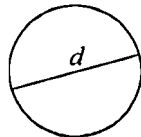


Johannes Czermak

WAS IST EIN MATHEMATISCHER BEWEIS?

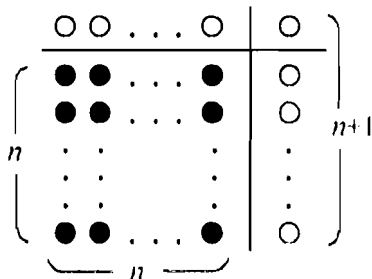
Wir befassen uns zunächst mit der Frage der Natur mathematischer Sätze und wie sie zu begründen sind.

Wir setzen den Beginn der Mathematik als theoretischer Wissenschaft mit Thales von Milet (um 600 v. Chr.) an, dem Proklos Diadochos (410–485 n. Chr.) nachsagt, er hätte als erster bewiesen, daß der Kreisdurchmesser den Kreis in zwei (gleiche) Hälften teilt:

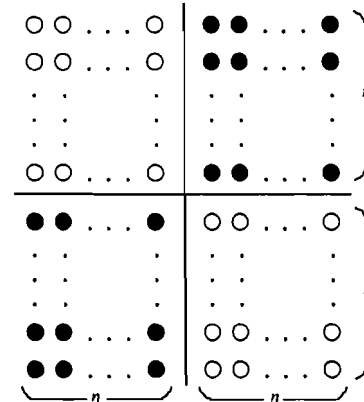


Dieser Satz ist anschaulich klar – wozu sollte man ihn dann noch beweisen? Allerdings handelt der Satz ja nicht von dem hier aufgezeichneten "Kreis", den man anschauen kann, sondern von einem idealen Objekt, das man niemals aufzeichnen kann und wo man sich nicht einfach auf die Anschauung berufen kann.

Für Pythagoras von Samos (etwa 580–500) war das Wesen der Dinge durch Zahlen und deren Verhältnisse beschrieben; so ergibt sich z.B. eine Oktav, wenn das Längenverhältnis der entsprechenden Harfensaiten 2:1 ist. Daher beschäftigten sich die Pythagoräer viel mit Zahlen (und zwar waren dies nur die "natürlichen" Zahlen 1, 2, 3,...): sie teilten diese in "gerade" und "ungerade" ein und benützten Spielsteinchen, um gewisse Gesetzmäßigkeiten zu finden. So ergibt sich z.B. die Formel $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ aus folgender Anordnung schwarzer und weißer Steinchen:



In ähnlicher Weise erkennen wir, daß $(2n)^2 = 4n^2$ ist:



Aus beiden Formeln

$$(I) \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(II) \quad (2n)^2 = 4n^2$$

ergibt sich sofort, daß

$$(III) \quad n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

$$(IV) \quad n \text{ ungerade} \Rightarrow n^2 \text{ ungerade.}$$

(Eine ungerade Zahl läßt sich in der Form $2k+1$ schreiben; es ist

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 &= (2k)^2 + 2 \cdot 2k + 1 && \text{wegen (I), mit } 2k \text{ für } n; \\ &= 4k^2 + 2 \cdot 2k + 1 && \text{wegen (II), mit } k \text{ für } n; \\ &= 2m + 1 && \text{mit } m = 2k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Da jede Zahl entweder gerade oder ungerade ist, folgt aus (III) und (IV) auch:

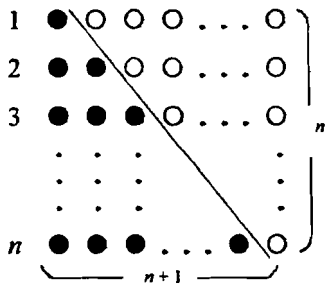
$$(V) \quad n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade}$$

$$(VI) \quad n^2 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade.}$$

Ein weiteres Gesetz ist das folgende:

$$(VII) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir legen zunächst $1 + 2 + \dots + n$ schwarze Steinchen in Form eines Dreiecks auf und ergänzen es durch weiße zu einem Rechteck.



