

nach der Mittelebene $z=0$ zwischen den Polschuhen gerichtet. (13) bedeutet aber einfach, daß die Kraftlinien die durch die Figur angedeutete Krümmung haben müssen.

Die Gleichungen (7') und (8') lassen sich mit Benutzung von (5a) und (5b) auf eine noch einfachere Form bringen. Danach ist

$$H_z - \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right)$$

und

$$H_r = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right).$$

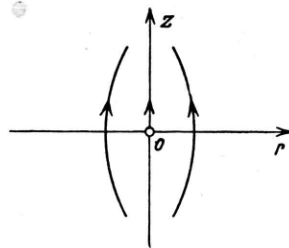
So wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{r}) &= - \frac{e^2}{c^2 m} \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right), \\ \frac{d}{dt} (m \dot{z}) &= - \frac{e^2}{c^2 m} \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Die Kraft leitet sich also aus einem Potential

$$U = \frac{e^2}{2 c^2 m} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right)^2 \quad (15)$$

ab, wobei aber zu beachten ist, daß U von t abhängt; demzufolge existiert kein Energieintegral der Bewegungsgleichungen (14).



Durch U ausgedrückt, lautet die Stabilitätsbedingung, daß in dem ganzen endlichen Gebiet Stabilität stattfindet, in dem $U > U_0$ ist, wo U_0 der Wert von U auf dem Gleichgewichtskreise ($r=r_0$; $z=0$) bedeutet.

Der Vorteil dieser Form der Stabilitätsbedingung ist, daß sich durch Ausmessung des Induktionsflusses Φ die ganze Potentialmulde bestimmen läßt und etwaige Mängel durch Veränderung des Polschuhprofils verbessert werden können, während die Bedingungen (12) und (13) direkt die Wideröesche Gleichgewichtsbedingung und durch Entwicklung nach Taylor in der Nähe des Gleichgewichtskreises die Steenbeckschen Stabilitätsbedingungen als Spezialfall ergeben.

Beugung elektromagnetischer Zentimeterwellen an metallischen Blenden

VON HANS SEVERIN.

Aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. 1, 487—495 [1946]; eingegangen am 26. April 1946)

Mit Hilfe des für Hertz'sche Wellen formulierten Huyghens-Fresnelschen Prinzips können die auf der Mittelnormalen einer kreisförmigen Blende beobachteten Beugungserscheinungen auch im Nahfeld der Öffnung quantitativ richtig beschrieben werden. Es wird gezeigt, daß dieser Ansatz mit der Kirchhoffschen Theorie der Beugung verträglich ist und die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt.

Infolge der raschen Entwicklung der Ultrakurzwellentechnik sind in den letzten Jahren zunehmend Beugungs- und Interferenzerscheinungen von elektromagnetischen Dezimeter- und Zentimeterwellen beobachtet worden¹, die sich mit den für entsprechende Versuche der Lichtoptik berechneten allgemein geläufigen Formeln der klas-

sischen Beugungstheorie nicht mehr darstellen lassen. Dort ist die Entfernung des Beobachtungsortes vom beugenden Hindernis immer sehr groß gegen die Wellenlänge λ , und häufig trifft das auch für die Dimensionen des Hindernisses selbst zu. Die bekannten Beugungsformeln sind Näherungen für diesen Fall.

Beim Experimentieren mit Ultrakurzwellen dagegen haben die Hindernisse im allgemeinen etwa dieselbe Größe wie λ , und sehr oft interessiert ihr Einfluß auf das Wellenfeld in ihrer nächsten Um-

¹ W. Seiler, Jb. drahtl. Telegr. 37, 79 [1931]; W. Hübner, Arch. Elektrotechn. 28, 468 [1934]; K. Erler, Hochfrequenz-Techn. u. Elektroakust. 56, 104 [1940].

gebung. Hier müssen naturgemäß die für große Abstände gültigen Näherungen versagen².

Die vorliegende Arbeit hat die Absicht, eine richtige theoretische Darstellung des Interferenzfeldes in der Nähe von beugenden Öffnungen in Metallschirmen zu geben. Der konsequente Weg einer exakten Lösung der Maxwell'schen Gleichungen³ und auch die Anwendung der Sommerfeld'schen Methode der Riemann'schen Räume für unendlich gut leitende Schirme⁴ führen zu so großen mathematischen Schwierigkeiten, daß es nur in ein paar geometrisch besonders einfachen Fällen gelang, Lösungen zu entwickeln. Für die große Zahl der praktisch wichtigen Beugungsprobleme bleiben nur Näherungsverfahren, die, wie aus der Lichtoptik geläufig, auf zwei voneinander wesensverschiedenen Grundpfeilern basieren, einem anschaulich physikalischen und einem mathematisch analytischen. Der erste ist das Huyghens-Fresnelsche Prinzip, der andere die Kirchhoffsche Formel. Beide Verfahren haben sich in der Lichtoptik gut bewährt. Ihre Leistungsfähigkeit für Hertz'sche Zentimeterwellen, vor allem bei Blendendimensionen und Aufpunktsabständen, die klein gegen λ sind, zu untersuchen, ist Ziel dieser Arbeit.

