

Ein Vergleich dreier aussagenlogischer Semantiken



ALEXANDER ZIMMERMANN

Abstract

In this article we compare three different semantic theories for a propositional language, namely a valuation-semantic, a truth-set-semantic and a modal-set-semantic theory. We prove step by step that these semantic theories are mutually equivalent.

1 Einleitung

In diesem Aufsatz vergleichen wir die Belegungs-, die Wahrheitsmen-gen und die Hintikkamengensemantik für eine aussagenlogische Sprache. Unser Ziel ist es, anhand hinreichend ausführlicher Beweise zu zeigen, dass diese drei Semantiken - salopp formuliert - paarweise miteinander äquivalent sind.

Im Gegensatz zur aussagenlogischen Belegungssemantik wird sowohl bei der aussagenlogischen Wahrheits- als auch bei der aussagenlogischen Hintikkamengensemantik nicht auf Wahrheitswerte Bezug genommen. Infolgedessen wird keine Funktion benötigt, die jeder Formel (genau) einen Wahrheitswert zuordnet. Stattdessen wird mit Formelmengen, die gewisse Eigenschaften haben, operiert.

Wir kürzen ‘Definition’ mit ‘D’, ‘Metatheorem’ mit ‘T’ und ‘genau dann, wenn’ mit ‘gdw’ ab.

2 Eine aussagenlogische Sprache

Das Vokabular sei identisch mit $\mathcal{V}_D \cup \mathcal{V}_L \cup \mathcal{V}_Z$, wobei $\mathcal{V}_D$ identisch mit der Menge aller und nur der Aussagenkonstanten, $\mathcal{V}_L$ identisch mit der Menge aller und nur der logischen Zeichen und $\mathcal{V}_Z$ identisch mit $\{(\cdot, \cdot)\}$ sei.

Definition 1. Für jede Menge g sowie für jede natürliche Zahl n gilt: g ist ein n -gliedriger Ausdruck gdw g eine n -stellige Funktion von $\{i : 1 \leq i \leq n\}$ in $\mathcal{V}_D \cup \mathcal{V}_L \cup \mathcal{V}_Z$ ist.

Definition 2. Für jedes X gilt:

X ist ein Ausdruck gdw es mindestens eine natürliche Zahl n gibt derart, dass X ein n -gliedriger Ausdruck ist.

Definition 3. Für jede Menge f sowie für jede natürliche Zahl n sowie für jedes X gilt:

f ist eine n -gliedrige Konstruktionssequenz für X gdw f eine n -stellige Funktion von $\{i : 1 \leq i \leq n\}$ in $\{Y : Y \text{ ist ein Ausdruck.}\}$ ist, und X ein Ausdruck ist, derart, dass gilt:

- 1) $f_n = X$, und
- 2) für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ gilt:
 - 2.1) $f_k \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$, oder
 - 2.2) es gibt mindestens eine natürliche Zahl i mit $1 \leq i < k$ derart, dass $f_k = \neg f_i$, oder
 - 2.3) es gibt mindestens eine natürliche Zahl i sowie mindestens eine natürliche Zahl j mit $1 \leq i, j < k$ derart, dass $f_k = (f_i \wedge f_j)$ oder $f_k = (f_i \vee f_j)$ oder $f_k = (f_i \rightarrow f_j)$ oder $f_k = (f_i \leftrightarrow f_j)$.

Definition 4. Für jedes A gilt:

A ist eine Formel gdw es mindestens eine Funktion f sowie mindestens eine natürliche Zahl n gibt derart, dass f eine n -gliedrige Konstruktionssequenz für A ist.

Definition 5. Für jede Formel A gilt: A ist atomar gdw $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.

Definition 6. $\mathcal{F} = \{A : A \text{ ist eine Formel.}\}^1$

Definition 7. Für jede Menge T gilt: T ist eine Formelmenge gdw $T \subseteq \mathcal{F}$.

Definition 8. Für jede Formel A sowie für jede Formel B gilt:

- (1) Wenn A atomar ist, dann ist der Grad von A (kurz: $gr(A)$) $= 0$,
- (2) $gr(\neg A) = gr(A) + 1$,
- (3) für jedes $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gilt: $gr((A \otimes B)) = gr(A) + gr(B) + 1$.

¹Wir führen hier keinen Beweis dafür an, dass es genau eine Menge aller und nur der Formeln gibt, da dies nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist. Auch die bereits geäußerten und noch folgenden Behauptungssätze der Art ‘Die Menge aller und nur [...]’ führen wir ohne Eindeutigkeitsbeweis an.

Definition 9. Für jede Formel A sowie für jede Formel B gilt:

- (1) Wenn A atomar ist, dann ist der Hintikkagrad von A (kurz: $hg(A)$)
 $= 1$,
- (2) $hg(\neg A) = hg(A) + 1$,
- (3) für jedes $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gilt: $hg(A \otimes B) = hg(A) + hg(B) + 1$.²

3 Die Belegungs-, die Wahrheitsmengen- und die Hintikka-mengensemantik

3.1 Modell-sein-für als 2-stellige Relation

Definition 10. Für jede Funktion f gilt: f ist eine Belegung gdw f eine Funktion von $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ in $\{0,1\}$ ist.