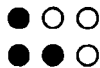
Das Rechteck enthält $n(n+1)$ Steinchen, von denen die schwarzen gerade die Hälfte ausmachen; somit gilt (VII). Aber ist das ein Beweis? Wir können ja nicht für jede natürliche Zahl n ein solches Rechteck legen. Beginnen wir aber zunächst einmal mit $n = 1$:



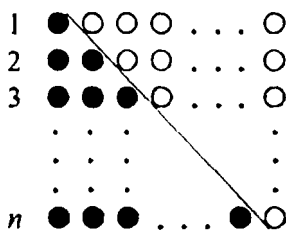
Wir fügen nun zwei weitere schwarze Steinchen unten an



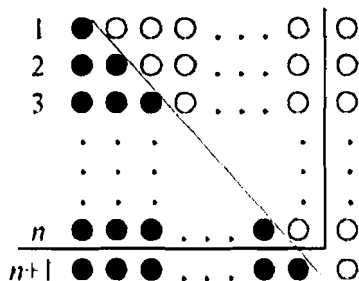
und setzen dann rechts zwei weiße dazu:



Wir können dieses Verfahren offenbar beliebig oft fortsetzen; haben wir schon $1 + 2 + \dots + n$ schwarze Steinchen im Dreieck gelegt und durch weiße zu einem Rechteck mit $n(n+1)$ Steinchen ergänzt



so fügen wir zunächst unten $n+1$ schwarze und rechts $n+1$ weiße Steinchen an:



Das Rechteck enthält nun $(n+1)(n+2)$ Steinchen, die Hälfte davon ist schwarz; es gilt also

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Diese Formel erhalten wir, wenn wir in (VII) von n zu $n+1$ übergehen. Wir haben zunächst gesehen, daß die Formel für $n = 1$ gilt, und dann ein Verfahren angegeben, das uns den folgenden Schluß gestattet:

Gilt die Formel für n , dann auch für $n+1$. Die Formel muß also auch für $n = 2$, somit für $n = 3$, daher für $n = 4$ usw. gelten. Wir haben aber immer noch als anschauliches Element Spielsteinchen benützt, doch können wir den Beweis von (VII) auch "abstrakt" führen.

Wir zeigen zunächst, daß die Formel für $n = 1$ gilt:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Angenommen, die Formel gelte für n , d.h.:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir fügen auf beiden Seiten der Gleichung $n+1$ hinzu:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Nun ist

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

daher

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Wir haben somit gezeigt:

Die Formel gilt für $n = 1$;

Gilt die Formel für n , dann auch für $n+1$.

Wir schließen hieraus durch "vollständige Induktion", daß die Formel für jede natürliche Zahl gelten muß. (Anschaulich: Erreicht man die erste Sprosse einer Leiter und erreicht man mit jeder Sprosse auch die nächste, so erreicht man schließlich jede Sprosse.)

Woher wissen wir aber, daß dieses Prinzip "wahr" ist? Wir gehen einfach davon aus, daß

die natürlichen Zahlen gerade so beschaffen sind. In unserem Beweis haben wir auch noch andere Eigenschaften natürlicher Zahlen benutzt (z.B., als wir auf gleichen Nenner gebracht und "herausgehoben" haben), aber auch allgemeinere "logische" Gesetze (wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung Gleiches hinzufügt, bleibt die Gleichung bestehen; was einem dritten gleich ist, ist untereinander gleich usw.).

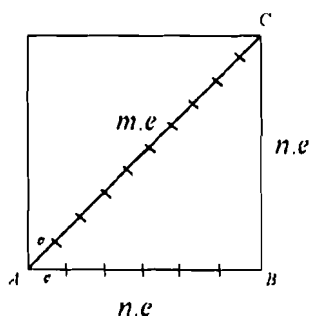
Wir benutzen im weiteren folgende "logische" Zeichen (fassen Sie diese zunächst als Abkürzungen auf):

$\neg$ für "nicht"	$\Rightarrow$ für "impliziert"
$\wedge$ für "und"	$\exists$ für "es gibt"
$\vee$ für "oder"	$\forall$ für "alle"

Schreiben wir $A(n)$ für "A gilt für die Zahl n ", so können wir das Prinzip der vollständigen Induktion wie folgt formulieren:

$$A(1) \wedge \forall n(A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow \forall n A(n)$$