Für die folgenden Überlegungen wird ein ebener, unendlich ausgedehnter Schirm sehr großer Leitfähigkeit mit einer Öffnung der Fläche F vor- ausgesetzt. In seine Ebene wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem yz gelegt, dessen Ursprung in die Öffnung falle. Senkrecht zur Ebene, in Richtung zum Beobachtungspunkt, verlaufe die positive x -Achse. Die einfallende Welle sei eben und treffe, aus dem negativ Unendlichen kommend, in Richtung der positiven x -Achse senkrecht auf den Schirm (Abb. 1).

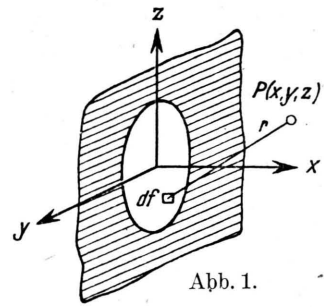


Abb. 1.

Um die Lichterregung im Aufpunkt P nach dem Huyghens-Fresnelschen Verfahren zu erhalten, hat man sich die Flächenelemente df der beugenden Öffnung F mit Sekundärstrahlern — in diesem Falle gleicher Amplitude und Phase — belegt zu denken und die von ihnen ausgehenden Elementarwellen im Beobachtungspunkt P zu einem bestimmten Augenblick phasenrichtig zu superponieren:

$$u_P = \frac{i}{\lambda} u_o \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} df. \quad (1)$$

Dabei bedeuten $k = 2\pi/\lambda$ und

$$r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

den Abstand $df \rightarrow P$ (η, ζ Koordinaten von Punkten der Öffnung).

In diesem aus der Lichtoptik geläufigen Ansatz wird jedes Flächenelement df als Ausgangspunkt einer Kugelwelle angenommen. Da sich der Anwendungsbereich unserer Ergebnisse gegenüber Formeln aus der Optik auch auf das Nah-Feld von Blenden erstrecken soll, ist an Stelle der Flächenbelegung mit Kugelstrahlern eine solche von Hertz'schen Dipolen zu wählen⁶. Ist die einfallende ebene Welle parallel z linear polarisiert, also

$$E_x^{(e)} = 0, E_y^{(e)} = 0, E_z^{(e)} = E_0 e^{-ikx},$$

so lautet der (1) analoge Ausdruck⁷

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_F e^{-ikr} \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta df, \\ E_y &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_F e^{-ikr} \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta df, \\ E_z &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_F e^{-ikr} \left\{ \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \cos^2 \vartheta - \left(\frac{1}{k^3 r^3} + \frac{i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \right\} df. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

² s. z. B. Erler¹.

³ s. z. B. Handb. d. Physik XX, Berlin 1928, S. 291.

⁴ ebenda S. 266.

⁵ Der Faktor i/λ ergibt sich zwangsläufig bei einer strengen Theorie der Beugung; er normiert in einer über die anschauliche Verwendung des Huyghen-

schen Prinzips hinausgehenden Weise Phase und Amplitude der aus den Einzelwellen resultierenden Lichtwirkung; vergl. dazu: Cl. Schaefer, Einführung in die theoret. Physik, III, 1, Leipzig 1932, S. 585 ff.

⁶ Vergl. dazu: Cl. Schaefer⁵, S. 596.

⁷ Vergl. z. B. Cl. Schaefer⁵, S. 335.

Betrag und Richtung des elektrischen Vektors $\mathcal{E}_P$ in einem beliebigen Aufpunkt erhält man jetzt durch Auswertung der drei Integrale in (2). Nur für $r \gg \lambda$ und achsennahe Punkte ($\vartheta \approx 90^\circ$, $\cos \vartheta \approx 0$) geht (2) in den ursprünglichen Ausdruck (1) über, und nur dann ist $\mathcal{E}_P$ in derselben Richtung polarisiert wie die einfallende Welle.

Bei der Anwendung auf ein konkretes Beispiel ergibt sich zunächst, daß bereits die Integration von (1) schon im geometrisch einfachsten Fall einer kreisförmigen Blende für einen beliebigen

Aufpunkt beträchtliche Schwierigkeiten macht* und sich nur dann elementar ausführen läßt, wenn der Aufpunkt speziell auf der Mittelnormalen der Kreisöffnung liegt⁸. In diesem Fall lassen sich auch die Integrale (2) geschlossen auswerten. Nach Einführung eines ebenen Polarkoordinatensystems ϱ, γ mit dem Mittelpunkt der Öffnung als Nullpunkt

$$\eta = \varrho \cos \gamma, \quad \xi = \varrho \sin \gamma, \quad (3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + \eta^2 + \xi^2} = \sqrt{x^2 + \varrho^2},$$

lauten diese

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_0^{r_0} \int_x \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) x \sqrt{r^2 - x^2} dr \sin \gamma d\gamma, \\ E_y &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_0^{r_0} \int_x \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) (r^2 - x^2) dr \sin \gamma \cos \gamma d\gamma, \\ E_z &= \frac{ik^2}{2\pi} E_0 \int_0^{r_0} \int_x \frac{e^{-ikr}}{r} \left\{ \left(\frac{3}{k^3 r^3} + \frac{3i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \right. \\ &\quad \left. (r^2 - x^2) \sin^2 \gamma - \left(\frac{1}{k^3 r^3} + \frac{i}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) r^2 \right\} dr d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

mit $r_0 = \sqrt{x^2 + \varrho_0^2}$, ϱ_0 = Radius der Öffnung.