Definition 11. Für jede Belegung β sowie für jede Formel A gilt: β ist ein belegungssemantisches Modell von A (kurz: $\models^{\beta} A$) gdw für jede Formel B sowie für jede Formel C gilt:

- (1) Wenn A atomar ist, dann gilt: $\models^{\beta} A$ gdw $\beta(A) = 1$,
- (2) wenn $A = \neg B$, dann gilt: $\models^{\beta} \neg B$ gdw es nicht der Fall ist, dass $\models^{\beta} B$,³
- (3) wenn $A = (B \wedge C)$, dann gilt: $\models^{\beta} (B \wedge C)$ gdw $\models^{\beta} B$ und $\models^{\beta} C$,
- (4) wenn $A = (B \vee C)$, dann gilt: $\models^{\beta} (B \vee C)$ gdw $\models^{\beta} B$ oder $\models^{\beta} C$,
- (5) wenn $A = (B \rightarrow C)$, dann gilt: $\models^{\beta} (B \rightarrow C)$ gdw $\models^{\beta} \neg B$ oder $\models^{\beta} C$,
- (6) wenn $A = (B \leftrightarrow C)$, dann gilt: $\models^{\beta} (B \leftrightarrow C)$ gdw ($\models^{\beta} B$ und $\models^{\beta} C$) oder ($\models^{\beta} \neg B$ und $\models^{\beta} \neg C$)

3.2 Wahrheitsmenge-sein als 1-stellige Relation

Definition 12. Für jede Formelmenge T gilt: T ist eine Wahrheitsmenge gdw für jede Formel A sowie für jede Formel B gilt:

- (1) $\neg A \in T$ gdw $A \notin T$,
- (2) $(A \wedge B) \in T$ gdw $A \in T$ und $B \in T$,

²Wir könnten D9 auch mit Hilfe von D8 formulieren.

³Statt ‘Es ist nicht der Fall, dass $\models^{\beta} A$ ’ schreiben wir kurz ‘ $\not\models^{\beta} A$ ’.

- (3) $(A \vee B) \in T$ gdw $A \in T$ oder $B \in T$,
- (4) $(A \rightarrow B) \in T$ gdw $\neg A \in T$ oder $B \in T$, und
- (5) $(A \leftrightarrow B) \in T$ gdw $(A \in T \text{ und } B \in T)$ oder $(\neg A \in T \text{ und } \neg B \in T)$
(Vgl. [2, S. 12]).

Bei D12 wird im Gegensatz zu D11 - salopp formuliert - nur für jede Art von komplexer Formel eine Regelung getroffen. Außerdem wird nicht auf Wahrheitswerte Bezug genommen. Gleiches gilt auch für die folgende Definition:

3.3 Hintikkamenge-sein als 1-stellige Relation

Definition 13. Für jede Formelmenge T gilt: T ist eine Hintikkamenge gdw für jede Formel A sowie für jede Formel B gilt (vgl. [1, S. 27.]⁴

- (1) Wenn $A \in T$ und wenn A atomar ist, dann $\neg A \notin T$,
- (2) wenn $\neg\neg A \in T$, dann $A \in T$,
- (3) wenn $(A \wedge B) \in T$, dann $A \in T$ und $B \in T$,
- (4) wenn $\neg(A \wedge B) \in T$, dann $\neg A \in T$ oder $\neg B \in T$,
- (5) wenn $(A \vee B) \in T$, dann $A \in T$ oder $B \in T$,
- (6) wenn $\neg(A \vee B) \in T$, dann $\neg A \in T$ und $\neg B \in T$,
- (7) wenn $(A \rightarrow B) \in T$, dann $\neg A \in T$ oder $B \in T$,
- (8) wenn $\neg(A \rightarrow B) \in T$, dann $A \in T$ und $\neg B \in T$,
- (9) wenn $(A \leftrightarrow B) \in T$, dann $(A \in T \text{ und } B \in T)$ oder $(\neg A \in T \text{ und } \neg B \in T)$, und
- (10) wenn $\neg(A \leftrightarrow B) \in T$, dann $(\neg A \in T \text{ oder } \neg B \in T)$ und $(A \in T \text{ oder } B \in T)$.

⁴Drei Beispiele für Hintikkamengen, falls p, q Aussagenkonstanten sind: $\{p, \neg\neg p\}$, $\{(\neg p \rightarrow q), \neg\neg p, p\}$, $\emptyset$.

3.4 Simultan erfüllen als 2-stellige Relation

Definition 14. Für jede Belegung β sowie für jede Formelmenge T gilt: β erfüllt simultan belegungssemantisch T (kurz: $\models_1^\beta T$) gdw für jede Formel A gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

Wir können uns entsprechende Definitionen für die Wahrheits- und für die Hintikkamengensemantik sparen, da bei diesen Semantiken in keiner Weise auf Belegungen Bezug genommen wird. Es reicht, wenn wir die jeweiligen Erfüllbarkeitsprädikate definieren.

3.5 Simultane Erfüllbarkeit als 2-stellige Relationen

Definition 15. Für jede Formelmenge T gilt: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar gdw es mindestens eine Belegung β gibt derart, dass $\models_1^\beta T$.

