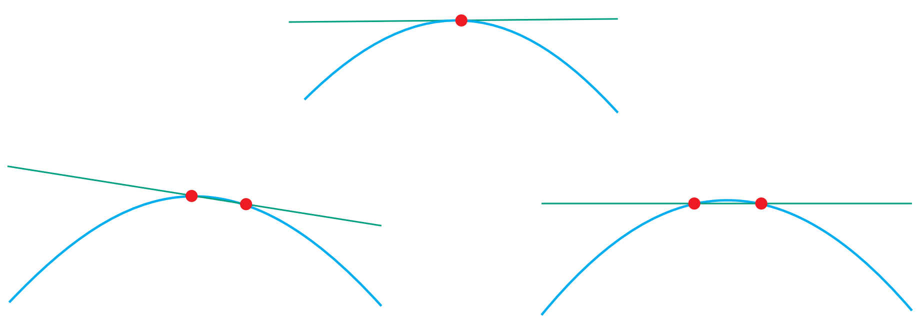
Von Descartes zu einem neuen Zugang zur Differentialrechnung und Analysis

R. Michael Range

Die Differentialrechnung wurde vor über 300 Jahren entwickelt und bildet seither das Fundament für die Analysis und für die Naturwissenschaften. In den letzten Jahrzehnten ist der Anwendungsbreich breiter geworden, und Differential- und Integralrechnung sind heute ein wichtiges Hilfsmittel in vielen anderen Disziplinen. Bei einer wachsenden und zunehmend heterogenen Studentenschaft traten viele Schwierigkeiten mit der traditionellen Einführung in die Differentialrechnung zutage. Dies führte zu weitreichenden Diskussionen und Versuchen, die Lehrmethoden und das Verständnis der Inhalte zu verbessern (siehe z. B. [KlRo].) Trotzdem hat sich die wesentliche *Struktur* der Einführung kaum geändert. Zwar hat es *formale* Neuigkeiten gegeben, und grafische und numerische Methoden – unterstützt durch neue Technologien – sind heute viel weiter verbreitet, aber Tangenten und Ableitungen werden weiterhin von Anfang an durch die klassische Approximationsmethode eingeführt, welche letztlich eine Version des Grenzwertbegriffes beinhaltet. Dies erfordert zunächst ein Studium dieses neuen Begriffes und allem, was damit zusammenhängt, ehe man fortschreiten kann. Auch wenn in intuitiver und nichttechnischer Form behandelt, sind diese Begriffe eine hohe Hürde für die Mehrheit unserer heutigen Studenten. Natürlich können Grenzwerte und unendliche Prozesse nicht vermieden werden; sie stehen im Mittelpunkt der Analysis, und sie sind das, was die Analysis von der Algebra unterscheidet. *Aber sind sie wirklich gleich am Anfang nötig?*

Der Begriff des Grenzwerts ist ein subtiles und schwieriges Konzept, das erst etwa 150 Jahre nach den Anfängen der Differentialrechnung richtig begriffen und formalisiert wurde. Auch machen die üblichen einführenden Beispiele es schwierig, den Kern der Sache richtig zu verstehen. Zum Beispiel führt die Berechnung der Tangente der Parabel $y = x^2$ im Punkt (a, a^2) auf den Ausdruck $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$. Da das offenbare Ergebnis $0/0$ sinnlos ist, benutzt man Algebra um das problematische $x - a$ im Nenner wegzukürzen, d. h., man berechnet $\frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a$ für $x \neq a$. Jeder sieht nun, dass der „Grenzwert“ $2a$ ist, genau der Wert, der sich durch Einsetzen von $x = a$ ergibt. Natürlich warnt der Lehrer, dass das Ergebnis $\lim_{x\to a}(x + a) = 2a$ einen Beweis erfordert, denn wir können nicht einfach $x = a$ setzen in einer Formel, die unter der Voraussetzung $x \neq a$, abgeleitet wurde. Diese für den Studenten so offensichtlich einfache Sache ist tatsächlich nicht trivial, und sie bereitete schon im 17. Jahrhundert erhebliche Schwierigkeiten. Kein Wunder, dass die Studenten heute weiterhin Schwierigkeiten haben. Alle anderen algebraischen Beispiele (z. B. x^n, $1/x$, $\sqrt{x}$, usw.) welche in einer Einführung untersucht werden, folgen dem selben Weg, d. h. der relevante Grenzwert wird nach verschiedenen algebraischen Tricks durch *Einsetzen von* $x = a$ in eine algebraische Formel berechnet. Erst nach ausführlicher Besprechung von Grenzwerten wird dieses Ergebnis durch die *Stetigkeit* der relevanten algebraischen Funktion untermauert. Da Stetigkeit – visuell bestätigt durch moderne Taschenrechner – eine offenbare Eigenschaft aller natürlichen Funktionen ist, die die Studenten kennenlernen, fällt es ihnen schwer zu verstehen, wieso Grenzwerte am Anfang überhaupt nötig sind, und daher wird im letzten Schritt der Berechnung einer Ableitung der Grenzwert meistens vergessen.