Mit $\varrho_0 = \varrho_0(\gamma)$ = Wert von ϱ auf dem Rand der Öffnung gelten die Formeln (4) allgemein für jeden Aufpunkt innerhalb des geometrisch optischen Lichtzylinders. Nach Durchführung der Integration über r erscheint das Feld in P zusammengesetzt aus der im geometrisch optischen Fall vorhandenen ebenen Welle und einer von der

Blendenbegrenzung ausgehenden Randwelle (s. A. Schoch⁸).

Für Punkte der Mittelnormalen einer kreisförmigen Öffnung liefert zunächst die Integration über γ

$$E_x = 0, \quad E_y = 0.$$

Das für E verbleibende Integral läßt sich durch gliedweises Integrieren mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int \frac{e^{-ikr}}{r^n} dr = -\frac{1}{n-1} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r^{n-1}} + ik \int \frac{e^{-ikr}}{r^{n-1}} dr \right\}, \quad n \geq 2, \text{ ganzz.} \quad (5)$$

mühe los auswerten und man erhält nach einer kleinen Rechnung

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_P = E_0 \exp(-ikx) - \frac{1}{2} (B + iC) \exp(-ik\sqrt{\varrho_0^2 + x^2}) \\ &= E_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} (B^2 + C^2) - B \cos k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) - C \sin k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) \right\}^{1/2} \exp(-ikx + \delta), \\ B(x) &= 1 + \frac{x^2}{\varrho_0^2 + x^2}, \quad C(x) = \frac{\varrho_0^2}{k(\varrho_0^2 + x^2)^{3/2}}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{C \cos k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) - B \sin k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x)}{B \cos k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) + C \sin k(\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) - 2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* E. Lommel, Abh. d. II. Cl. d. Akad. d. Wiss. XV, 1885, 233; H. Backhaus, Ann. Physik (5) 5, 1 [1930]; H. Stenzel, ENT 12, 16 [1935]; A. Schoch, Akust. Z. 6, 318 [1941].

⁸ H. Backhaus u. F. Trendelenburg, Z. techn. Physik 7, 630 [1926].

Im Experiment wird vom Empfangsdetektor das mittlere relative Amplitudenquadrat angezeigt:

$$A_D^2 = \left| \frac{E_P}{E_0} \right|^2 = 1 + \frac{1}{4} B^2 + \frac{1}{4} C^2 + B \cos k (\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x) - C \sin k (\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x). \quad (7)$$

Demgegenüber folgt ganz analog aus (1)

$$A_K^2 = \left| \frac{u_P}{u_0} \right|^2 = 4 \sin^2 \frac{k}{2} (\sqrt{\varrho_0^2 + x^2} - x). \quad (8)$$

Beide Ergebnisse gehen für $x \gg \varrho_0$ über in die aus der Lichtoptik geläufige Formel¹¹

$$A^2 = 4 \sin^2 \frac{k}{4} \frac{\varrho_0^2}{x}. \quad (9)$$

In Abb. 2—6 ist die Ortsabhängigkeit des mittleren relativen Amplitudenquadrats (künftig kurz als „Intensität“ bezeichnet), das im folgenden direkt gemessen wird, für verschiedene Blendenradien dargestellt. Zum Vergleich wurde der aus (8) für Kugelstrahler sich ergebende Verlauf mit eingezeichnet. Man entnimmt den Kurven, daß mit größer werdendem Radius ϱ_0 die Maxima und Minima auf der Mittelnormalen in ihrer Zahl wachsen und in ihrer Lage von der Blende wegwandern: das am weitesten von ihr entfernte Maximum ist auch das höchste. Im Anschluß an dieses „Hauptmaximum“ nimmt die Energie etwa wie $1/x^2$ ab. Während die Lage der Extrema dem Augenschein nach bei beiden Ansätzen dieselbe ist, weisen ihre Funktionswerte wesentliche Unterschiede¹² auf, die sich jedoch mit wachsendem Abstand x von der Blende verringern.

Bereits vorliegende Messungen an Blenden von Erler¹ werden von Born¹⁰ mit Hilfe eines in der Akustik zur Berechnung des Schallfeldes von „Flächenstrahlern“ verwendeten, von Rayleigh¹³ angegebenen Ausdrucks, der eine äußere Ähnlichkeit mit dem in (1) formulierten Huyghensschen Prinzip hat¹⁴, einer theoretischen Beschreibung zugeführt. Diskrepanzen in der Höhe der Maxima und Minima werden von ihm so erklärt, daß „die Rechnung nur für die Mittelnormale gilt, während der von Erler zur Messung benutzte Empfänger einen darüber hinausreichenden Empfangsquerschnitt besitzt“. Die gut mit

Erler¹ übereinstimmenden eigenen Messungen mit einem Empfangsdetektor, dessen Größe im Gegensatz zu Erler klein gegen $\lambda/2$ ist, lassen jedoch diese Erklärung von Born als nicht zutreffend erscheinen; nach den obigen Überlegungen⁶ ist die von ihm gemachte Annahme elementarer elektromagnetischer Kugelstrahler nicht in der Lage, die wahren Verhältnisse zu beschreiben. Damit erweist sich auch die von Born ausgesprochene Vermutung, daß „der oben erwähnte Ansatz von Rayleigh auch für Punkte außerhalb der Mittelnormalen Geltung besitzen dürfte“, als unrichtig, da das Feld eines Hertzischen Dipols außerhalb seiner Symmetrieebene von dem eines Kugelstrahlers wesentlich verschieden ist.