Definition 16. Für jede Formelmenge T gilt: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar gdw es mindestens eine Wahrheitsmenge T^* gibt derart, dass $T \subseteq T^*$ (Vgl. [2, S. 12]).

Definition 17. Für jede Formelmenge T gilt: T ist hintikkamengensemantisch simultan erfüllbar gdw es mindestens eine Hintikkamenge T^* gibt derart, dass $T \subseteq T^*$.

3.6 Folgerung als 2-stellige Relationen

Definition 18. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: A folgt belegungssemantisch aus T (kurz: $T \models_4 A$) gdw für jede Belegung β gilt: Wenn $\models_1^\beta T$, dann $\models^\beta A$.

Definition 19. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: A folgt wahrheitsmengensemantisch aus T (kurz: $T \models_5 A$) gdw für jede Wahrheitsmenge T^* gilt: Wenn $T \subseteq T^*$, dann $A \in T^*$.

Definition 20. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: A folgt hintikkamengensemantisch aus T (kurz: $T \models_6 A$) gdw für jede Hintikkamenge T^* gilt: Wenn $T \subseteq T^*$, dann $\neg A \notin T^*$.

Um unter anderem T38 zu erhalten, können wir D20 nicht analog zu D19 formulieren.

3.7 Allgemeingültigkeit als 1-stellige Relationen

Definition 21. Für jede Formel A gilt: A ist belegungssemantisch allgemeingültig (kurz: $\models_1 A$) gdw für jede Belegung β gilt: $\models^\beta A$.

Definition 22. Für jede Formel A gilt: A ist wahrheitsmengensemantisch allgemeingültig (kurz: $\models_2 A$) gdw für jede Wahrheitsmenge T gilt: $A \in T$ (Vgl. [2, S. 12]).

Definition 23. Für jede Formel A gilt: A ist hintikkamengensemantisch allgemeingültig (kurz: $\models_3 A$) gdw $\emptyset \models_6 A$.

Wir können D23 nicht analog zu D22 formulieren, da nach D13 gilt, dass $\emptyset$ eine Hintikkamenge ist. Vgl. D23 mit T27.

4 Einige Metatheoreme

Metatheorem 24. Für jede Belegung β sowie für jede Formel A gilt: $\models^\beta A$ gdw $\models^\beta \neg\neg A$.

Beweis:

Trivial mit D11

Metatheorem 25. Für jede Belegung β gilt: $\models_1^\beta \emptyset$.

Beweis:

Sei β eine Belegung und sei A eine Formel.

Nach ML⁵ gilt: $A \notin \emptyset$. Also: Wenn $A \in \emptyset$, dann $\models^\beta A$. Also: Für jede Formel A gilt, dass, wenn $A \in \emptyset$, dann $\models^\beta A$. Also nach D14: $\models_1^\beta \emptyset$. Also: Für jede Belegung β gilt, dass $\models_1^\beta \emptyset$.

□

Metatheorem 26. Für jede Formel A gilt: $\models_1 A$ gdw $\emptyset \models_4 A$.

Beweis:

Sei A eine Formel.

$\Rightarrow$:

Annahme: $\models_1 A$.

Zu zeigen: $\emptyset \models_4 A$.

Aus der Annahme folgt nach D21 gilt für die Belegung β : $\models^\beta A$. Also: Wenn $\models_1^\beta \emptyset$, dann $\models^\beta A$. Also: Für jede Belegung β gilt, dass, wenn $\models_1^\beta \emptyset$, dann $\models^\beta A$. Also nach D18: $\emptyset \models_4 A$.

$\Leftarrow$: Analog mit T25

□

⁵Wir schreiben kurz ‘ML’ für ‘Mengenlehre’.

Metatheorem 27. Für jede Formel A gilt: $\models_2 A$ gdw $\emptyset \models_5 A$.

Beweis:

Sei A eine Formel.

$\Rightarrow$:

Annahme: $\models_2 A$.

Zu zeigen: $\emptyset \models_5 A$.

Aus der Annahme folgt nach D22 für die Wahrheitsmenge T : $A \in T$.

Also: Wenn $\emptyset \subseteq T$, dann $A \in T$. Also: Für jede Wahrheitsmenge T gilt, dass, wenn $\emptyset \subseteq T$, dann $A \in T$. Also nach D19: $\emptyset \models_5 A$.

$\Leftarrow$: Analog

□

5 Einige Metatheoreme über Beziehungen zwischen der Belegungs-, der Wahrheitsmengen- und der Hintikkamengenssemantik

Metatheorem 28. Zu jeder Wahrheitsmenge T gibt es mindestens eine Belegung β , sodass für jede Formel A gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.⁶

Sei T eine Wahrheitsmenge.

Hilfsdefinition (HD): β sei diejenige Belegung, sodass für jede atomare Formel A gilt: $\beta(A) = 1$ gdw $A \in T$.