Man beachte, dass die Schwierigkeiten mit $0/0$ verschwinden wenn die betreffende Gleichung in der Produktform $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$ geschrieben wird: Diese algebraische Gleichung gilt für *alle* x. Wie begründen wir nun, dass der Wert $2a$ des Faktors $q(x) = x+a$ im Punkte a tatsächlich die gewünschte Steigung der Tangente ist? Wie schon René Descartes (1596–1650) erkannte, ergibt sich die Antwort mithilfe elementarer Algebra. Aufgrund seines tiefen Verständnisses von Algebra war es Descar-



DOI 10.1515/dmvm-2016-0014

tes klar, dass die Tangente durch einen Punkt P auf einer Kurve dadurch ausgezeichnet wird, dass sie die Kurve in P mit *Multiplizität größer als eins* schneidet[1] (siehe [Des] und [vSc].) Algebraische Geometer sind natürlich mit dieser Definition der Tangente sehr vertraut, aber anscheinend ist sie in der Begründung und Lehre der Differentialrechnung vernachlässigt worden, wo stattdessen die Definition der Tangente als Grenzwert von Sekanten seit Jahrhunderten dominiert.

Im Falle einer Parabel ergibt sich aus Descartes' Idee die Antwort folgendermaßen. Sei $y = a^2 + m(x - a)$ die Gleichung einer Geraden durch (a, a^2) mit Steigung m. Ihre Schnittpunkte mit der Parabel $y = x^2$ ergeben sich als die Lösungen der Gleichung $x^2 - a^2 - m(x - a) = (x + a)(x - a) - m(x - a) = 0$, welche als Produkt

$$[(x + a) - m](x - a) = 0$$

geschrieben werden kann. Die Lösung $x = a$ hat Multiplizität 2, falls diese Gleichung die Form $(x - a)^2 = 0$ hat, d. h., der Faktor $(x+a) - m$ muss ebenfalls eine Nullstelle $x = a$ haben. Dies ergibt sich genau dann, wenn $m = 2a$. Leichter geht es wirklich nicht![2]

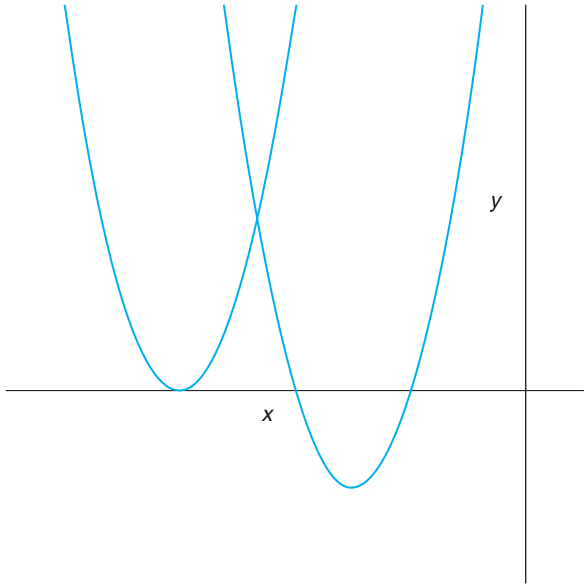
Diese elementare Methode, Tangenten zu identifizieren lässt sich leicht auf Polynome und rationale Funktionen – und mit ein klein wenig mehr Arbeit – auch auf deren lokale Inversen, und letztlich auf alle Funktionen übertragen, die durch algebraische Formeln definiert sind. Alle Standard-Ableitungsregeln sind ebenfalls ganz leicht zu beweisen. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Kettenregel – zumeist als die schwierigste und tiefliegendste Regel angesehen – sich bei diesem Ansatz als die einfachste und natürlichste Regel erweist. Als Hauptergebnis zeigt sich: Falls a im Definitionsgebiet Ω einer algebraischen Funktion f liegt[3], dann gibt es eine Faktorisierung

