Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

Im Internet finde ich ja meist nur, was ich suche. In der Zeitung finde ich Dinge, von denen ich gar nicht wusste, dass sie mich interessieren.

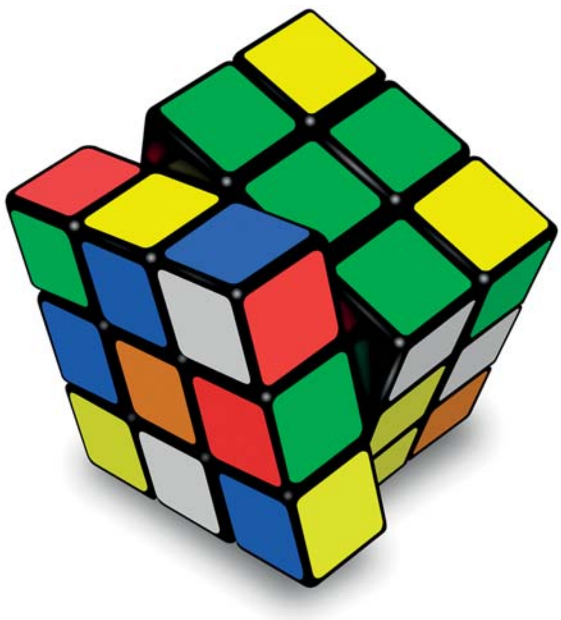
Michael Ringier, Herausgeber der Schweizer Boulevardzeitung „Blick“, im September 2007

Einfach verdiente Millionen

Was Mathematikinteressierte im Internet suchen und finden? Glaubt man den Artikelcharts der Wikipedia, dann war es im Dezember der *Zauberwürfel* mit rekordverdächtigen 367 000 Aufrufen. Der Grund dafür ist offensichtlich: RTL mit der einfachsten Millionenfrage seit es *Wer wird Millionär?* gibt.

> Aus insgesamt wie vielen Steinchen besteht der klassische von Ernö Rubik erfundene Zauberwürfel?
> A: 22; B: 24; C: 26; D: 28.

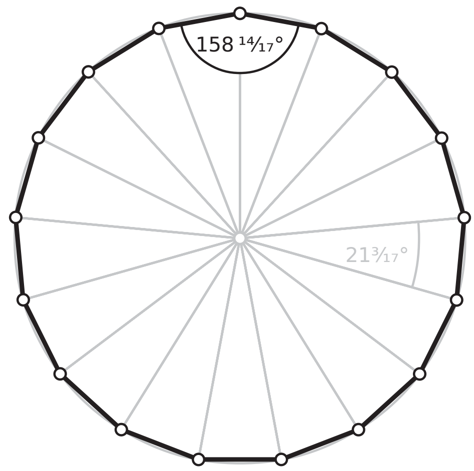
Schwieriger wäre es gewesen mit 20 oder 27 als Antwortmöglichkeit, denn dann hätte der Kandidat die Definition von *Steinchen* zu klären gehabt.
Im Januar sollte es die Million dann schon für die Division von 234 567 durch Neun geben – aber das war wohl nur ein Blackout des Moderators.



(Abbildung: Booyabazooka, CC BY-SA 3.0)

Angewandte Galois-Theorie im Tatort

Doch selbst im Fernsehen hat es immer wieder mal Mathematik für Fortgeschrittene. So am 9. November, bei Minute 26:45 im Münster-Tatort *Schwanensee*: Das autistische Zahlengenie schaut auf des Kommissars T-Shirt und erkennt auf Anhieb das dort abgebildete 65 537-Eck.



Das ist nur das 17-Eck (László Németh, CC0 1.0)

Welcher Mathematiker hat dort beraten und wie kam er auf 65 537? Die erste Frage vermögen wir nicht zu beantworten, die zweite aber schon: 65 537 ist die größte bekannte Primzahl der Form $2^{2^k}+1$, vulgo *Fermatsche Primzahl*. Und seit den *Disquisitiones Arithmeticae* wissen wir, dass ein regelmäßiges *n*-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn *n* das Produkt einer Zweierpotenz mit unterschiedlichen Fermatschen Primzahlen ist. Das regelmäßige 65 537-Eck ist also mit Zirkel und Lineal konstruierbar und es gab wirklichlich mal einen Mathematiklehrer aus dem damaligen Königsberg, der im 19. Jahrhundert diese Konstruktion in 10-jähriger Arbeit durchgerechnet und in einem 221 Seiten dicken Papierstoß der Nachwelt hinterlassen hat. Das Werk wird im Mathematischen Institut der Göttinger Universität aufbewahrt. Eine wahrscheinlich einfachere Konstruktion des regelmäßigen 65 537-Ecks findet sich in *Duane DeTemple: Carlyle circles and the Lemoine simplicity of polygon constructions* aus dem Jahr 1991.