Wir beweisen mit Hilfe eines Prinzips der starken vollständigen Induktion:

Für jede natürliche Zahl k gilt, dass für jede Formel A vom Grad k gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Basisbehauptung:

Für jede Formel A vom Grad 0 gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Induktionsbasis:

Sei A eine Formel vom Grad 0. Also: A ist atomar. Nach HD gilt: $\beta(A) = 1$ gdw $A \in T$. Also nach D11: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$. Also: Für jede Formel A vom Grad 0 gilt, dass $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

⁶Wir könnten sogar beweisen:

Zu jeder Wahrheitsmenge T gibt es genau eine Belegung β , sodass für jede Formel A gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Schrittbehauptung:

Für jede natürliche Zahl k gilt: Wenn für jede natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq k$ gilt, dass für jede Formel A vom Grad i gilt, dass $A \in T$ gdw $\models^\beta A$, dann gilt für jede Formel A vom Grad $k+1$, dass $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

I) *Induktionsvoraussetzung (I.V.):*

Sei k eine natürliche Zahl und gelte für jede natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq k$, dass für jede Formel A vom Grad i gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

II) *Zu zeigen ist:*

Für jede Formel A vom Grad $k+1$ gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Sei A eine Formel vom Grad $k+1$. Wenn A eine Formel vom Grad $k+1$ ist, dann trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

1. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Grad k derart, dass $A = \neg B$. Sei B vom Grad k eine solche Formel.
 $\Rightarrow$: Sei $\neg B \in T$. Also nach D12: $B \notin T$. Also nach I.V.: $\not\models^\beta B$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta A$.
 $\Leftarrow$: Sei $\models^\beta \neg B$. Also nach D11: $\not\models^\beta B$. Also nach I.V.: $B \notin T$. Also nach D12: $\neg B \in T$. Also: $A \in T$.
 Also: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.
2. Fall, 3. Fall und 5. Fall: Analog zum 4. Fall.
4. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Grad i sowie mindestens eine Formel C vom Grad j mit $0 \leq i, j \leq k$ derart, dass $A = (B \rightarrow C)$. Sei B vom Grad i eine solche Formel und sei C vom Grad j eine solche Formel mit $0 \leq i, j \leq k$.
 $\Rightarrow$: Sei $(B \rightarrow C) \in T$. Also nach D12: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Fall 4.1.1: $\neg B \in T$. Also nach D12: $B \notin T$. Also nach I.V.: $\not\models^\beta B$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.
 Fall 4.1.2: $C \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta C$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.
 Also in jedem Fall: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$. Also nach D11: $\models^\beta (B \rightarrow C)$. Also $\models^\beta A$.
 $\Leftarrow$: Sei $\models^\beta (B \rightarrow C)$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.
 Fall 4.2.1: $\models^\beta \neg B$. Also nach D11: $\not\models^\beta B$. Also nach I.V.: $B \notin T$. Also nach D12: $\neg B \in T$. Also: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Fall 4.2.2: $\models^\beta C$. Also nach I.V.: $C \in T$. Also: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Also in jedem Fall: $\neg B \in T$ oder $C \in T$. Also nach D12: $(B \rightarrow C) \in T$. Also: $A \in T$.
 Also: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Also in jedem Fall: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

□

Metatheorem 29. Zu jeder Belegung β gibt es mindestens eine Wahrheitsmenge T , sodass für jede Formel A gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.⁷

Sei β eine Belegung.

Hilfsdefinition (HD): $T = \{A : \models^\beta A\}$.

Zu zeigen: T ist eine Wahrheitsmenge.

Seien B, C Formeln.

- 1) $\Rightarrow$: Sei $\neg B \in T$. Also nach HD: $\models^\beta \neg B$. Also nach D11: $\not\models^\beta B$. Also nach HD: $B \notin T$.
 $\Leftarrow$: Sei $B \notin T$. Also nach HD: $\not\models^\beta B$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$. Also nach HD: $\neg B \in T$.
- 2), 3) und 5): Analog zu 4)
- 4) $\Rightarrow$: Sei $(B \rightarrow C) \in T$. Also nach HD: $\models^\beta (B \rightarrow C)$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.
 Fall 4.1.1: $\models^\beta \neg B$. Also nach HD: $\neg B \in T$. Also: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Fall 4.1.2: $\not\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta C$. Also nach HD: $C \in T$. Also: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Also in jedem Fall: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 $\Leftarrow$: Sei $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Fall 4.2.1: $\neg B \in T$. Also nach HD: $\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$. Also nach D11: $\models^\beta (B \rightarrow C)$.
 Fall 4.2.2: $\neg B \notin T$. Also: $C \in T$. Also nach HD: $\models^\beta C$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$. Also nach D11: $\models^\beta (B \rightarrow C)$.
 Also in jedem Fall: $\models^\beta (B \rightarrow C)$. Also nach HD: $(B \rightarrow C) \in T$.

Also nach D12: T ist eine Wahrheitsmenge.

□

Metatheorem 30. Für jede Formelmenge T gilt: T ist belegungsemantisch simultan erfüllbar gdw T wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar ist.

⁷Wir könnten sogar beweisen:

Zu jeder Belegung β gibt es genau eine Wahrheitsmenge T , sodass für jede Formel A gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Beweis:

Sei T eine Formelmenge.

$\Rightarrow$:

Annahme: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar.

Zu zeigen: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar.