Kehren wir nun zu Pythagoras und seiner Philosophenschule in Kroton (Süditalien) zurück! Will man die Welt mit Zahlenverhältnissen beschreiben, ist es naheliegend, mit einfachen geometrischen Gebilden anzufangen. In welchem Verhältnis z.B. steht die Länge der Diagonale im Quadrat zur Länge der Seite? Wir wählen eine Einheitsstrecke e , sodaß die Diagonale $m \cdot e$, die Seite $n \cdot e$ lang ist (wobei m und n natürliche Zahlen sind), und zwar sei e die größte Einheitsstrecke, mit der man in dieser Weise die Diagonale und die Seite messen kann:



Nun bilden A , B und C' ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Quadratdiagonale als Hypotenuse und den beiden Quadratseiten AB und BC'

als Katheten. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2$$

Somit ist m^2 gerade, wegen (V) auch m , also $m = 2k$. Mit (II) folgt

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2$$

Daher ist $2k^2 = n^2$, also n^2 gerade, wegen (V) auch n . Somit sind m und n beide gerade; d.h. aber, daß e nicht größtmöglich gewählt war – wir hätten auch $2e$ nehmen können. (Die Überlegung ließe sich dann wiederholen: es ginge dann auch mit $4e$, weiter auch mit $8e$ usw., irgendwann würde die Einheitsstrecke größer als die Quadratseite sein!) Hieraus folgt, daß es keine Einheitsstrecke geben kann, mit deren Hilfe man das Längenverhältnis von Diagonale und Seite im Quadrat durch ein Zahlenverhältnis $m:n$ ausdrücken kann. Angeblich wurde Hippasos von Metapont, der im 5. Jh. v. Chr. die Pythagoräer mit einer solchen Tatsache konfrontierte, deshalb ins Meer geworfen. Was bedeutet dieser Sachverhalt für uns?

Verhältnisse von natürlichen Zahlen nennen wir heute "rationale Zahlen", wir schreiben sie gerne in Form von Brüchen ($\frac{m}{n}$ statt $m:n$). Was zeigt der obige Beweis uns dann? Angenommen, es gibt eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$, deren Quadrat 2 ist:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Wir können annehmen, daß man in dem Bruch $\frac{m}{n}$ nichts mehr kürzen kann (m und n haben außer 1 keinen gemeinsamen Teiler). Es gilt dann:

$$m^2 = 2n^2$$

Wir argumentieren nun genauso wie vorhin: es muß m gerade sein, schließlich auch n , d.h. m und n haben den gemeinsamen Teiler 2 im Widerspruch zur Voraussetzung! Es folgt, daß es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist – wir sind versucht, zu sagen:

" $\sqrt{2}$ ist irrational".

PYTHAGORAS (*kopfschüttelnd*): Sagen sie mir, was bedeutet eigentlich $\sqrt{2}$? Dadurch, daß man ein Symbol einführt und damit umgeht, kommt die Bedeutung doch nicht alleine her.

J.C.: Man merkt, daß Sie schon lange tot sind. Jeder Taschenrechner heute liefert ihnen einen mehr oder weniger genauen Wert für $\sqrt{2}$, meiner z.B. 1,4142135. Man kann $\sqrt{2}$ so genau bestimmen, wie man will, nur halt nicht ganz genau.

PYTHAGORAS: Ich weiß immer noch nicht, was $\sqrt{2}$ sein soll. Ist es bloß eine Methode, die Diagonale des Quadrats näherungsweise zu bestimmen, so hat dies doch nichts in der reinen Mathematik verloren. Ich kenne Zahlen und ihre Verhältnisse, Strecken und ihre Verhältnisse, Flächen und ihre Verhältnisse; manchen Strecken- bzw. Flächenverhältnissen entsprechen Zahlenverhältnisse, manchen anderen aber nicht, wie Hippasos zu unserem Leidwesen gezeigt hat. Ich sehe nicht ein, wie man das Problem dadurch lösen kann, daß man irgendwelche Symbole einführt und dann so tut, als hätte jedes Streckenverhältnis auch ein Zahlenverhältnis.