Eigene Messungen wurden mit einer ähnlichen Anordnung ausgeführt, wie sie Erler¹ beschreibt. Zur Verfügung standen zwei Magnetronsender $\lambda = 10$ cm und $\lambda = 6$ cm. Der als $\lambda/2$ -Dipol ausgebildete Strahler befand sich zwecks Bündelung der abgestrahlten Wellen (Verminderung der Raumeffekte, Energieverstärkung) in einem metallischen Trichter¹⁵. Als Empfänger diente ein kleiner unabgestimmter Detektor¹⁶ mit quadratischer Charakteristik. Er wurde auf einem dünnen Trolitul-Rundstab gehalten, der seinerseits auf einem kleinen auf Schienen laufenden Holzwagen befestigt war, der durch Motorantrieb mit konstanter Geschwindigkeit bewegt werden konnte (Abb. 7). Die dabei gemessene Intensitätsverteilung wurde von einem Multiflexgalvanometer¹⁷ photographisch registriert.

Sämtliche Messungen wurden in einer Halle mit Holzwänden durchgeführt. Die störenden Einflüsse durch Reflexionen an den Seitenwänden waren besonders gering bei diagonalen Aufstellung der gesamten Anordnung. Zwecks Erfüllung der geforderten Voraussetzung nach

¹² Im Gegensatz zu (8), wo stets $|A_k|_{\max}^2 = 4$ und $|A_k|_{\min}^2 = 0$.

¹³ Rayleigh, The theory of sound § 278.

¹⁴ Vergl. dazu A. Schoch⁸, S. 325.

¹⁵ Berechnet nach Schäfer, TFT 32, 141 [1943].

¹⁶ Bezogen durch A. K. Maier, Eislingen.

¹⁷ Dr. B. Lange, Berlin.

¹⁰ H. Born, Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 62, 20 [1943].

¹¹ z. B. Gg. Joos, Lehrb. d. theoret. Physik, Leipzig 1942, S. 347.

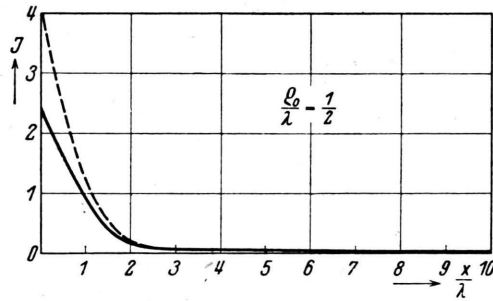


Abb. 2.

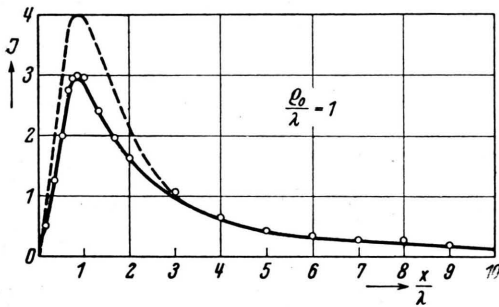


Abb. 3.

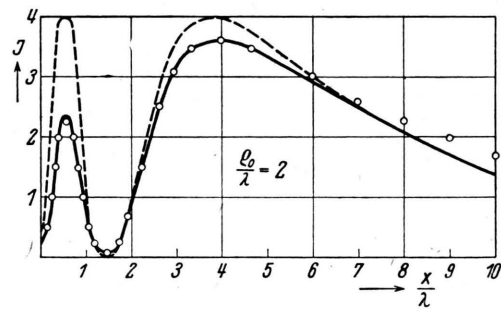


Abb. 4.

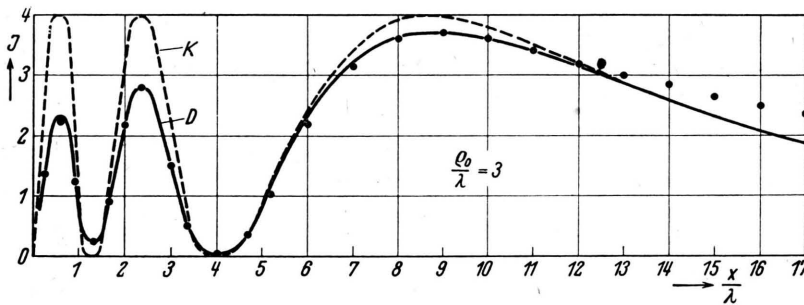


Abb. 5.