Aus der Annahme folgt nach D15: Es gibt mindestens eine Belegung β mit $\models_1^\beta T$. Sei β eine solche Belegung. Also: $\models_1^\beta T$. Also gilt nach D14 für die Formel A : Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$. Annahme 2: $A \in T$. Also: $\models^\beta A$. Nach T29 gilt: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T^* , sodass für jede Formel A gilt, dass $A \in T^*$ gdw $\models^\beta A$. Sei T^* eine solche Wahrheitsmenge. Also: $A \in T^*$ gdw $\models^\beta A$. Zusammen mit $\models^\beta A$ gilt: $A \in T^*$. Also: Wenn $A \in T$, dann $A \in T^*$. Also: Für jede Formel A gilt, dass, wenn $A \in T$, dann $A \in T^*$. Also nach ML: $T \subseteq T^*$. Also: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T mit $\models_1^{T^*} T$. Also nach D16: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar.

$\Leftarrow$: Analog

□

Metatheorem 31. Für jede Formelmenge T gilt: Wenn T eine Wahrheitsmenge ist, dann ist T eine Hintikkamenge.

Beweis:

Sei T eine Formelmenge.

Annahme: T ist eine Wahrheitsmenge.

Zu zeigen: T ist eine Hintikkamenge.

Seien A, B Formeln.

Aus der Annahme folgt:

1) Wegen: $\neg A \in T$ gdw $A \notin T$, gilt: Wenn $\neg A \in T$, dann $\neg A \notin T$. Also: Wenn $A \in T$ und wenn A atomar ist, dann $\neg A \notin T$. Wegen: $\neg A \in T$ gdw $A \notin T$, gilt: $\neg\neg A \in T$ gdw $A \in T$. Also: Wenn $\neg\neg A \in T$, dann $A \in T$.

2), 3) und 5): Analog zu 4)

4) Wegen: $(A \rightarrow B) \in T$ gdw $\neg A \in T$ oder $B \in T$, gilt: Wenn $(A \rightarrow B) \in T$, dann $\neg A \in T$ oder $B \in T$.

Wegen: $\neg A \in T$ gdw $A \notin T$, $(A \rightarrow B) \in T$ gdw $\neg A \in T$ oder $B \in T$, gilt: $\neg(A \rightarrow B) \in T$ gdw $A \in T$ und $\neg B \in T$. Also: Wenn $\neg(A \rightarrow B) \in T$, dann $A \in T$ und $\neg B \in T$.

Also nach D13: T ist eine Hintikkamenge.

□

Metatheorem 32. Für jede Formel A sowie für jede Hintikkamenge T

gilt: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.⁸

Beweis:

Sei T eine Hintikkamenge.

Wir beweisen mit Hilfe eines Prinzips der starken vollständigen Induktion:

Für jede natürliche Zahl k gilt, dass für jede Formel A vom Grad k gilt: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

Basisbehauptung:

Für jede Formel A vom Grad 0 gilt: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

Induktionsbasis:

Sei A eine Formel vom Grad 0 und sei $A \in T$. Also: A ist atomar. Also nach D13: $\neg A \notin T$.

Schrittbehauptung:

Für jede natürliche Zahl k gilt: Wenn für jede natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq k$ gilt, dass für jede Formel A vom Grad i gilt, dass, wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$, dann gilt für jede Formel A vom Grad $k+1$, dass, wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

I) *Induktionsvoraussetzung (I.V.):*

Sei k eine natürliche Zahl und gelte für jede natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq k$, dass für jede Formel A vom Grad i gilt: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

II) *Zu zeigen ist:*

Für jede Formel A vom Grad $k+1$ gilt: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

Sei A eine Formel vom Grad $k+1$. Wenn A eine Formel vom Grad $k+1$ ist, dann trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

1. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Grad k derart, dass $A = \neg B$. Sei B vom Grad k eine solche Formel.
Sei $\neg B \in T$. Also nach Kontraposition der I.V.: $B \notin T$. Also nach D13: $\neg \neg B \notin T$. Also: $\neg A \notin T$.
2. Fall, 3. Fall und 5. Fall: Analog zum 4. Fall.

⁸Mit diesem Metatheorem könnten wir beweisen:

Für jede Formelmeng T gilt: T ist eine Wahrheitsmenge gdw T eine Hintikkamenge ist und für jede Formel A gilt, dass $\neg A \in T$ gdw $A \notin T$.

4. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Grad i sowie mindestens eine Formel C vom Grad j mit $0 \leq i, j \leq k$ derart, dass $A = (B \rightarrow C)$. Sei B vom Grad i eine solche Formel und sei C vom Grad j eine solche Formel mit $0 \leq i, j \leq k$.
 Sei $(B \rightarrow C) \in T$. Also nach D13: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.
 Fall 4.1: $\neg B \in T$. Also nach Kontraposition der I.V.: $B \notin T$. Also: $B \notin T$ oder $\neg C \notin T$.
 Fall 4.2: $C \in T$. Also nach I.V.: $\neg C \notin T$. Also: $B \notin T$ oder $\neg C \notin T$.
 Also in jedem Fall: $B \notin T$ oder $\neg C \notin T$. Also nach D13: $\neg(B \rightarrow C) \notin T$. Also: $\neg A \notin T$.

Also in jedem Fall: Wenn $A \in T$, dann $\neg A \notin T$.

