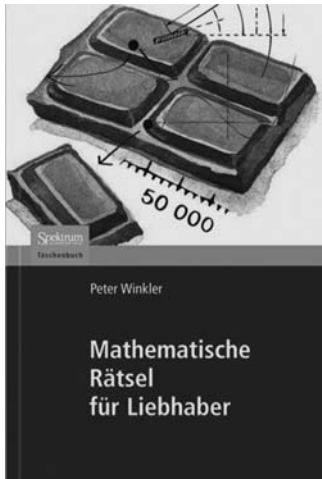


Das Krawattenrätsel

Andreas Loos



Bei einem *tie break* im Tennis werden keine Krawatten beschädigt. Genauso hat auch das „Krawattenrätsel“ nichts mit Krawatten zu tun. Doch seit irgend jemand auf die Idee kam, das englische Wort *tie* statt mit „Gleichstand“ oder „Gleichverteilung“ mit „Krawatte“ zu übersetzen, kursiert das „Krawattenrätsel“ unter diesem seltsamen Namen. (Vorher wurde es meist abstrakt als „Sortierproblem“ bezeichnet.)

Die Aufgabe ist schnell aufgeschrieben: Es stehen n Fächer in einer Reihe. Das i -te Fach enthält zwei Bälle, die beide mit der Zahl $n+1-i$ beschriftet sind. Ein Zug besteht darin, zwei Bälle aus benachbarten Fächern zu vertauschen. Wie viele Züge sind mindestens nötig, bis jeder Ball in dem Fach liegt, das seine Nummer trägt?

Vor zwei Monaten hat der *Spektrum Akademische Verlag* einen Preis von 1000 Euro auf die Lösung dieses Rätsels ausgelobt. Bis zum 31. 12. 2008 sucht der Verlag in Abhängigkeit von n das Minimum an Zügen o_n – im besten Falle. Im zweitbesten Falle vergibt er den Preis auch auf „eine substantielle Verbesserung der bekannten Schranken inklusive Beweis“.

Wer naiv an die Sache herangeht, der könnte die beiden Bälle in den Fächern einfach mit zwei Farben färben, etwa rot und blau, und dann rote und blaue Bälle getrennt umsordieren. Das kostet $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$ Vertauschungen. Beispiele zeigen allerdings, dass es für $n > 2$ schneller geht, wie die Folge A013927 aus der ‚Online Encyclopedia of Integer Series‘ zeigt: Sie besteht aus den ersten sechs Gliedern für o_n , und die lauten: 0, 2, 5, 10, 15, 23.

Derzeit arbeitet die Rätsel-Community auf Internet-Foren wie „Matroids Matheplanet“ (www.matheplanet.com) auf Hochtouren an weiteren Teillösungen des Problems für größere n . Vermutet werden folgende Werte:

n	o_n	n	o_n	n	o_n
7	31	17	187	149	14762
8	40	19	236	150	14984
10	65	21	288	151	15172
11	78	25	410	369	90669
12	94	29	553	1111	822671

Eine weitere Vermutung besagt, dass für alle ungeraden $n > 1$ die optimale Lösung ebenfalls ungerade ist. Sicher weiß man nur, dass $\frac{n(2n-1)}{3}$ eine untere Schranke für o_n darstellt. Das hat schon einer der Experten für das Rätsel bewiesen, Peter Winkler.

Der Mathematik-Professor und Hobby-Rätsler arbeitet derzeit an der University of Dartmouth, New Hampshire – und hat sein Wissen über das „Krawattenrätsel“ (und andere Rätsel) im Buch *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection* zusammengefasst. Es erscheint jetzt bei Spektrum auf deutsch:

Peter Winkler, *Mathematische Rätsel für Liebhaber*. Spektrum Akademischer Verlag, 2008. ISBN 978-3-8274-2034-3. 17,95 EUR.

Adresse des Autors

Andreas Loos
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
(FMA/IMO)
Universitätsplatz 2
39106 Magdeburg
a.loos@andreas-loos.com