

# Der Gyro-Relaxations-Effekt

Von A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforschg. 12 a, 822—825 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Es wird gezeigt, daß ständig eine Relaxation der Freiheitsgrade der Bewegung entlang den magnetischen Feldlinien relativ zu den Freiheitsgraden der Umlaufbewegung um diese magnetischen Feldlinien eintritt, wenn die Stärke des Magnetfeldes mit der Zeit oder längs der Feldlinien sich ändert. Diese Relaxation führt zu einem Temperaturanstieg des Plasmas und zwar auch dann, wenn die magnetischen Feldänderungen periodisch erfolgen. Dieser Prozeß dürfte einen günstigen Heizungsmechanismus darstellen, um zu extrem hohen Temperaturen zu gelangen.

It is shown that a relaxation of the degrees of freedom of the motion along the lines of force of a magnetic field relative to those of the gyration around these lines always occurs if the strength of the magnetic fields changes with time or along the trajectories. This relaxation causes an increase in the temperature of a plasma, even if the magnetic field changes are periodic, and may represent a convenient heating mechanism for achieving extreme temperatures.

Die Zuführung von Energie zu einem Plasma wird schwierig, wenn die Zahl der Stöße gering ist. Da die Stoßquerschnitte in einem vollständig ionisierten Plasma umgekehrt proportional zu  $T^2$  sind, ist diese Schwierigkeit um so größer, je höher die Temperatur  $T$  ist. Sie besteht z. B. bei dem Versuch einer Heizung durch JOULEsche Wärme, da der geringen Stoßfrequenz eine hohe Leitfähigkeit entspricht. Die benötigten Stromdichten würden daher sehr groß; wegen der elektrodynamischen Wirkung dieses Stromes führt dies leicht zu magnetohydrodynamischer Instabilität.

Andererseits führt die geringe Stoßzahl zu einer großen Viskosität des Plasmas, die in einem Magnetfeld allerdings nur entlang den Feldlinien wichtig bleibt, und daher schwer zu einer Erhitzung zu verwenden ist. Wir werden zeigen, daß ein Plasma eine Art Viskosität auch gegen Änderungen der Magnetfeldstärke besitzt, die zu einem effektiven Heizprozeß führen kann.

1. Wir betrachten den einfachsten Fall: Geladene Teilchen in einem homogenen Magnetfeld der zeitlich veränderlichen Stärke  $H(t)$ . Wenn die zeitlichen Änderungen so langsam sind, daß

$$|(1/H) (dH/dt)| \ll \omega_g, \quad (1)$$

$$\omega_g = |eH|/mc \quad (2)$$

( $e, m$  = Ladung und Masse des Teilchens;  $H$  im Gaußschen Maßsystem,  $c$  = Lichtgeschwindigkeit), existiert eine „adiabatische“ Invariante der Bewegung, nämlich das magnetische Moment der Bahnbewegung. Genauer: Wenn man die momentane Geschwindigkeit des Teilchens zerlegt in eine Komponente parallel zum Magnetfeld und eine quer dazu

$$v = v_p + v_q$$

und entsprechend die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} m v_q^2 = E_p + E_q, \quad (3)$$

so ist  $v_q$  Teil der Umlaufbewegung des Teilchens um eine Feldlinie, der einem elektrischen Ringstrom entspricht und dem sich das magnetische Moment zuschreiben läßt, der dem Ringstrom und der von ihm umflossenen Fläche entspricht, und das sich zu

$$\mu = E_q/H \quad (4)$$

ergibt. Diese Definitionen sind streng nur sinnvoll, wenn  $dH/dt = 0$ ; sie behalten während einer genügend langsamen Änderung ihren Sinn, wenn man sich zur Bestimmung von  $\mu$  die Änderung von  $H$  abgeschaltet denkt. In diesem Sinne kann man dann auch nach der Änderung von  $\mu$  bei einer Änderung von  $H$  fragen, indem man das Moment nach der Änderung ( $\mu_1$ ) mit dem vor der Änderung ( $\mu_0$ ) vergleicht. Eine Analyse, über die an anderer Stelle berichtet wird, gibt dann, daß

$$(\mu_1/\mu_0) - 1 = \text{const}_1 \exp \{ - \text{const}_2^2 \omega_g/\alpha \},$$