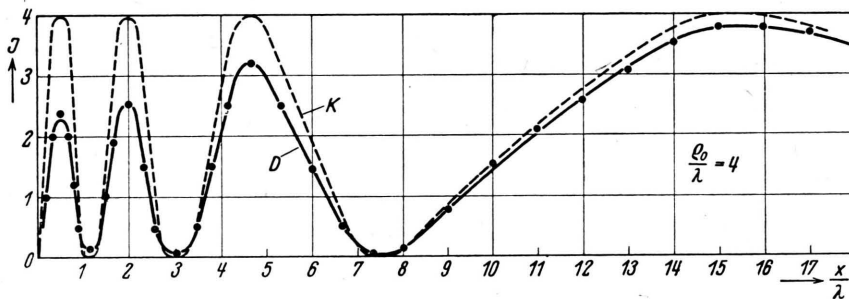


Abb. 6.

Abb. 2—6. Intensitätsverteilung auf der Mittelnormalen einer kreisförmigen Blende für die Radien $\rho_0 = 1/2\lambda, 1\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ und 4λ .

---- (K) Kugelstrahler, — (D) Hertz'sche Dipole als Elementarerreger.
 ○ Meßpunkte bei $\lambda = 10$ cm, ● Meßpunkte bei $\lambda = 6$ cm.

„völliger Ausleuchtung“ befanden sich die Blenden mit dem Öffnungsverhältnis $\varrho_0/\lambda = 1$ und 2 (gemessen bei $\lambda = 10$ cm) 40λ , die mit $\varrho_0/\lambda = 3$ und 4 (gemessen bei $\lambda = 6$ cm) 80λ vom Sendedipol entfernt¹⁸. Ihr Mittelpunkt lag 1,40 m über dem Saalboden. Die seitliche Abschirmung war so bemessen, daß der Detektor in einem Kontrollversuch bei abgedeckter Öffnung über den gesamten Registrierbereich keinen Ausschlag zeigte. Die Abschirmbleche waren zur Vermeidung unerwünschter Reflexionen mit einer reflexionsfreien Schicht belegt. Durch diese Maßnahme gelang es, die Amplitudenreflexion für eine vorgegebene Wellenlänge λ auf etwa 10% der metallischen Reflexion herabzudrücken. Ein ebenso präpariertes Al-Blech von

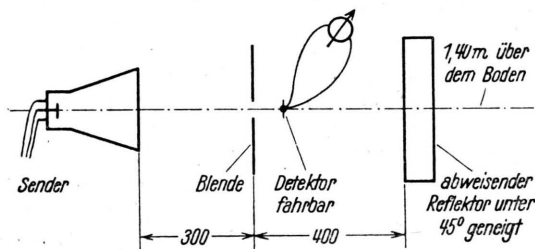


Abb. 7. Versuchsanordnung.

(2×2) m Größe war am Ende der Meßstrecke etwa unter 45° aufgestellt (s. Abb. 7) und diente als „abweisender Reflektor“, der vermeiden sollte, daß die nach hinten weglaufende Welle nach Reflexion an den Wänden nochmals auf den Empfänger traf und Anlaß zu stehenden Wellen gab. Trotzdem noch verbleibende kleine Raumeinflüsse konnten aus den Registrierkurven unschwer eliminiert werden.

Die Meßergebnisse sind in den Abb. 2–6 und 8 durch Kreise (○) bei $\lambda = 10$ cm bzw. durch Punkte (●) bei $\lambda = 6$ cm verzeichnet. Dabei wurde nicht wie bei Erler¹ eine willkürliche Normierung dadurch eingeführt, daß der berechnete¹⁹ und der gemessene Intensitätswert des Hauptmaximums jeweils gleichgesetzt wurden; die angegebenen Meßpunkte bedeuten vielmehr das tatsächlich beobachtete Verhältnis

$I(x)$ Intensität hint. der Öffnung an der Stelle x
 $I(0) =$ Intensität d. einf. Welle bei $x=0$ ohne Blende

¹⁸ Die Intensität (Galvanometeraussschlag) der einfallenden Welle betrug bei fortgenommener Blende am Orte des Blendenrandes 80% des Wertes am Orte der Blendenmitte. Der Abfall der Amplitude beträgt also höchstens 10%.

¹⁹ Nach der optischen Formel (9).

Man erkennt eine außerordentlich gute Übereinstimmung mit dem berechneten Verlauf, was ganz besonders deutlich in Abb. 8, also bei den Messungen in der Blendenebene, hervortritt. Die durch die Blende hervorgerufene Störung wird quantitativ richtig beschrieben, wenn man sich die beugende Öffnung nach dem Huyghensschen Prinzip mit elementaren Dipolstrahlern belegt denkt. Weitere Untersuchungen müssen erweisen, ob dieses zunächst nur für die Mittelnormale gewonnene Ergebnis auch für beliebige Aufpunkte Gültigkeit besitzt.

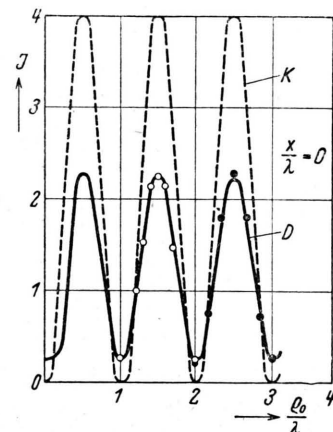


Abb. 8. Intensitätsverlauf im Mittelpunkt der Öffnung in Abhängigkeit vom Blendenradius.
 ---- (K) Kugelstrahler, — (D) Hertz'sche Dipole als Elementarerreger.