$$f(x) - f(a) = q(x)(x - a), \qquad (1)$$

wobei q ebenfalls eine auf Ω definierte algebraische Funktion ist, deren Wert $q(a)$ im Punkte a genau die Steigung der einzigen Gerade durch $(a, f(a))$ ist, die den Graph von f im Punkte $(a, f(a))$ mit Multiplizität > 1 schneidet. Mit anderen Worten: Der Wert $q(a)$ ist die Ableitung $D(f)(a)$ von f in a. Ausführliche Details und mehr findet der Leser in [Ran1].

Wie kann nun dieser algebraische Zugang in der Lehre benutzt werden?

Zunächst sei bemerkt, dass im Falle eines Polynoms die grundlegende Faktorisierung (1), sowie der entsprechende Begriff der Multiplizität einer Nullstelle, allgemeiner Lehrstoff der gymnasialen Algebra sind. Das bedeutet, dass die Differentialrechnung – wenigstens für Polynome – mühelos behandelt werden kann, sobald die relevante Faktorisierung und die Beschreibung von Geraden besprochen sind. Insbesondere ergibt sich die Lösung des Tangentenproblems, eines tiefen Problems mit einer Geschichte, die über 2000 Jahre bis zu den griechischen Geometern zurückgeht, und das im 17. Jahrhundert im Zentrum der Entwicklung der Differentialrechnung stand. Die Verallgemeinerung auf rationale Funktionen ist trivial, und alle Differentiationsregeln können leicht eingeführt und geübt werden. Falls gewünscht, können Wurzelfunktionen, usw. ebenfalls behandelt werden. Wäre es nicht sinnvoll, diese Anwendungen der Faktorisierung von Polynomen zu diesem Zeitpunkt zu besprechen? Würde damit nicht der algebraische Schulstoff für die Schüler interessanter?



Wie wir gesehen haben, ermöglicht die algebraische Methode einen direkten Zugang zu den formaleren Aspekten der Differentialrechnung *ohne* Einführung neuer und tieferer Begriffe wie „Grenzwerte" und „Stetigkeit", die am Anfang überflüssig sind, und womöglich eher verwirren. Eine erste Einführung in die Differentialrechnung ist sowieso oft auf die mechanischen Aspekte der Berechnung von Ableitungen für algebraische Funktionen begrenzt. Wäre es für Schüler und Studierende nicht viel einfacher, all dies erst einmal ohne den Umweg über Grenzwerte zu lernen?

Natürlich hat die algebraische Methode ihre Grenzen. Dies wird deutlich, sobald man *nicht-algebraische* Funktionen untersucht, wie etwa exponentiale oder trigonometrische Funktionen (siehe unten). Andererseits erlaubt sie einen natürlichen und direkten Zugang zu grundlegenden *nicht-algebraischen* Begriffen, vor allem dem zur Stetigkeit, der elementarer als der Grenzwertbegriff ist. Betrachten wir die Faktorisierung (1) im Falle eines Polynoms f. Dann ist q ebenfalls ein Polynom und daher trivialerweise auf jedem beschränkten Intervall beschränkt. Aus (1) ergibt sich also eine Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| \leq K\,|x - a| \quad \text{für alle } x \text{ in einem Intervall um } a, \qquad (2)$$

für eine passende Konstante K. Offensichtlich beinhaltet diese Abschätzung vor allem die Grundidee der Stetigkeit, d. h. aus $x \to a$ folgt $f(x) \to f(a)$ in einer präzisen Form und stärker als nötig. Ohne jegliche Extraarbeit – abgesehen davon, dass man dieser Eigenschaft einen Namen geben muss – ergibt sich, dass jedes Polynom stetig ist. Man vergleiche diesen kurzen Beweis mit dem Standardbeweis in sämtlichen Texten zu Calculus und Analysis! Wäre es für unsere Studenten nicht besser, die so anschauliche Idee der Stetigkeit von Polynomen auf diese direkte und elementare Weise präzisiert zu sehen?