wo  $\alpha$  gleich dem Maximalwert von

$$|(1/H) (dH/dt)|$$

ist, und die Konstanten von dem genauen analytischen Verlauf der Änderung von  $H$  abhängen und im allgemeinen  $\text{const}_2$  von der Ordnung 1 ist. Für  $\alpha \ll \omega_g$  ist das Moment  $\mu$  also sehr genau konstant — es ist also „adiabatisch“ invariant. Wir wollen im ganzen folgenden annehmen, daß alle Feldänderungen, die das Teilchen erlebt, so langsam (im Vergleich zu der Periode seines Umlaufes) sind, daß

wir  $\mu$  als konstant während des freien Fluges eines Teilchens ansehen dürfen.

Wir haben daher ohne Stöße

$$dE_q/dt = (E_q/H) dH/dt \quad (5a)$$

und in Abwesenheit irgendwelcher anderer Einwirkungen – insbesondere in Abwesenheit von Komponenten elektrischer Felder entlang dem magnetischen Feld –

$$dE_p/dt = 0. \quad (5b)$$

Wenn wir nun statt eines einzelnen Teilchens eine Gesamtheit von Teilchen betrachten, die voneinander völlig unabhängig sind, und wir nun unter  $E_p$  und  $E_q$  den (linearen) Mittelwert über die entsprechenden Größen aller Teilchen verstehen, gelten die Gln. (5a) und (5b) offenbar ungeändert.

Wäre  $dH/dt \equiv 0$  und hätten wir thermisches Gleichgewicht, so wäre

$$E_q = 2 E_p,$$

da die Querkomponente zwei Freiheitsgraden entspricht. Wenn noch  $dH/dt \equiv 0$ , wir aber einen Zustand mit

$$E_q \neq 2 E_p$$

betrachten, so werden Stöße zwischen den Teilchen dahin wirken, daß der Zustand sich dem thermischen nähert. Wenn der Ausgangszustand bereits nicht zu weit vom Gleichgewicht liegt, wird die Geschwindigkeit, mit der das Gleichgewicht angestrebt wird, proportional zur Größe der Abweichung sein. Für die uns interessierende Größe gilt also

$$\frac{d}{dt} (E_q - 2 E_p) = -\gamma (E_q - 2 E_p) \quad \text{für } \gamma > 0, \quad (6)$$

wo  $\gamma$  eine positive Konstante der Dimension  $\text{sec}^{-1}$  ist, die etwa die mittlere Stoßfrequenz der Teilchen im betrachteten Zustand ist. Weiter gilt natürlich die Energieerhaltung, also

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (E_q + E_p) = 0. \quad (7)$$

$$\text{Also ist } \frac{d}{dt} E_q = -\frac{\gamma}{3} (E_q - 2 E_p) \quad (8a)$$

$$\text{und } \frac{d}{dt} E_p = +\frac{\gamma}{3} (E_q - 2 E_p). \quad (8b)$$

Diese Formeln gelten, wenn  $dH/dt \equiv 0$ . Wenn wir diese Voraussetzung aufheben, werden sich die von den Stößen und die von der Änderung des Magnetfeldes herrührenden Effekte mindestens dann linear superponieren, wenn die Abweichungen vom Gleich-

gewicht nie zu groß werden. Damit haben wir die Gleichungen, die den Gyro-Relaxations-Effekt im einfachsten Fall beschreiben:

$$\frac{d}{dt} E_q = -\frac{\gamma}{3} (E_q - 2 E_p) + \frac{E_q}{H} \frac{dH}{dt}, \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dt} E_p = +\frac{\gamma}{3} (E_q - 2 E_p). \quad (9b)$$

2. Vorausgesetzt ist wie oben, daß die logarithmische Ableitung von  $H$  nicht zu groß ist. Insbesondere darf  $H$  nicht verschwinden, damit ist die physikalisch evidente Positiv-Definitheit von  $E_p$  und  $E_q$  dauernd mit dem System der Differentialgleichungen (9a) und (9b) verträglich.