● Meßpunkte bei $\lambda = 6$ cm. ○ Meßpunkte bei $\lambda = 10$ cm.

Schließlich sei noch vermerkt, daß die Messungen mit denen von Erler¹ trotz der verschiedenen Empfängertypen²⁰ insgesamt recht gut übereinstimmen²¹. Das legt die Vermutung nahe, daß der von Born erwähnte Einfluß einer endlichen Empfängergröße a unterhalb eines bestimmten Verhältnisses a/ϱ_0 auf das Gesamtergebnis relativ gering ist.

Eine für die Praxis bedeutsame Folgerung aus diesen Ergebnissen ist die Möglichkeit einer Feldverstärkung mittels Lochblende. Aus (7) ergibt sich mit ausgezeichneten Näherung die Lage der Extrema bei

$$x = \frac{\lambda}{n} \left\{ \left(\frac{\varrho_0}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right\}, \quad (10)$$

²⁰ Erler verwendet ein in einen $\lambda/2$ -Dipol eingeschaltetes Thermokreuz.

²¹ Insbesondere nimmt die Feldenergie für große x langsamer als zu erwarten ab, wofür eine Erklärung noch aussteht.

wobei $n = 1, 3, 5, \dots, 2m + 1, \dots$ die Lage der Maxima und
 $n = 2, 4, 6, \dots, 2m, \dots$ die Lage der Minima liefert.

Die Zahl z der überhaupt möglichen Extremalstellen ist für $\varphi_0 = \nu \lambda/2$, ν ganzzahlig, gleich

$$z = \nu - 1, \quad (11)$$

so daß also für $\varphi_0 \leq \lambda/2$ ein Extremum überhaupt nicht eintreten kann. Die zugehörigen Funktionswerte erhält man durch Einsetzen von (10) in (7):

$$|A_D|^2|_{\text{Extr.}} = \left\{ 1 \pm \frac{16 (\varphi_0/\lambda)^4 + n^4}{(4 (\varphi_0/\lambda)^2 + n^2)^2} \right\}. \quad (12)$$

Man sieht, daß im Hauptmaximum ($n = 1$) eine wesentliche Verstärkung des Feldes gegenüber der einfallenden Welle stattfindet. Mißt man mit einem quadratisch anzeigenden Instrument, so ist die obere Grenze für diesen Verstärkungsfaktor 4^{22} . Inwieweit er erreicht wird, hängt gemäß (12) einzig und allein von der Größe von φ_0/λ und damit von dem technisch möglichen Querschnitt des eingestrahnten Bündels ab. Gleichzeitig wächst auch der in der Praxis interessierende „Verstärkungsbereich“ auf der x -Achse (s. Abb. 2–6). Aus (7) findet man für die „Halbwertsbreite“ b des Hauptmaximums

$$A_D^2 > 2 \text{ innerhalb } b = \frac{4}{3} \left(\frac{\varphi_0}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{4}. \quad (13)$$

In diesem Bereich kann also eine wesentliche Verstärkung der Intensität (Faktor 2–4) durch die Blende erreicht werden.

In Abb. 9–11 ist genau wie in Abb. 8 für $x = 0$ die Intensität als Funktion des Blendenradius für $x/\lambda = 2, 4$ und 8 dargestellt. Die praktische Bedeutung dieser Kurven besteht darin, daß man ihnen entnehmen kann, welche Blendenöffnung man anwenden muß, um bei einer bestimmten Wellenlänge und fest vorgegebener Empfängerentfernung die größtmögliche Intensität zu erreichen.

Nachdem sich der eingangs rein anschaulich aus dem Huyghens-Fresnelschen Prinzip gewonnene Ansatz (2) zur Beschreibung der beobachteten Beugungserscheinungen außerordent-

²² Dieser Faktor 4 ergibt sich schon mit den weitaus primitiveren Hilfsmitteln der Fresnelschen Zonenkonstruktion, s. z. B. Gehrke, Handb. d. physik. Optik, Leipzig 1927, S. 504.

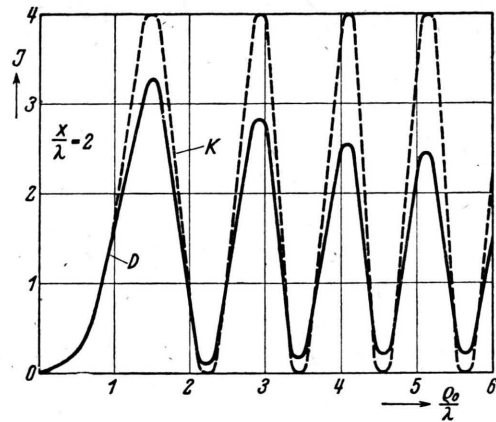


Abb. 9.

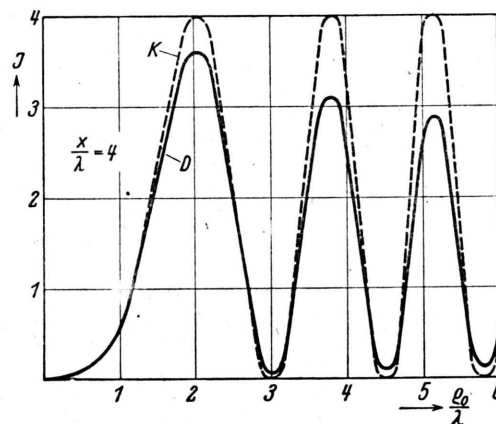


Abb. 10.