Da Faktorisierung (1) und *lokale* Beschränktheit für alle algebraischen Funktionen bestehen bleiben – was keine neuen Begriffe und Ideen erfordert –, bleibt die Abschätzung (2) ebenfalls bestehen. Daher ergibt sich sofort die Stetigkeit aller algebraischen Funktionen. Man beachte, dass sich all dies ohne Einführung von Grenzwerten oder tiefer liegenden Eigenschaften der Zahlen ergibt. Auch kann man soweit alles im rationalen Zahlkörper behandeln, falls man bei Umkehrabbildungen den Definitionsbereich entsprechend einschränkt (z. B. $x \to \sqrt{x}$ wird auf $\{r^2 : r > 0 \textit{ und rational}\}$ eingeschränkt). Anschaulich betrachtet ist diese Einschränkung belanglos, da die entsprechenden rationalen Zahlen dicht im reellen Intervall liegen.

Wir sehen also, dass die Abschätzung (2), die aus der algebraischen Faktorisierung folgt, ganz natürlich auf den so wichtigen Begriff der Stetigkeit – und implizit auf den des Grenzwertes – führt. Und das ist nicht alles: Wendet man die Abschätzung (2) auf den Faktor q in (1) an, so ergibt sich, dass $q(x) \to q(a)$, d. h. für $x \neq a$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= q(x) \to q(a) \\ &= D(f)(a) \\ &= f'(a) \ \text{ wenn } x \to a. \end{aligned}$$

Man erkennt also, dass die exakte, algebraisch definierte Ableitung auch durch einen *nicht-algebraischen* Approximationsprozess ermittelt werden kann. Mit diesem Zugang ergibt sich die klassische fundamentale Idee von Leibniz und Newton, die Ableitung als Grenzwert von gewissen Differenzenquotienten zu definieren, als der Höhepunkt der algebraischen Methode von Descartes, womit das Tor zur Behandlung fundamentaler *transzendenter*, d. h. nicht-algebraischer, Funktionen geöffnet wird. Und dies ist genau der Punkt, wo die Analysis beginnt.

Auf die Lehre angewandt: Wäre es für unsere Studenten nicht besser, dem Grenzwertbegriff erst jetzt zu begegnen, wenn algebraische Mittel nicht mehr ausreichen, und das Studium der Exponentialfunktion deutlich macht, dass nicht nur neue Methoden, sondern auch neue, tiefliegendere Eigenschaften der Zahlen notwendig sind? Versuche, beispielsweise die Ableitung von $E(x) = 2^x$ im Nullpunkt analog zur algebraischen Methode zu ermitteln, führen uns auf die Faktorisierung

$$2^x - 1 = q(x)(x-0),$$

wobei jetzt aber der Wert $q(0)$ durch keine bekannte endliche Formel ermittelt werden kann. Im algebraischen Fall ist der entsprechende Wert genau bekannt, und wir haben gesehen, dass der Faktor $q(x)$ für $x \neq 0$ den Wert $q(0)$ approximiert, wenn $x \to 0$. Auf die Exponentialfunktion angewandt liegt es daher nahe, die Ableitung $q(0)$ durch den unbekannten Grenzwert $\lim_{x\to 0} q(x)$ zu beschreiben. Technologische Hilfsmittel erlauben es heute jedem, die Sache numerisch zu verfolgen und zu erkennen, dass dieser Grenzwert eine „Zahl“ $0.6931471\ldots$ ergibt – später mit $\ln 2$ benannt. Dieses mysteriöse Ergebnis zeigt deutlich, dass wir vor neuen Phänomenen stehen, und dass die „Existenz“ dieses Grenzwertes – etwa innerhalb der rationalen Zahlen oder sogar der algebraischen Zahlen – überhaupt nicht feststeht. Jetzt sind wir endlich an dem Punkt, wo die relevanten Grundlagen der Analysis (z. B. *Vollständigkeit* und Grenzwerte) eingeführt und ausgebaut werden müssen.