EUDOXOS (4. Jh. v. Chr.) *mischt sich ins Gespräch*: Aus der Existenz von Strecken, deren Längenverhältnis kein Zahlenverhältnis entspricht, die also nicht zugleich mit einer Einheitsstrecke genau gemessen werden können und daher "inkommensurabel" heißen mögen, ist zu schließen, daß die Geometrie allgemeiner und inhaltsreicher ist als die Lehre von den Zahlen. Forschungsprojekte auf dem Gebiet der Geometrie sind daher besonders zu fördern. Übrigens hat neuerdings Euklid eine elegante und systematische Zusammenfassung unseres mathematischen Wissens in seinen "Elementen" gegeben und darin auch meine Idee, wie man die Verhältnisse von je zwei inkommensurablen Strecken miteinander Vergleichen und damit Mathematik betreiben kann, ausführlich dargestellt und entwickelt; wie so oft in unserer Wissenschaft läßt sich auch in diesem Fall eine einfache Idee nur etwas umständlich formulieren, wenn man die erforderliche Genauigkeit an den Tag legt.

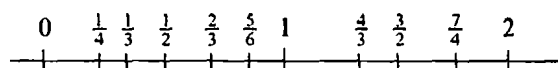
DESCARTES (1596–1650): Ihr Griechen seid wirklich einfach zu penibel. Was hindert uns daran, mit $\sqrt{2}$ zu rechnen? Man kann sich darunter ja die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat vorstellen und sinnvollerweise

$$(\sqrt{2})^2 = 2, \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2}, \dots$$

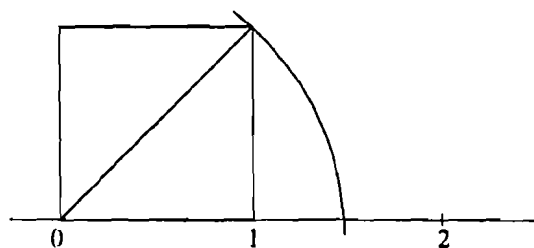
schreiben. Es hat wirklich einen großen Vorteil, $\sqrt{2}$ und ähnliche Objekte einzuführen. Hat man eine Gerade und fixiert man auf ihr einen Punkt "0", wählt man eine Einheitsstrecke und trägt sie von 0 aus nach rechts ab, so sei dem rechten Endpunkt dieser Strecke die Zahl 1 zugeordnet:



Man kann nun allen Punkten, die man durch entsprechend häufiges Abtragen der Einheitsstrecke erhält, der Reihe nach die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, ... zuordnen; jeder Zahl entspricht dann ein solcher Punkt. Den Punkten, die man durch Teilen der Einheitsstrecke und ihrer Vielfachen erhält, werden dann Zahlenverhältnisse, mit denen man ja auch wie mit Zahlen rechnen kann und die daher "rationale Zahlen" heißen mögen, zugeordnet:



Nun stört es hier natürlich, daß da Löcher bleiben, denn wenn man die Diagonale des Einheitsquadrats von 0 aus abträgt, entspricht dem Punkt eben keine rationale Zahl:



Ich setze nun einfach voraus, daß auch diesem Punkt eine Zahl entspricht, und nenne sie $\sqrt{2}$. Ähnlich mache ich es mit allen anderen Punkten rechts von 0, die noch keine rationale Zahl zugeordnet bekommen haben. Auf diese Weise kann ich dann alle geometrischen Gesetze mithilfe solcher Zahlen wieder arithmetisch ausdrücken:

die Lehre von den Zahlen wird dadurch wieder allgemeiner als die Geometrie.

PYTHAGORAS und EUDOXOS, *beide sich entsetzt abwendend und wie aus einem Munde*: Nie und nimmer verschafft man Dingen dadurch Existenz, daß man irgendwelche Namen und Symbole erfindet!

Isaac NEWTON (1643–1726), *eilt herbei*: He Pythagoras, bleib da! Siehst du denn nicht, daß sich damit dein Programm, die Welt mir Zahlen zu beschreiben, verwirklichen läßt? Mit meiner Physik habe ich schon den Anfang gemacht, und ich bin überzeugt, daß uns die Zukunft eine weitgehende Mathematisierung unserer Welt bringen wird!