Aus den Gln. (9a) und (9b) folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{E_q^2 E_p}{H^2} = \frac{\gamma}{3} \frac{E_q (2 E_p - E_q)^2}{H^2}. \quad (10)$$

Die rechte Seite ist stets positiv, also nimmt der Quotient auf der linken Seite stets zu. Beginnt man also bei einem Zustand im Gleichgewicht (also  $2 E_p = E_q$ ) mit einem bestimmten Magnetfeld, ändert dieses dann irgendwie, und kehrt schließlich zu dem Ausgangswert des Magnetfeldes zurück, so hat die Gesamtenergie  $E = E_p + E_q$  sicher zugenommen.

Wir wollen im folgenden speziell periodische Änderungen des Feldes voraussetzen, etwa in der Form

$$H(t) = H_0 (1 + A \cos \omega t) \quad (11)$$

$$H_0, A = \text{const}, \quad |A| < 1.$$

Alle Lösungen  $E_q(t)$ ,  $E_p(t)$  lassen sich aus zwei Lösungen der Form

$$\text{periodische Funktion} \times e^{\lambda t}, \quad \lambda = \text{const} \quad (12)$$

superponieren, wo die Periode des ersten Faktors mit der des Feldes übereinstimmt.

Wir erhalten zwei Grenzfälle, je nachdem ob die Stoßfrequenz  $\gamma$  klein oder groß ist gegen die Frequenz  $\omega$  der Änderung des Feldes.

$$\alpha) \quad \gamma \gg \omega$$

Wir führen einen Parameter  $\varepsilon$  ein, der die Größenordnung angeben soll, indem wir setzen

$$\gamma \rightarrow \gamma; \quad \omega \rightarrow \varepsilon \omega, \quad (13a)$$

also  $\omega$  von erster Ordnung klein gegen  $\gamma$  nehmen. Das Ergebnis wird zeigen, daß es dann konsistent ist zu setzen

$$\lambda \rightarrow \varepsilon^2 \lambda, \quad (13b)$$

also  $\lambda$  von zweiter Ordnung klein anzunehmen. Da es nicht notwendig ist, speziell eine harmonische

Feldänderung anzunehmen, fordern wir nur, daß die periodische Funktion  $H(t)$  so beschaffen sei, daß der Zeitableitung eine Größenordnung zugeschrieben werden kann gemäß

$$d/dt \rightarrow \varepsilon d/dt. \quad (14)$$

Schließlich machen wir den Ansatz

$$E_q = (q_0 + \varepsilon q_1 + \dots) e^{\varepsilon^2 \lambda t}, \quad (15 a)$$

$$E = (e_0 + \varepsilon e_1 + \dots) e^{\varepsilon^2 \lambda t}, \quad (15 b)$$

$$= (E_p + E_q),$$

wo die  $q$  und  $e$  periodische Funktionen sein sollen.

Nach Potenzen von  $\varepsilon$  geordnet, ergibt sich dann folgendes System ( $\dot{\phantom{x}} = d/dt$ )

$$\varepsilon^0 \quad 3 q_0 - 2 e_0 = 0, \quad (16 a)$$

$$\varepsilon^1 \quad \dot{e}_0 - \frac{\dot{H}}{H} q_0 = 0, \quad (16 b)$$

$$\varepsilon^1 \quad \dot{q}_0 + \gamma \left( q_1 - \frac{2}{3} e_1 \right) - \frac{\dot{H}}{H} q_0 = 0, \quad (16 c)$$

$$\varepsilon^2 \quad \dot{e}_1 + \lambda e_0 - \frac{\dot{H}}{H} q_1 = 0. \quad (16 d)$$

Aus Gl. (16 a) folgt, daß in nullter Ordnung dauernd Äquipartition der Energie gilt, und aus (16 b), daß entsprechend in dieser Näherung gilt

$$E \sim H^{2/3},$$

wie bei einer adiabatischen Kompression eines normalen Gases ohne innere Freiheitsgrade.