Schließlich kommen wir zum allgemeinen Begriff der Diffenzierbarkeit. Unsere Diskussion hat gezeigt, dass wenn a im Definitionsbereich der *algebraischen* Funktion f ist, die Eigenschaft

$$f(x) - f(a) = q(x)(x-a), \text{ mit } q \text{ in } a \text{ stetig,} \qquad (3)$$

zutrifft, wobei hier Stetigkeit sogar in der stärkeren Form (2) gilt. Nach Ausbau der nötigen Grundlagen ergibt sich für eine Exponentialfunktion dasselbe Ergebnis, wobei jetzt Stetigkeit in der schwächeren Form $q(x) \to q(a)$ *wenn* $x \to a$ charakterisiert ist. In dieser allgemeineren Interpretation ist die Eigenschaft (3) offenbar äquivalent zu der Standarddefinition der Differenzierbarkeit von f in a durch den Grenzwert der Differenzenquotienten, mit $D(f)(a) = \lim_{x\to a} q(x) = q(a)$. Sollte die in (3) formulierte Eigenschaft vielleicht als die primäre Definition der Differenzierbarkeit benutzt werden? Der Leser soll einmal versuchen, aufgrund dieser Definition die Kettenregel zu beweisen, um einen der vielen Vorteile zu erkennen. Ferner ist diese Formulierung eine triviale Modifikation der fundamentalen Idee, dass Differenzierbarkeit äquivalent zu guter, lokaler *linearer* Approximation ist: Man braucht nur (3) als

$$f(x) - [f(a) + q(a)(x-a)] = [q(x) - q(a)](x-a)$$

umzuschreiben. Und schließlich verallgemeinert sich diese Formulierung ganz natürlich auf Funktionen und Abbildungen mehrerer Variablen und erlaubt den Beweis der Kettenregel und des Umkehrsatzes für differenzierbare Abbildungen – nach Einführung der nötigen linearen Algebra – genau so einfach wie in einer Variablen.

Manche Leser wissen sicherlich, dass die Definition der Differenzierbarkeit durch (3) keineswegs neu ist. Meines Wissens erscheint sie zum ersten Mal schon Mitte des letzten Jahrhunderts bei Constantin Carathéodory [Car1], und sie wurde danach, beginnend in den 60er Jahren, erfolgreich von mehreren Autoren in Deutschland benutzt (siehe z. B. Grauert et al [GFL], Grauert-Fritsche

[GrFr], Remmert [Rem], Fischer und Lieb [FiLi]), obwohl der Ursprung zu Carathéodory im Allgemeinen nicht erwähnt wird. Ich selber lernte diese Formulierung in den 60er Jahren in Göttingen in Hans Grauerts Vorlesungen über Funktionentheorie sowohl einer als auch mehrerer Veränderlichen kennen. Vermutlich haben Grauert und Remmert von dieser Formulierung über ihren Lehrer Heinrich Behnke in Münster gehört, der mit Carathéodory befreundet war. In amerikanischen Lehrbüchern hingegen blieb Carathéodorys Definition – trotz der Übersetzung [Car2] im Jahr 1956 – lange unbekannt. Soweit mir bekannt ist, erschien sie dort zum ersten Mal 1996 (A. Browder [Bro]), anschließend im Jahre 2000 in der 3. Edition des Textes von Bartle und Sherbert [BaSh], und einige Jahre später auch bei Ghorpade und Limaye [GhLi]. Die beiden letzten Bücher erwähnen Carathéodory explizit; sie führen aber weiterhin Differenzierbarkeit mittels der Standarddefinition ein, zeigen dass Carathéodorys Formulierung dazu äquivalent ist, und benutzten diese dann z. B. im Beweis der Kettenregel.

Schlussbemerkungen

Ich hoffe, dass diese Ausführungen den Leser davon überzeugt haben, dass es Alternativen zu der üblichen Einführung in die Differentialrechnung gibt, welche – in unterschiedlicher Tiefe der technischen Details – mit dem Grenzwertbegriff beginnt. Studierende in Anfängervorlesungen und in ersten Analysis-Kursen haben sehr positiv auf diese *non-standard*-Methode reagiert. Ich hoffe, dass alle Kollegen, die Differentialrechnung und Analysis lehren und/oder entsprechende Textbücher schreiben, sich die Zeit nehmen werden, über die hier gestellten Fragen nachzudenken und vielleicht manches hiervon aufnehmen. Ich selber habe mehrere Jahre an einem Buch gearbeitet, das die hier skizzierte Einführung bis zu fundamentalen Analysis-Ergebnissen ausarbeitet und manch andere Neuigkeiten bringt (Siehe [Ran2]).