PYTHAGORAS *zögert, doch* EUDOXOS *wendet verdächtlich ein*: Du nennst das, was du mit deinen Fluxionen und "letzten Verhältnissen" treibst, Mathematik! (*Anmerkung: Die von Newton für seine Physik und von Leibniz entwickelte Infinitesimalrechnung stand bis ins vorige Jahrhundert auf sehr wackeligen Beinen, schon Bischof Berkeley (1685–1753) sprach von Newtons Fluxionen als "ghosts of departed quantities" und meinte: "All das scheint eine sehr widerspruchsvolle Art von Argumentation zu sein, wie sie in der Theologie nicht erlaubt wäre."*)

Richard DEDEKIND (1831–1916) *tritt hinzu*: Meine Herren, was soll der ganze Streit? Wenn man sich die Lehre des Eudoxos, die uns Euklid überliefert hat, ansieht, bemerkt man, daß die dortigen "Proportionen" ziemlich genau den "Schnitten", deren Namen zu tragen ich die Ehre habe, entsprechen, und diese Dedekindschen Schnitte stellen eine, auch nach griechischen Maßstäben einwandfreie, mathematische Konstruktion eben der "reellen Zahlen", die Descartes den Punkten der "Zahlengeraden" zugeordnet hat und mit denen man schon seit Jahrhunderten erfolgreich, wenn auch ohne feste Grundlage, gerechnet hat, dar.

PYTHAGORAS *lächelt versonnen*.

Aber auch Dedekinds Konstruktion beruht auf problematischen Voraussetzungen – diese sind allerdings weniger mathematischer, sondern

eher philosophischer Natur.

Wir haben uns scheinbar von der Frage, was ein mathematischer Beweis ist, weit entfernt; vielleicht erhalten wir bei *Euklid*, dessen *Elemente* das wohl einflußreichste Buch der Mathematikgeschichte darstellen und wesentlich zum Ruf der Mathematik als Muster einer strengen, unbezweifelbaren Wissenschaft beigetragen haben ("more geometrico"), einen Hinweis.

Man setzt die Lebenszeit des Euklid nach Angaben von Proklos Diadochos, z.T. aufgrund der folgenden Anekdote, um etwa 300 v. Chr. an.

Ptolemaios I. (Regierungszeit 323–283) soll Euklid einmal nach einem kürzeren Weg zur Geometrie als dem durch die "Elemente" gefragt haben, worauf Euklid angeblich antwortete, zur Geometrie gäbe es keinen Königsweg.

Zu Euklids Vorgangsweise ist zu sagen, daß viele seiner Definitionen (vor allem die ersten) eigentlich nur Erklärungsversuche darstellen (wie etwa "Ein Punkt ist, was keine Teile hat"), die im weiteren Aufbau keine Rolle spielen. Der Kreis allerdings wird bereits im wesentlichen definiert als Menge von Punkten, die von einem gegebenen Punkt (dem Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben. Dann gibt Euklid gewisse Grundannahmen an (die er "Postulate" und "Axiome" nennt – die Unterscheidung ist für uns irrelevant, wir bezeichnen hinfort alle als "Axiome"), z.B.

(Ax1) Man kann von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen.

(Ax2) Man kann mit jedem Punkt als Mittelpunkt und jedem Abstand als Radius den Kreis zeichnen.

(Ax3) Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.

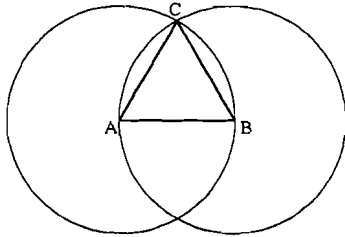
Von solchen Axiomen ausgehend versucht Euklid, durch logische Schlüsse die damals bekannten geometrischen Sätze zu beweisen.

