\Pi(x) = \Gamma(x+1) = \text{Fakultät}].$$

Für gegebenen magnetischen Fluß und elektrischen Strom wird durch diese Beziehung  $k$  als Funktion von  $\nu$  bestimmt (Abb. 2 a).

Die Energie  $E$  und der Impulsstrom  $P$  divergieren logarithmisch; wir geben daher die asymptotische Entwicklung für  $R \ll 1/k$  bis zum konstanten Gliede einschließlich

$$E(R) = \frac{J^2}{c^2} \{ \ln R + \ln k - \nu C - \nu \Psi(2\nu - 1) \},$$

$$P(R) = -\frac{J^2}{c^2} \{ \ln R + \ln k - 1 - \nu C - \nu \Psi(2\nu - 1) \},$$

$$\left[ C = 0,577 \dots, \Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Pi(x) \right]. \quad (19)$$

Der divergente Anteil hängt also (bei festem  $R$ ) nur vom Gesamtstrom ab, während das nächste Glied

(das von  $R$  nicht abhängt) von  $\nu$ , und über  $k$  auch von  $F$  und  $J$  bestimmt wird (Abb. 2 b).

Schließlich folgt für den gesamten Drehimpulsstrom

$$D = \frac{1}{2k} \frac{J^2}{c^2} \frac{\Pi(3\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2\nu - 1)} \frac{\Pi(-\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2\nu - 1)} \\ = \frac{F}{4\pi c} \frac{J}{\Pi(2\nu)} \frac{\Pi(3\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2\nu - 1)} \frac{\Pi(\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2\nu - 1)}. \quad (20)$$

Die letzte Form zeigt explizit, daß für gegebenes  $F$  und  $J$  der transportierte Drehimpuls noch nicht bestimmt ist, sondern noch von der Form des Feldes (hier durch  $\nu$  repräsentiert) abhängt (Abb. 2 c). Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

## NOTIZEN

### Zustandssumme und effektive Ionisierungsspannung im Innern des Plasmas

Von G. ECKER und W. WEIZEL

Institut für theoretische Physik der Universität Bonn  
(Z. Naturforsch. **12 a**, 859—860 [1957]; eingeg. am 14. September 1957)

Wir haben vor einiger Zeit in den Annalen der Physik<sup>1</sup> unter gleichnamigem Titel eine Untersuchung der Begrenzung der Zustandssumme, wie der Erniedrigung des Ionisierungspotentials eines Atoms im Plasma veröffentlicht. Verschiedene Zuschriften und eine Notiz von THEIMER<sup>2</sup> veranlassen uns, diesen Überlegungen einige erläuternde Bemerkungen hinzuzufügen.

Bei der Anwendung der Beziehung (28) (s. Anm.<sup>1</sup>), welche die Grenzquantenzahl  $\bar{n}_g$  als Funktion der Trägerdichte und -temperatur angibt, ist unbedingt zu beachten, daß (28) auf der Basis des VLASOVschen „Dispersionsmodelles“ abgeleitet ist.  $\bar{n}_g$  hat daher — und dies ist (s. Anm.<sup>1</sup>) auch besonders betont worden — nur den Charakter einer oberen Schranke. Das heißt, infolge der diskreten Ladungsstruktur des Plasmas können durchaus Terme  $n < \bar{n}_g$  nicht existenzfähig oder doch jedenfalls so stark verschmiert sein, daß sie nicht mehr getrennt in Erscheinung treten. Der hierdurch bedingte Spielraum ist für die Berechnung der Zustandssumme unwesentlich, da die hohen Terme nur sehr schwach beitragen.

Macht man jedoch den Versuch, an Hand der Formel (28)<sup>1</sup> die Elektronendichte oder -temperatur zu bestimmen, indem  $\bar{n}_g$  mit der Quantenzahl des letzten beobachtbaren Seriengliedes identifiziert wird, so muß dies aus den genannten Gründen zwangsläufig zu falschen Ergebnissen führen. Die Beziehung (28)<sup>1</sup> kann also keineswegs die von INGLIS und TELLER<sup>3</sup> aus der Verschmierung der Serienglieder im STARK-Effekt des Mikrofeldes hergeleitete Formel ersetzen, ebenso wie letztere keine Aussage über den Beitrag der verschiedenen Bereiche zur Zustandssumme macht.

Hinsichtlich der Ionisierungsenergie scheinen einige Bemerkungen zu dem Ansatz der elektrostatischen

Wechselwirkungsenergie  $U_W$  [Gl. (35), Anm.<sup>1</sup>]

$$U_W = U_a + U_p = - \left\{ \frac{2e^2 \bar{\alpha}}{r_0} + \frac{e^2}{D} \frac{1 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} \right\} \bar{N} x$$

wichtig zu sein ( $\bar{\alpha}$  = mittlerer MADELUNG-Koeffizient,  $e$  = Elektronenladung.  $r_0 = (V/\bar{N}x)^{1/3}$ ,  $D = (kT/8\pi \cdot \bar{N}x e^2)^{1/2}$  = DEBYE-Länge,  $x$  = Ionisierungsgrad,  $\bar{N}$  = Zahl der ursprünglich vorhandenen Atome,  $V$  = Gesamtvolumen). Das Polarisationsglied  $e^2/2D$  ist direkt aus den DEBYESchen Rechnungen<sup>4</sup> zu entnehmen. Der Faktor  $(1 + \sqrt{2})/(\sqrt{2})^3$  trägt der Tatsache Rechnung, daß zur Polarisierung der Ionenumgebung sowohl die Elektronen als auch die Ionen beitragen, zur Polarisierung der Elektronenumgebung dagegen nur die Elektronen. Bei der Differentiation des GIBBSschen Potentials nach  $x$  darf man nicht vergessen, daß auch  $D$  und  $r_0$  von  $x$  abhängig sind.

Besondere Bedeutung verdient das Glied  $-2e^2 \bar{\alpha}/r_0$ , welches der Wechselwirkungsenergie des Ensembles bei fehlender Polarisierung Rechnung tragen soll. Wir haben hier in Anlehnung an die Kristallographie einen „mittleren MADELUNGschen Koeffizienten  $\bar{\alpha}$ “ eingeführt, wobei wir uns veranlaßt fühlten, auf die Unsicherheit dieses Koeffizienten besonders hinzuweisen.

Im Hinblick auf die kürzlich von THEIMER<sup>2</sup> vorgeschlagene einfache Berechnung dieses Koeffizienten  $\bar{\alpha}$  scheint es notwendig, den Sachverhalt genauer auseinanderzusetzen.

Die gesamte mittlere elektrostatische Wechselwirkungsenergie des Ensembles ist natürlich durch den Ausdruck

$$U_W = \frac{1}{2} \int \dots \int \sum_{i,j} \pm \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} W(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{2n}$$

gegeben, wo die Summe über alle  $\bar{N}x = n$  Elektronen, sowie alle  $n$  Ionen läuft und die Integration den gesamten Konfigurationsraum dieser Teilchen erfaßt.  $W(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n})$  gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte im

<sup>1</sup> G. ECKER u. W. WEIZEL, Ann. Phys., Lpz. **17**, 126 [1956].

<sup>2</sup> O. THEIMER, Z. Naturforsch. **12 a**, 518 [1957].

<sup>3</sup> D. R. INGLIS u. E. TELLER, Astrophys. J. **90**, 439 [1939].

<sup>4</sup> P. DEBYE u. E. HÜCKEL, Phys. Z. **24**, 185 [1923].