□

Metatheorem 33. Zu jeder Hintikkamenge T gibt es mindestens eine Belegung β derart, dass für jede Formel A gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.⁹

Beweis:

Sei T eine Hintikkamenge.

Hilfsdefinition (HD): β sei diejenige Belegung, dass für jede atomare Formel A gilt: $\beta(A) = 1$ gdw $A \in T$.

Wir beweisen mit Hilfe eines Prinzips der starken vollständigen Induktion:

Für jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ gilt, dass für jede Formel A vom Hintikkagrad k gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

Im 4. und im 5. Fall des folgenden Beweises ist die Verwendung des Hintikkagrads von Formeln unumgänglich. Würden wir den Beweis nach dem Grad der Formel durchführen, könnte etwa folgender Fall eintreten: $gr(B \rightarrow C) = k+1$ mit $gr(B) = k$ und $gr(C) = 0$. Also: $gr(\neg B) = k+1$. Also könnten wir die I.V. nicht mehr anwenden.

Basisbehauptung:

Für jede Formel A vom Hintikkagrad 1 gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

Induktionsbasis:

Sei A eine Formel vom Hintikkagrad 1. Also: A ist atomar. Sei $A \in T$.

⁹Aufgrund von D13 können wir nicht zeigen, dass gilt:

Zu jeder Hintikkamenge T gibt es mindestens eine Belegung β derart, dass für jede Formel A gilt: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.

Nach HD gilt: $A \in T$ gdw $\beta(A) = 1$. Also nach D11: $A \in T$ gdw $\models^\beta A$.
Also: $\models^\beta A$.

Schrittbehauptung:

Für jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ gilt: Wenn für jede natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq k$ gilt, dass für jede Formel A vom Hintikkagrad i gilt, dass, wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$, dann gilt für jede Formel A vom Hintikkagrad $k+1$, dass, wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

I) *Induktionsvoraussetzung (I.V.):*

Sei k mit $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und gelte für jede natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq k$, dass für jede Formel A vom Hintikkagrad i gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

II) *Zu zeigen ist:*

Für jede Formel A vom Hintikkagrad $k+1$ gilt: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

Sei A eine Formel vom Hintikkagrad $k+1$. Wenn A eine Formel vom Hintikkagrad $k+1$ ist, dann trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

1. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Hintikkagrad i mit $1 \leq i \leq k$ derart, dass $A = \neg B$. Sei B vom Hintikkagrad i eine solche Formel mit $1 \leq i \leq k$. Wenn B vom Hintikkagrad i eine solche Formel mit $1 \leq i \leq k$ ist, dann trifft genau einer der folgenden Unterfälle zu:

1.1. Fall B ist atomar.

Also: $A = \neg B$. Sei $\neg B \in T$. Also nach D13: $B \notin T$. Also nach HD: $\beta(B) \neq 1$. Also nach D11: $\not\models^\beta B$. Also nach D11: $\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta A$.

- 1.2. Fall Es gibt mindestens eine Formel C vom Hintikkagrad i mit $1 \leq i \leq k-1$ derart, dass $B = \neg C$. Sei C vom Hintikkagrad i eine solche Formel mit $1 \leq i \leq k-1$.

Also: $A = \neg \neg C$. Sei $\neg \neg C \in T$. Also nach D13: $C \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta C$. Also nach T24: $\models^\beta \neg \neg C$. Also: $\models^\beta A$.

- 1.3. Fall Es gibt mindestens eine Formel C vom Hintikkagrad i sowie mindestens eine Formel D vom Hintikkagrad j mit $1 \leq i, j \leq k-2$ derart, dass $B = (C \wedge D)$. Sei C vom Hintikkagrad i eine solche Formel und sei D vom Hintikkagrad j eine solche Formel mit $1 \leq i, j \leq k-2$.

Also: $A = \neg(C \wedge D)$. Sei $\neg(C \wedge D) \in T$. Also nach D13: $\neg C \in T$ oder $\neg D \in T$.

Fall 1.3.1: $\neg C \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta \neg C$.¹⁰ Also nach D11: $\not\models^\beta C$. Also: $\not\models^\beta C$ oder $\not\models^\beta D$.

Fall 1.3.2: $\neg D \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta \neg D$. Also nach D11: $\not\models^\beta D$. Also: $\not\models^\beta C$ oder $\not\models^\beta D$.

Also in jedem Fall: $\not\models^\beta C$ oder $\not\models^\beta D$. Also nach D11: $\not\models^\beta (C \wedge D)$. Also nach D11: $\models^\beta \neg(C \wedge D)$. Also: $\models^\beta A$.

1.4. Fall Analog zum 1.3. Fall.

1.5. Fall Es gibt mindestens eine Formel C vom Hintikkograd i sowie mindestens eine Formel D vom Hintikkograd j mit $1 \leq i, j \leq k - 2$ derart, dass $B = (C \rightarrow D)$. Sei C vom Hintikkograd i eine solche Formel und sei D vom Hintikkograd j eine solche Formel mit $1 \leq i, j \leq k - 2$.