Aus Gl. (16 c) und (16 d) folgt

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{e_1}{q_0} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{H}}{H} \right)^2 + \frac{3}{2} \gamma \lambda = 0.$$

Bei einer Integration über eine Periode verschwindet der erste Term, so daß wir eine Beziehung erhalten, die die Wachstumsrate  $\lambda$  durch die Stoßfrequenz  $\gamma$  und einen Mittelwert über das Magnetfeld ausdrückt

$$\lambda_\gamma = \frac{2}{9} \overline{\left( \frac{\dot{H}}{H} \right)^2}^t; \quad (17)$$

in dieser Näherung fallen die beiden Wurzeln für  $\lambda$  zusammen.

$$\beta) \quad \gamma \ll \omega$$

Hier führen wir Größenordnungen ein gemäß

$$\gamma \rightarrow \varepsilon \gamma; \quad d/dt \rightarrow d/dt; \quad \lambda \rightarrow \varepsilon \lambda,$$

die Kompatibilität wird durch das Ergebnis bewiesen werden. Mit dem gleichen Ansatz für  $E_q$  und  $E$  folgen die Gleichungen:

$$\varepsilon^0 \quad \dot{q}_0 - \frac{\dot{H}}{H} q_0 = 0, \quad (18 a)$$

$$\varepsilon^0 \quad \dot{e}_0 - \frac{\dot{H}}{H} q_0 = 0, \quad (18 b)$$

$$\varepsilon^1 \quad \dot{q}_1 - \frac{\dot{H}}{H} q_1 + (\lambda + \gamma) q_0 - \frac{2}{3} \gamma e_0 = 0, \quad (18 c)$$

$$\varepsilon^1 \quad \dot{e}_1 - \dot{q}_1 + \left( \lambda + \frac{2}{3} \gamma \right) e_0 - (\lambda + \gamma) q_0 = 0. \quad (18 d)$$

Aus den Gleichungen nullter Ordnung folgt hier

$$q_0 \sim H, \quad e_0 = q_0 + c \quad (c = \text{const});$$

Gl. (18 c) kann in die Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q_1}{q_0} \right) + \lambda + \gamma = \frac{2}{3} \gamma \frac{e_0}{q_0}$$

gebracht werden. Integration über eine Periode ergibt

$$\lambda + \gamma = \frac{2}{3} \gamma \left[ 1 + \left( \frac{c}{q_0} \right) \right]. \quad (19)$$

Die Integration der Gl. (18 a) ergibt dagegen:

$$\left( \lambda + \frac{2}{3} \gamma \right) \bar{c}_0 = (\lambda + \gamma) \bar{q}_0;$$

$$\text{also} \quad \left( \lambda + \frac{2}{3} \gamma \right) c = \frac{1}{3} \gamma \bar{q}_0. \quad (20)$$

Daraus folgt die Wachstumsrate  $\lambda$  gemäß

$$\left( 1 + 3 \frac{\lambda}{\gamma} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\gamma} \right) = \bar{H} \left( \frac{1}{\bar{H}} \right). \quad (21)$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln für  $\lambda$ , und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung muß aus Lösungen superponiert werden mit je einer der beiden Wachstumsraten. Wenn die Anfangsbedingungen nicht singular so gewählt sind, daß die Partikularlösung mit dem algebraisch größeren  $\lambda$  nicht beteiligt ist, überwiegt diese vollständig nach einiger Zeit. Wir brauchen also bloß die größere der beiden Wurzeln zu betrachten; das ist diejenige, für die im Limes  $\bar{H}(1/\bar{H}) \rightarrow 1$  die Beziehung

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{2}{9} \left[ \bar{H} \left( \frac{1}{\bar{H}} \right) - 1 \right] \quad (22)$$

gilt. Wegen der Periodizität von  $H$  ist die rechte Seite stets nicht-negativ (und gleich Null nur für  $H = \text{const}$ ).

Wenn wir nun wieder zu einer harmonischen Feldänderung

$$H = H_0(1 + A \cos \omega t) \quad \text{mit } |A| < 1 \quad (11)$$

zurückkehren, können wir die Mittelwerte leicht bestimmen, und erhalten

$$\begin{aligned} \text{für } \omega_g \gg \gamma \gg \omega: \quad \lambda &= \frac{2}{9} \frac{\omega^2}{\gamma} \left( \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} - 1 \right), \\ \lambda &\approx \frac{1}{9} \frac{\omega^2}{\gamma} A^2 \quad (|A| \ll 1), \end{aligned} \quad (23)$$

für  $\gamma \ll \omega \ll \omega_g$ :

$$\begin{aligned} \left(1 + 3 \frac{\lambda}{\gamma}\right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\gamma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} \\ \lambda &\approx \frac{1}{9} \gamma A^2 \quad (|A| \ll 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Durch Kombination der beiden Näherungsformeln für  $|A| \ll 1$  erhält man eine Interpolationsformel, die für alle Frequenzen  $\omega \ll \omega_g$  eine brauchbare Näherung liefert:

$$\lambda \approx \frac{A^2}{9} \frac{\omega^2 \gamma}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (25)$$

Abb. 1 gibt durch numerische Lösung der Differentialgleichung (9) mit (11) gewonnene Wachstumsraten.