Anmerkungen

1. Descartes war übrigens mehr an der *Normalen* zu einer Kurve interessiert. Er untersuchte z. B. Kreise durch einen Punkt P auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt auf einer der Achsen der Ellipse lag, und nutzte die Tatsache aus, dass solch ein Kreis in P *tangential* zur Ellipse ist genau dann, wenn P ein Doppelpunkt ist. Mittels Algebra berechnete er dann den tangentialen Kreis, dessen Normale in P dann die gewünschte Normale zur Ellipse ist. Descartes' Kommentator F. van Schooten benutzte Descartes' Doppelpunkt-Methode um die Tangente zu einer Parabel direkt zu ermitteln.
2. Die Details waren im 17. Jahrhundert viel komplizierter, da anscheinend die Punkt-Steigungsform einer Geraden damals nicht benutzt wurde. Stattdessen wurde ein zweiter, weit entfernter Punkt benutzt, um die Geraden durch P zu beschreiben. Für mehr Einzelheiten siehe [Ran1].
3. Kritische Werte einer Funktion f müssen aus dem Definitionsbereich der Umkehrfunktion ausgeschlossen werden. Die Bedingung $f'(a) \neq 0$ ist notwendig, um sicherzustellen, dass die Umkehrfunktion eine entsprechende Faktorisierung hat und somit im Punkt $b = f(a)$ differenzierbar ist. Beispielsweise ist für die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ der richtige Definitionsbereich in der Differentialrechnung die *offene* Menge der positiven Zahlen.

Literatur

[BaSh] R. G. Bartle und D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 3rd ed., John Wiley, New York, 2000.

[Bro] A. Browder, *Mathematical Analysis*, Springer, New York, 1996.

[Car1] C. Carathéodory, *Funktionentheorie*. Birkhäuser, Basel, 1950.

[Car2] C. Carathéodory, *Theory of Functions,* Chelsea Publ. Company, New York, 1956.

[Des] R. Descartes, *La Géométrie. The Geometry of René Descartes,* Nachdruck der 1637 Leiden Edition, mit englischer Übersetzung von D. E. Smith und M. L. Latham, Open Court Publ., Chicago, 1925, Nachdruck von Dover, New York, 1954.

[FiLi] W. Fischer und I.Lieb, *Funktionentheorie*, F. Vieweg, Braunschweig, 1980.

[GhLi] S. R. Ghorpade and B. V. Limaye, *A Course in Calculus and Real Analysis*, Springer, New York 2006.

[GrFr] H. Grauert und K. Fritsche, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen*, Springer Verlag, Berlin 1974.

[GFL] H. Grauert, W. Fischer, und I. Lieb, *Differential- und Integralrechnung, I–III*, Springer Verlag, Berlin, 1967–68.

[KlRo] D. Klein and J. Rosen, Calculus Reform – For The Millions, Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), 1324–1325.

[Ran1] R. M. Range, Where Are Limits Needed in Calculus? Amer. Math. Monthly **118** (5) (2011), 404–417.

[Ran2] R. M. Range, *What is Calculus? From Simple Algebra to Deep Analysis*, World Scientific Publishing, Singapore, London, New Jersey, 2015.

[Rem] R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag, Berlin 1984.

[vSc] F. van Schooten, *Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita.* Amsterdam 1659–1661.

Prof. em. R. Michael Range, Department of Mathematics, State University of New York at Albany und Park City, Utah, USA
range@math.albany.edu

R. Michael Range, in Deutschland geboren und in Italien aufgewachsen, hat sein Diplom in Göttingen abgeschlossen, wo Vorlesungen von H. Grauert ihn für multidimensionale komplexe Analysis begeisterten. Ein Fulbright-Stipendium brachte ihn in die USA, wo er den Ph.D. an der University of California in Los Angeles erwarb. Er hat an der Yale University, der University of Washington (Seattle), und an der State University of New York in Albany gelehrt und geforscht sowie Forschungsaufenthalte in Bonn, Stockholm, Barcelona, und Berkeley verbracht. Neben vielen Facharbeiten hat er *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables* (Springer Verlag, 1986 und 1998) verfasst. Seit seiner Emeritierung 2015 lebt er in Park City, Utah.

Bei dem Beitrag handelt es sich um die leicht geänderte Übersetzung des Artikels *Descartes's Double Point Method for Tangents: An Old Idea Suggests New Approaches to Calculus*, zuerst veröffentlicht in *Notices of the American Mathematical Society*, Volume 61 (April 2014).