Sein erster Satz ist:

Man kann über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Beweis: Die gegebene Strecke sei AB. Mit A als Mittelpunkt und AB als Radius zeichne man einen Kreis (Ax2), ebenso mit B als Mittelpunkt

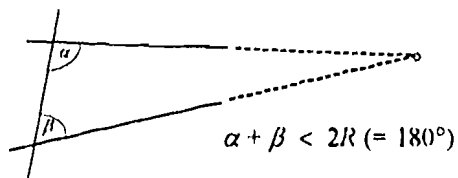
und BA als Radius einen weiteren Kreis. Vom Schnittpunkt C der beiden Kreise ziehe man die Strecken CA und CB (Ax1). Da C und B auf dem Kreis mit Mittelpunkt A liegen, ist $CA = AB$ (Definition des Kreises), ebenso ist $CB = BA$. Gemäß (Ax3) ist dann auch $CA = CB$. D.h., es bilden A, B und C ein gleichseitiges Dreieck.



Woher aber wissen wir, daß die beiden Kreise sich überhaupt schneiden? Sicherlich, dies ist anschaulich klar; aber aufgrund welchen Axioms kann ich *schließen*, daß es den Schnittpunkt C gibt? Die Anschauung ist zwar unentbehrlich für das Auffinden und das Verstehen eines mathematischen Beweises – im Beweis selbst aber hat sie nicht zu suchen! Sie stellt dort eine Fehlerquelle dar, die oft stillschweigende Voraussetzungen verdeckt. Dies zeigt auch die Geschichte des sogenannten *Parallelenaxioms*, das Euklid wie folgt formuliert:

Bewirkt eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien, daß die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, so treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Um diese Aussage besser verstehen zu können, ist es zweckmäßig, sich eine Zeichnung zu machen:



Euklid benützt dieses Axiom erst im Beweis des 29. Satzes; die relativ komplizierte Formulierung (vergleichen Sie diese mit (Ax1) bis

(Ax3)!) erzeugte bei vielen späteren Mathematikern das Bedürfnis, auch dieses Axiom auf die anderen einfacheren logisch zurückzuführen, und in den auf Euklid folgenden 2000 Jahren gab es zahlreiche Beweisversuche – allerdings keinen Beweis, da immer irgendeine versteckte Voraussetzung, die ihrerseits mit dem Parallelaxiom äquivalent ist, benützt wurde, z.B.

Sind in einem Viereck drei Winkel rechte, so ist es auch der vierte.

Oder:

Zu einer Geraden kann man durch einen (nicht auf ihr liegenden) Punkt genau eine Parallele ziehen.

Man zweifelte nicht daran, daß das Parallelaxiom *wahr* ist; deshalb kam die Idee, es mit einem indirekten Beweis zu versuchen, erst relativ spät.

1733 nahm G. Saccheri (1667–1733) an, es gebe ein Viereck mit drei rechten Winkeln, in dem der vierte stumpf oder spitz ist:



$\alpha > R$ oder $\alpha < R$.

Es gelang ihm, die "Hypothese des stumpfen Winkels" auf einen Widerspruch zu führen, und er glaubte, ihm sei dies auch bei der "Hypothese des spitzen Winkels" gelungen – doch hier irrte er. Aber er hat auf seinem Wege geometrische Sätze abgeleitet, die "offensichtlich" falsch, genauer: die mit der Anschauung nicht vereinbar waren.

Im ersten Drittel des 19. Jh. machten sich schließlich C. F. Gauß (1777–1855), N. I. Lobatschewskij (1793–1856) und J. Bolyai (1802–1860) mit dem Gedanken vertraut, daß es eine widerspruchsfreie Geometrie gebe, in der das Parallelaxiom "falsch" ist, und entwickelten eine in diesem Sinn nichteuklidische Geometrie, in der dann z.B. die Winkelsumme im Dreieck im allgemeinen nicht 180° ist. (Angeblich versuchte Gauß anläßlich einer Landvermessung, die Winkelsumme in einem großen, von Berggipfeln gebildeten Dreieck nachzumessen; seine

Überlegungen zur nichteuklidischen Geometrie hat er aus Angst vor dem "Geschrei der Bötter" nicht veröffentlicht.