Für hohe Frequenzen ist die Wachstumsrate unabhängig von der Frequenz, für niedrige  $\omega$  verhält sie sich wie  $\omega^2$ . Man wird daher versuchen,  $\omega \gtrsim \gamma$  zu halten.

Bei der Anwendung des Gyro-Relaxations-Effektes zur Heizung eines Plasmas wird häufig die Energiedichte des mittleren Magnetfeldes  $H_0$  von der thermischen Energiedichte nicht sehr verschieden sein, so daß

$$\frac{H_0^2}{8\pi} = \alpha n E \quad (n = \text{Teilchendichte}),$$

wo  $\alpha$  von der Größenordnung 1 ist. Für  $\omega \gg \gamma$  ist der Energiegewinn des Plasmas während der Zeit zwischen zwei Zusammenstößen dann gegeben durch

$$\Delta n E = \frac{2}{9\alpha} W_{\sim} \quad (26)$$

wo  $W_{\sim}$  die Energiedichte des Wechselmagnetfeldes ist. Es kann also ein beträchtlicher Teil dieser Energie in der Zeit  $1/\gamma$  dem Plasma zugeführt werden. Dies ist vermutlich das Optimum, das erreicht werden kann, wenn ein Heizprozeß zunächst geordnete

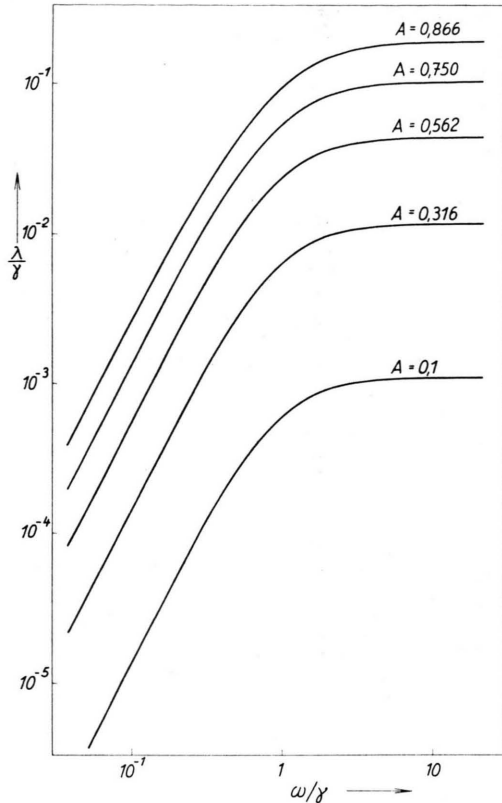


Abb. 1. Numerisch berechnete relative Wachstumsraten für verschiedene Amplituden  $A$ .

Energie zuführt, die erst durch Stöße in Wärmebewegung umgewandelt werden muß, wenn also Stöße die einzige Möglichkeit der Entropieerzeugung darstellen.

Ein Plasma ist eine Mischung von (mindestens) zwei geladenen Komponenten. Wenn eine Komponente aus Elektronen und die andere aus Ionen besteht, ist die Stoßfrequenz für beide verschieden, und zwar für die Elektronen wegen ihrer größeren Geschwindigkeiten größer. Wenn man  $\omega$  zwischen den beiden Stoßfrequenzen wählt, kann man erreichen, daß bevorzugt die Ionen aufgeheizt werden. Das ist zur Einleitung thermonuklearer Fusionsreaktionen günstig, da es hierbei offenbar nur auf die Temperatur der Ionen ankommt.

Der Verf. dankt Herrn H. SCHMIDT für zahlreiche Diskussionen und für die Durchführung der numerischen Rechnungen.