Also: $A = \neg(C \rightarrow D)$. Sei $\neg(C \rightarrow D) \in T$. Also nach D13: $C \in T$ und $\neg D \in T$. Also: $C \in T, \neg D \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta C, \models^\beta \neg D$. Also nach T24: $\models^\beta \neg\neg C, \models^\beta \neg D$. Also nach D11: $\not\models^\beta \neg C, \not\models^\beta D$. Also: $\not\models^\beta \neg C$ und $\not\models^\beta D$. Also nach D11: $\not\models^\beta (C \rightarrow D)$. Also nach D11: $\models^\beta \neg(C \rightarrow D)$. Also: $\models^\beta A$.

1.6. Fall Analog zum 1.5. Fall.

2. Fall, 3. Fall und 5. Fall: Analog zum 4. Fall.

4. Fall Es gibt mindestens eine Formel B vom Hintikkograd i sowie mindestens eine Formel C vom Hintikkograd j mit $1 \leq i, j \leq k - 1$ derart, dass $A = (B \rightarrow C)$. Sei B vom Hintikkograd i eine solche Formel und sei C vom Hintikkograd j eine solche Formel mit $1 \leq i, j \leq k - 1$.

Also: $A = (B \rightarrow C)$. Sei $(B \rightarrow C) \in T$. Also nach D13: $\neg B \in T$ oder $C \in T$.

Fall 4.1: $\neg B \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta \neg B$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.

Fall 4.2: $C \in T$. Also nach I.V.: $\models^\beta C$. Also: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$.

Also in jedem Fall: $\models^\beta \neg B$ oder $\models^\beta C$. Also nach D11: $\models^\beta (B \rightarrow C)$. Also: $\models^\beta A$.

Also in jedem Fall: Wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$.

□

¹⁰Da C vom Hintikkograd i mit $1 \leq i \leq k - 2$ ist, ist $\neg C$ vom Hintikkograd $i+1$ mit $1 \leq i \leq k - 1$, also maximal vom Hintikkograd $k - 1$. Also können wir die I.V. anwenden.

Metatheorem 34. Für jede Hintikkamenge T gilt: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar.

Beweis:

Sei T eine Hintikkamenge.

Nach T33 gilt: Es gibt mindestens eine Belegung β derart, dass für jede Formel A gilt, dass, wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$. Sei β eine solche Belegung. Also: Für jede Formel A gilt, dass, wenn $A \in T$, dann $\models^\beta A$. Also nach D14: $\models_1^\beta T$. Also: Es gibt mindestens eine Belegung β mit $\models_1^\beta T$. Also nach D15: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar.

□

Metatheorem 35. Für jede Hintikkamenge T gilt: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar.

Beweis:

Sei T eine Hintikkamenge.

Nach T34 gilt: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar. Also nach T30: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar.

□

Metatheorem 36. Für jede Formelmenge T gilt: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar gdw T hintikkamengensemantisch simultan erfüllbar ist.¹¹

Beweis:

Sei T eine Formelmenge.

$\Rightarrow$:

Annahme: T ist wahrheitsmengensemantisch simultan erfüllbar.

Zu zeigen: T ist hintikkamengensemantisch simultan erfüllbar.

Aus der Annahme folgt nach D16: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T mit $T \subseteq T^*$. Sei T^* eine solche Wahrheitsmenge. Also: $T \subseteq T^*$.

Weiter gilt nach T31: T^* ist eine Hintikkamenge. Also: Es gibt mindestens eine Hintikkamenge T mit $T \subseteq T$. Also nach D17: T ist hintikkamengensemantisch simultan erfüllbar.

$\Leftarrow$: Analog

□

¹¹Wir könnten mit diesem Metatheorem und T30 zeigen:

Für jede Formelmenge T gilt: T ist belegungssemantisch simultan erfüllbar gdw T hintikkamengensemantisch simultan erfüllbar ist.

6 Einige Metatheoreme über Beziehungen zwischen $\models_1, \models_2, \models_3, \models_4, \models_5$ und $\models_6$

Metatheorem 37. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: $T \models_4 A$ gdw $T \models_5 A$.

Beweis:

Sei A eine Formel und sei T eine Formelmenge.

$\Rightarrow$:

Annahme: $T \not\models_5 A$.

Zu zeigen: $T \not\models_4 A$.

Aus der Annahme folgt nach D19: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T^* mit $T \subseteq T^*$ und $A \notin T^*$. Sei T^* eine solche Wahrheitsmenge. Also: $T \subseteq T^*$ und $A \notin T^*$. Also: $A \notin T^*$. Nach T28 gilt: Es gibt mindestens eine Belegung β , sodass für jede Formel A gilt, dass $A \in T^*$ gdw $\models^\beta A$. Sei β eine solche Belegung. Also: $A \in T^*$ gdw $\models^\beta A$. Zusammen mit $A \notin T^*$ gilt: $\not\models^\beta A$. Wegen: $T \subseteq T^*$ und $A \notin T^*$, gilt: $T \subseteq T^*$. Also gilt nach ML für die Formel B : Wenn $B \in T$, dann $B \in T^*$. Annahme 2: $B \in T$. Also: $B \in T^*$. Wegen: Für jede Formel A gilt, dass $A \in T^*$ gdw $\models^\beta A$, gilt: $B \in T^*$ gdw $\models^\beta B$. Also: $\models^\beta B$. Also: Wenn $B \in T$, dann $\models^\beta B$. Also: Für jede Formel B gilt, dass, wenn $B \in T$, dann $\models^\beta B$. Also nach D14: $\models_1^\beta T$. Also: $\models_1^\beta T$ und $\not\models^\beta A$. Also: Es gibt mindestens eine Belegung β mit $\models_1^\beta T$ und $\not\models^\beta A$. Also nach D18: $T \not\models_4 A$.