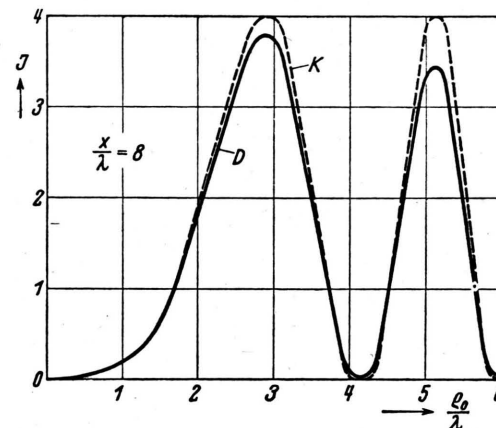


Abb. 11.

Abb. 9–11. Intensitätsverlauf in Abhängigkeit vom Blendenradius für Punkte auf der Mittelnormalen mit den Koordinaten $x = 2\lambda, 4\lambda$ und 8λ .

---- (K) Kugelstrahler, — (D) Hertz'sche Dipole als Elementarerreger.

lich gut bewährt hat, soll abschließend untersucht werden, inwieweit er mit einer strengeren Theorie verträglich ist.

Die theoretische Grundlage für die näherungsweise Behandlung aller lichtoptischen Beugungsprobleme bildet die bekannte Kirchhoffsche Integralformel²³

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \oint_B \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} df. \quad (14)$$

Sie liefert die Erregung in einem Punkt P als Integral der Lichterregung über die Begrenzung B eines P enthaltenden, die Lichtquelle ausschließenden Gebietes²⁴. Wählt man

$$v = e^{-ikr}/r + e^{-ikr'}/r', \quad (15)$$

so wird aus (14)

$$u_P = -\frac{1}{2\pi} \iint_{F'} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} df. \quad (16)$$

Setzt man auf der Rückseite des Schirmes $\partial u/\partial n$ gleich Null, in der Beugungsöffnung jedoch gleich der ungestörten einfallenden Lichterregung, so beschreibt (16) die Beugung an einem beiderseitig reflektierenden, jedoch nur an der beschatteten Seite im Sinne der Randbedingung $\partial u/\partial n = 0$ „vollkommen blanken“ Schirm²⁵.

Beschränkt man sich wiederum auf eine einfallende ebene Welle

$$u^{(e)} = u_0 e^{-ikx},$$

so geht (16) in (1) über, womit sich das Huyghens-Fresnelsche Prinzip hier als Spezialfall der strengen Kirchhoffschen Formel ergibt.

Gegenüber lichtoptischen Problemen²⁷ kann u_P bei der Anwendung auf Hertz'sche Wellen nicht mit einer Komponente der elektrischen Feldstärke identifiziert werden²⁸, sondern ist z. B. als Komponente des Hertz'schen Vektors $\mathfrak{Z}$ ²⁹ anzusehen. Der einfallenden ebenen Welle entspricht dann der Ansatz

$$Z_x^{(e)} = 0, Z_y^{(e)} = 0, Z_z^{(e)} = Z_0 e^{-ikx},$$

und der (16) analoge Ausdruck lautet

$$Z_z = \frac{i}{\lambda} Z_0 \iint_F \frac{e^{-ikr}}{r} df, \quad (17)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial n} &= -ik Z_0 \text{ in der Öffnung,} \\ &= 0 \text{ an der Schattenseite des Schirms} \end{aligned}$$

angenommen wurde. Damit sind die aus

$$\mathfrak{E}_P = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + \text{grad div}_P \mathfrak{Z} = \text{rot}_P^2 \mathfrak{Z}, \quad (18)$$

$$\mathfrak{H}_P = \frac{1}{c} \text{rot}_P \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \quad (19)$$

sich ergebenden Feldstärken Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen, was für die der Wellengleichung genügende Funktion u_P im allgemeinen nicht der Fall ist²⁹. Die Auswertung von (18) liefert mit $k^2 Z_0 = E_0$ den oben verwendeten Ansatz (4), die von (19) ergibt unter Verwendung von (5) und mit $k^2 Z_0 = -H_0$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{H_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_x^{r_0} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(ik + \frac{1}{r} \right) \sqrt{r^2 - x^2} dr \cos \gamma d\gamma, \\ H_y &= H_0 e^{-ikx} - H_0 \int_0^{2\pi} \frac{x}{r_0} e^{-ikr_0} d\gamma, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Will man im Rahmen einer allgemeinen elektromagnetischen Lichttheorie das Huyghens-Fresnelsche Prinzip für die Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ formulieren, so steht man vor der Aufgabe, auf einer geschlossenen Fläche die fiktiven Sekundärstrahler zu ermitteln, die die Wirkung äußerer Lichtpunkte auf das Innere ersetzen können. Eine derartige Rechnung³⁰ liefert für diese Erreger

Vorgabe von u und $\partial u/\partial n$ auf dem Schirm erforderlich ist, was zu mathematischen Schwierigkeiten führt. Vergl. hierzu Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik, II, Braunschweig 1927.