Hatte der Kommissar nun wirklich ein 65 537-Eck auf dem Shirt? Man kann recht einfach überschlagen, wie groß ein Bildschirm mindestens sein muss um ein 65 537-Eck komplett darzustellen: Wenn jede Ecke durch einen

DOI 10.1515/dmvm-2016-0017

Pixel dargestellt wird und wir vereinfachend die Umfangsformel für den Kreis, der das regelmäßige 65 537-Eck ja näherungsweise ist, ansetzen, so erhalten wir für den Kreisradius $r \geq \frac{65537}{2\pi} > 10430$ Pixel. Wir brauchen also einen Bildschirm mit mindestens $2r \times 2r > 435.223.044$ Pixeln. Zum Vergleich: Ein 4K-Bildschirm (vierfache HDTV-Auflösung) hat nur $3840 \times 2160 = 8.294.400$ Pixel, man bräuchte also 53 davon. Und für das T-Shirt: Bei einer Druckqualität von 300 dpi (dots per inch) ist $r = 34.77$ inch = 88,31 cm. Die Vorderseite des Kommissars sollte also wenigstens 176,62 cm breit sein. (Diese Berechnungen verdanke ich einem Kommentar von Leser *Frakturfreund* im Mathlog.)

Kontroversen

In mathematischen Blogs leidenschaftlich und kontrovers diskutiert wurde in den vergangenen Monaten der Status der *abc-Vermutung* „Gibt es eine Zahlentheorie nach dem Langlands-Programm?". Sogar im SPIEGEL wurde die Debatte aufgegriffen, „Todeszone der Mathematik", hieß die Glosse; Untertitel: „Die Hexenmeister der Zahlen verstehen ihr eigenes Fach nicht mehr".

> Wie soll die Zunft je herausfinden, ob der Beweis funktioniert? Fachleute vermuten, dass in solchen Fällen bald der Computer die Prüfung übernehmen muss. Ein bisschen traurig ist das schon. Ehedem erklommen die Mathematiker ohne Hilfsmittel, nur mit Geisteskraft, die schwindelnden Höhen umeigentlicher Integrale und fraktaler Minkowski-Würste. Sie waren die Extremkletterer der Wissenschaft. Und nun, in der Todeszone der Mathematik, müssen auch sie zum Sauerstoffgerät greifen.

Fraktale Minkowski-Würste gibt es wirklich, ich musste das auch erst googeln. Aber wer glaubt an eine zeitnahe automatische Verifikation von Mochizukis Beweis? Einen aktuellen Überblick zum Stand der Vermutung findet man übrigens auf http://mathbabe.org/2015/12/15/notes-on-the-oxford-iut-workshop-by-brian-conrad/.

Mathematik-Olympiaden

Aufgaben aus aktuellen Mathe-Olympiaden sind ein häufiges Thema in *Tanya Khovanova's Math Blog*. Vor einigen Wochen fand ich dort die folgende von der letzten All-Russischen Mathematik-Olympiade.

> Sei das Schlachtfeld ein aus quadratischen Zellen zusammengesetztes 41×41-Quadrat. In einer der Zellen sei ein getarnter Panzer verborgen. Ein Pilot schießt auf eine einzelne Zelle. Zwei Treffer sind erforderlich, um den Panzer zu zerstören. Unmittelbar nach einem Treffer wird sich der Panzer auf eine der vier benachbarten Zellen bewegen ohne dabei die Tarnung aufzugeben. Andernfalls wird sich der Panzer nicht bewegen. Bestimme die kleinste Anzahl von Schüssen, die benötigt wird, um den Panzer sicher zu zerstören!

Zerstörter russischer Panzer im Irak (Foto: US Army/Wikimedia Commons/Public domain)

Mathematisch eine sehr schöne Aufgabe. Und metamathematisch wohl ein Beweis für die *unreasonable effectiveness of mathematics*. Passend dazu auch diese ältere Aufgabe aus dem Jahr 2012.