$\Leftarrow$: Analog

□

Metatheorem 38. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: $T \models_5 A$ gdw $T \models_6 A$.

Beweis:

Sei A eine Formel und sei T eine Formelmenge.

$\Rightarrow$:

Annahme: $T \not\models_6 A$.

Zu zeigen: $T \not\models_5 A$.

Aus der Annahme folgt nach D20: Es gibt mindestens eine Hintikkamenge T mit $T \subseteq T$ und $\neg A \in T$. Sei T eine solche Hintikkamenge. Also: $T \subseteq T$ und $\neg A \in T$. Also: $T \subseteq T$. Nach T35 und D16 gilt: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T^* mit $T \subseteq T^*$. Sei T^* eine solche Wahrheitsmenge. Also: $T \subseteq T^*$. Zusammen mit $T \subseteq T$ gilt nach ML: $T \subseteq T^*$. Wegen: $T \subseteq T^*$ und $\neg A \in T$ gilt nach ML: $\neg A \in T^*$. Also nach D12: $A \notin T^*$. Also: $T \subseteq T^*$ und $A \notin T^*$. Also: Es gibt mindestens eine Wahrheitsmenge T^* mit $T \subseteq T^*$ und $A \notin T^*$. Also nach D19: $T \not\models_5 A$.

$\Leftarrow$: Analog mit T31

□

Trivialerweise gelten die folgenden Metatheoreme:

Metatheorem 39. Für jede Formel A sowie für jede Formelmenge T gilt: $T \models_4 A$ gdw $T \models_6 A$.

Metatheorem 40. Für jede Formel A gilt:

- (1) $\models_1 A$ gdw $\models_2 A$,
- (2) $\models_2 A$ gdw $\models_3 A$,
- (3) $\models_1 A$ gdw $\models_3 A$,
- (4) $\models_1 A$ gdw $\emptyset \models_5 A$,
- (5) $\models_1 A$ gdw $\emptyset \models_6 A$,
- (6) $\models_2 A$ gdw $\emptyset \models_4 A$,
- (7) $\models_2 A$ gdw $\emptyset \models_6 A$,
- (8) $\models_3 A$ gdw $\emptyset \models_4 A$,
- (9) $\models_3 A$ gdw $\emptyset \models_5 A$.

7 Ausblick

Wie sich gezeigt hat, ist die Wahrheitsmengensemantik gegenüber der Belegungssemantik einfacher handzuhaben und sparsamer in den verwendeten Mitteln: Bei jener benötigt man keine Wahrheitswerte, keine Belegungen, keine Induktionsbeweise. Wem diese Vorteile nicht ausreichen, der sei auf die Prädikatenlogik verwiesen.

Für prädikatenlogische Systeme können hinsichtlich der Folgerung einer geschlossenen Formel C aus einer Menge geschlossener Formeln T die Äquivalenzen zwischen der Wahrheitsmengen-, der Hintikkamengen-, der Belegungs-, der Henkininterpretations- und der ω -Interpretationssemantik gezeigt werden. Um dies auch für eine Tarskiinterpretationssemantik zeigen zu können, muss eine Einschränkung gemacht werden. Die schwächste mir bekannte Einschränkung ist, von T die Beschränktheit zu verlangen. Die Beschränktheit von T besagt, dass es abzählbar unendlich viele Gegenstandskonstanten gibt, die in keinem Element von T vorkommen. Diese Beschränkung ist angesichts dessen, dass üblicherweise akzeptiert wird, dass die Menge aller und nur der natürlichen Zahlen mit der Menge aller und nur der geraden natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, alles andere als stark.

Dass eine Einschränkung von T erforderlich ist, liegt an der Bestimmung für geschlossene Allformeln (und jener für geschlossene Existenz-

formeln) bei der Definition des Tarskimodells. Bei der Tarskiinterpretationssemantik kann auch ein überabzählbar mächtiger Gegenstandsbereich gewählt werden, obwohl lediglich abzählbar viele Gegenstandskonstanten zur Verfügung stehen. Dies ist einer philosophischen (und damit einer gründlichen) Prüfung bedürftig, da meiner Ansicht nach ein semantisches Logiksystem ausschließlich anhand semantischer Eigenschaften oder Gegebenheiten natürlicher Sprachen begründet werden kann.

*Alexander Zimmermann,
Fachbereich Philosophie
Universität Salzburg,
Franziskanergasse 1, A-5020 Salzburg.*

`<alexander.zimmermann@sbg.ac.at>`

Literatur

- [1] Kleinknecht, R. Deduktive Ableitung und deduktive Begründung. In Günther Kreuzbauer und Georg Dorn (Hrsg.), *Argumentation in Theorie und Praxis. Philosophie und Didaktik des Argumentierens*, Seiten 17–29, Wien, 2006.
- [2] Smullyan, R. M. *First-order logic*. Dover Publications, New York, 1995.