1871 bewies F. Klein (1849–1925), daß, wenn die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist (woran niemand zweifelte), es auch diese nichteuklidische ist. Dann kam die moderne Physik und reklamierte für den physikalischen Raum eine nichteuklidische Geometrie, und schließlich wiesen die Psychologen nach, daß der Raum, den wir mit den verschiedenen Sinnen wahrnehmen, kein euklidischer Raum ist. In welchem Sinne aber können dann die Axiome der euklidischen Geometrie *wahr* sein? Wo und in welchem Sinn *gibt* es einen euklidischen Raum? Kant hatte die geometrischen Sätze noch als "synthetische a priori" eingestuft!

Euklid hat noch einige Axiome "vergessen" (z.B. solche, die den Schnittpunkt der beide Kreise im ersten Beweis sichern); D. Hilbert (1862–1943), einer der größten Mathematiker seiner Zeit, schrieb 1899 ein Büchlein "Grundlagen der Geometrie", in dem er einer vollständigen Liste von Axiomen folgende "Erklärung" (die wir hier etwas vereinfachen) vorausschickt:

Wir denken zwei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte*, die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Geraden* [...]. Wir denken die Punkte und Geraden in gewissen Beziehungen und bezeichnen diese durch Worte wie "liegen", "zwischen", "kongruent", "parallel", "stetig"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome* der Geometrie.

Solche Axiome sind z.B.:

Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es genau eine Gerade AB , auf der die beiden Punkte liegen.

Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es stets einen dritten, der zwischen diesen beiden auf der Gerade AB liegt.

Natürlich stellen wir uns unter Punkten und Geraden etwas vor; die Anschauung aber hat nur die Funktion eines Gerüsts, das man entfernt,

wenn das Haus fertig ist. Man könnte statt "Punkte" und "Geraden" auch "Bierseidel" und "Biertische" sagen, wie Hilbert es einmal drastisch formuliert hat. Wir können uns aber auch unter Punkten Zahlenpaare, unter Geraden lineare Gleichungen vorstellen; daß der Punkt (α, β) auf der Geraden $ax + by + c = 0$ liegt, soll bedeuten, daß (α, β) eine Lösung dieser linearen Gleichung ist (also $a\alpha + b\beta + c = 0$). Mit dieser Interpretation betreiben wir "*analytische Geometrie*", die Axiome gehen in wahre "arithmetische" Sätze über. (Das ist im Prinzip wohl das Programm von Descartes.) Die Frage der Widerspruchsfreiheit der (euklidischen) Geometrie wird dann zurückgeführt auf die Frage der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik, an der wahrscheinlich auch kaum jemand zweifelt. (Es scheint auch eine Zeit gegeben zu haben, in der niemand daran zweifelte, daß die Erde flach ist.)

Ziehen wir eine erste Zwischenbilanz:

Mathematische Beweise werden geführt, indem man mathematische Sätze mittels logischer Schlüsse aus gewissen Axiomen ableitet. Diese Axiome sind im allgemeinen *nicht* "evidente Aussagen, die keines weiteren Beweises bedürfen", sondern einfach Grundannahmen, über deren Wahrheit oder Falschheit erst gesprochen werden kann, wenn die in ihnen vorkommenden Ausdrücke in einem bestimmten Bereich interpretiert werden (wie etwa "Punkt" als Zahlenpaar); die "Wahrheitsfrage" hat zunächst nichts damit zu tun, ob ein Beweis korrekt ist (d.h., ob überhaupt ein Beweis vorliegt) – die zu verwendenden logischen Schlußregeln gewährleisten lediglich, daß, *wenn* die Axiome bei einer geeigneten Interpretation in wahre Aussagen übergehen, dies auch die abgeleiteten Sätze tun. Nur selten wird ein Beweis allerdings vollständig aufgeschrieben als Folge von Sätzen, von denen jeder entweder ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Sätzen der Folge mithilfe eines logischen Schlusses folgt; es genügt, wenn für den Leser ersichtlich ist, wie die Beweisskizze in einen vollständigen Beweis zu verwandeln ist. Allerdings haben wir noch nicht erklärt, was ein

logischer Schluß ist; wir werden dies andeutungsweise im nächsten Beitrag ("Beziehungen zwischen Logik, Mathematik und Philosophie")

beim Aufbau eines Axiomensystems für die Arithmetik tun.