> 101 weise Männer stehen im Kreis. Jeder von ihnen denkt entweder, dass die Erde Jupiter umkreist oder dass Jupiter die Erde umkreist. Einmal pro Minute äußern alle Weisen gleichzeitig ihre Meinung. Unmittelbar danach ändert jeder Weise, der zwischen zwei Weisen mit der anderen Meinung steht, selbst seine Meinung. Der Rest bleibt bei seiner Meinung. Beweisen Sie, dass ab einem bestimmten Zeitpunkt niemand mehr seine Meinung ändern muss!

Blogs und Signaturen

Einen Überblick über mathematische (wissenschaftliche wie auch populärwissenschaftliche) Blogs erhält man auf der Seite *mathblogging.org*. Und wer französisch liest, dem sei die vom CNRS betriebene Seite *Images des Mathèmatiques* auf http://images.math.cnrs.fr empfohlen.

Auch auf dem ArXiv finden sich gelegentlich im Stile von Blogs geschriebene Arbeiten, im Januar zum Beispiel *Signatures in algebra, topology and dynamics* mit einer leicht geschriebenen Einführung in die Klassifikation quadratischer Formen, die man gerne schon als Erstsemester so gehört hätte, einem breiten – und sicher immer noch nicht vollständigen – Überblick über die Rolle quadratischer Formen und ihrer Signaturen in sehr unterschiedlichen Gebieten der heutigen Forschung von Differentialtoplogie bis symplektischer Dynamik, und mit streitbaren Kommentaren zum Beispiel zur Bedeutung des Satzes von Sturm, der die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem gegebenen Intervall berechnet.

> Many contemporary mathematicians have forgotten the numerical aspect of theoretical algebra. If a polynomial with real coefficients is given, how can one determine in practice its roots with a given accuracy? Modern computers give us the feeling that it suffices to type the command *Solve* $P(x) = 0$" to get an immediate answer. As a matter of fact, treatises on Algebra, at least until the end of the nineteenth century, gave a strong emphasis on this numerical problem. For instance, the classical *Cours d'algèbre supérieure*, by J.A. Serret, dated 1877, is one of the first textbooks with a thorough presentation of Galois theory. It contains several chapters on the numerical aspect and splits the topics in two distinct problems. The first is the separation of roots: one has to count the number of roots in a given interval, in order to locate intervals containing a single root. The second consists of various numerical methods enabling to shrink such an interval to any desirable length. Concerning the separation problem, there is no doubt that the most impressive theorem is due to Sturm. Amazingly, one of the *most brilliant discoveries in Analysis* is only familiar today to a very tiny minority of mathematicians.

Wie mir gesagt wurde, sind aber auf dem Satz von Sturm aufbauende Verfahren in Computeralgebrasystemen überall implementiert.

Jubiläum

Ihren fünfzehnten Geburtstag feierte am 15. Januar die Online-Enzyklopädie Wikipedia. Gelegenheit darauf hinzuweisen, wie viel noch zu tun ist: In Artikeln zu statistischen Verfahren fehlen oft die mathematischen Grundlagen; manche Artikel zur mathematischen Logik scheinen aus veralteten Lehrbüchern zu stammen; man kann immer noch keine kommutativen Diagramm zeichnen, also auch nichts zur Homotopietheorie von Diagrammen schreiben, und und und …

Wenn bei Jauch nicht gerade nach dem Zauberwürfel gefragt wird, sind übrigens *Sinus und Kosinus* und *Standardabweichung* die meistgelesenen Artikel.

Dr. Thilo Kuessner, Korea Institute for Advanced Study,
85 Hoegi-ro, Dongdaemun-gu, 130-722 Seoul, Korea
kuessner@kias.re.kr

Thilo Kuessner forscht am Korea Institute for Advanced Study zur Topologie und Geometrie niedrig-dimensionaler Mannifaltigkeiten. In dieser Kolumne zweitverwertet er seine Beiträge aus dem Mathlog: http://scienceblogs.de/mathlog/

„Logbuch Mathematik" wird ab dieser Ausgabe regelmäßiger Bestandteil der Mitteilungen *sein und löst „Mathematik im Alltag" von Günter M. Ziegler ab.*