²⁶ A. Rubinowicz, Ann. Physik (4) 53, 257 [1917].

²⁷ Wesentlich ist dort nur, daß die Intensität u^2 proportional ist.

²⁸ Cl. Schaefer⁵, S. 319, Fußnote 1, und S. 596.

²⁹ Kottler, Ann. Physik (4) 71, 457 [1923].

³⁰ J. L.armor, Proc. London Math. Soc. 1, 1 [1903].

²³ Z. B. Gg. Joos¹¹, S. 335.

²⁴ Über die aus der beschränkten Anwendbarkeit der strengen Formel entspringenden Mängel gegenüber einer exakten Lösung s. z. B. Handb. d. Physik XX, Kap. 7, Einleitung; K. F. Novobatzky, Z. Physik 119, 102 [1942].

²⁵ Die Anwendung der Greenschen Funktion für den Halbraum nach Sommerfeld, die nur bei ebenen Schirmen möglich ist, gestattet, aus der Kenntnis von $\partial u/\partial n$ allein — s. Gl. (16) — die geforderte Lösung herzustellen, während im allgemeinen die

neben elektrischen auch magnetische Dipole. Indessen ergeben auch die Formeln (4) und (20) bei Anwendung auf die ungestörte Wellenausbreitung die eingestrahlte elektromagnetische Welle. Die nähere Rechnung zeigt, daß zur Erfüllung dieser physikalischen Forderung im Falle der ebenen Welle die Annahme von elektrischen *oder* magnetischen Belegungen der Integrationsfläche ausreichend ist. Unser zunächst rein anschaulich gewonnener Ansatz (2) erweist sich zusammen mit dem hier nicht weiter interessierenden³¹ Ausdruck für das Magnetfeld als Spezialfall der auf die elektromagnetische Lichttheorie übertragenen Kirchhoffschen Formel.

Ihre Verwendbarkeit für die Beugungstheorie ist an die Kenntnis der Werte von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ auf einer den Aufpunkt umgebenden Fläche gebunden. Die in der Lichtoptik angenommenen Randwerte (s. o.) stellen physikalisch insofern eine Näherung dar, als wir tatsächlich selbst unmittelbar hinter dem Schirm abgebeugtes Licht haben und die Lichtverteilung in der Öffnung durch die Anwesenheit des Schirmes — zum mindesten auf Entfernungen von der Größe einer Wellenlänge — gestört wird. Der Einfluß dieser Bereiche auf das Integral (16) ist jedoch unbedeutend, weil die Abmessungen der Öffnungen stets hinreichend groß gegen die Lichtwellenlänge sind. Treffen dagegen Hertz'sche Wellen auf eine metallische Blende, deren Dimensionen von der Größenordnung der Wellenlänge sind, so müßte nach dem eben Gesagten ein in der Öffnung angeordneter Indikator das Vorhandensein des Schirms anzeigen. Diese Vermutung wurde vom Experiment tatsächlich bestätigt; wenn wir trotzdem in Unkenntnis der durch den Schirm bedingten Modifikation des Feldes für eine erste Orientierung

$$\left. \begin{aligned} E &= E_z = E_0 \\ H &= H_y = H_0 \end{aligned} \right\} \text{ in der Öffnung,} \quad (21)$$

$$E = H = 0 \quad \text{an der Schattenseite des Schirms}$$

angenommen haben, so ist es wohl selbstverständlich, daß die durch diese willkürlich gewählten Randwerte gewonnenen Integrale der Maxwell'schen Gleichungen gar keine Lösung des vorliegenden Randwertproblems sind. Das kommt auch darin zum Ausdruck, daß die aus (4) und (20) für die Integrationsfläche berechneten Werte von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ keineswegs mit den in (21) angenommenen übereinstimmen; insbesondere verschwinden $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ an der Rückseite des Schirmes nicht. Man könnte nun die ganze Betrachtung in folgender Weise rechtfertigen: Man faßt die durch das beschriebene Verfahren errechneten Feldstärken als erste Näherung auf, ermittelt aus ihnen die Randwerte und wiederholt mit diesen das Verfahren. Es ist zu vermuten, daß diese Methode der sukzessiven Approximation konvergiert, und es wäre zu zeigen, daß bereits der zweite Schritt einen vernachlässigbar kleinen Beitrag neben dem ersten ergibt. Solche Untersuchungen sind auch für lichtoptische Beugungserscheinungen — vermutlich wegen des dort schon erheblichen mathematischen Aufwands — niemals durchgeführt worden. Im Bereich Hertz'scher Wellen hat man indessen die Möglichkeit, experimentell nachzuprüfen, inwieweit bereits das erste Glied der skizzierten Näherungsentwicklung die Erfahrung richtig wiedergibt. Unsere Messungen auf der Mittelnormalen und speziell im Mittelpunkt einer kreisförmigen Öffnung (s. Abb. 8) zeigen quantitative Übereinstimmung mit dem nach (4) errechneten Feldverlauf.

Hrn. Dozent Dr. K.-H. Hellwege danke ich für sein förderndes Interesse beim Fortgang der Arbeit, Hrn. Dipl.-Phys. R. Henke für wertvolle Diskussionen.

³¹ Der zur Ausmessung des Feldes als Indikator dienende Detektor spricht auf das Magnetfeld nicht an.