Zur mathematischen Modellierung von Tsunamis

Adrian Constantin und Joachim Escher

Nach den verheerenden Folgen des Tsunamis vom Dezember 2004 im Indischen Ozean sind zahlreiche Artikel zur Mathematik von Tsunamis erschienen. Oft werden Solitonen zur mathematischen Modellierung von Tsunamis herangezogen. Obwohl Tsunamis und Solitonen ähnliche Eigenschaften aufweisen, handelt es sich doch um grundsätzlich unterschiedliche Wasserwellenphänomene. Wir wollen im Folgenden offensichtliche Ähnlichkeiten und fundamentale Unterschiede kurz erläutern.

Solitonen

Zunächst sind Solitonen sogenannte Einzelwellen („solitary waves"). Darunter versteht man besondere zweidimensionale Wasserwellen[1], deren Kammlinien Geraden sind, die orthogonal zur zweidimensionalen Bewegungsebene der Wellen stehen. Folglich können Solitonen mit Hilfe eines Zeitparameters t und zweier räumlicher Dimensionen beschrieben werden. Außerdem besitzen Solitonen keine Wellentiefpunkte. Sie bewegen sich mit einer konstanten, zur maximalen Wellenhöhe proportionalen Geschwindigkeit und einem festen, bzgl. des Lotes durch den Scheitelpunkt symmetrischen Profil. Bezeichnet x die horizontale und z die vertikale Dimension, so können Solitonen in der Form $z = \eta_c(x - ct)$ dargestellt werden, wobei c für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und η_c für die Profilkurve des Solitons stehen. Die Profilkurve $r \mapsto \eta_c(r)$ ist dabei stets eine positive symmetrische Funktion, die im Unendlichen gegen Null fällt.

Neben der eben beschriebenen äußeren Form einer Einzelwelle besitzen Solitonen aber noch eine weitere bemerkenswerte innere Struktur: die Form und Geschwindigkeit eines Solitons bleiben nach der Interaktion mit anderen Solitonen erhalten. Die dabei beobachtete Phasenverschiebung zeigt, dass Solitonen *keinem* Superpositionsprinzip unterliegen und somit in natürlicher Weise in eine nichtlineare Wellentheorie eingebettet sind. Phänomenologisch kann die nichtlineare Solitoneninteraktion wie folgt beschrieben werden. Weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Solitons zur Wellenhöhe proportional ist, werden in Wellenzügen, die aus mehreren Wellen bestehen, größere Wellen kleinere Wellen überholen. Der Einfachheit halber wollen wir dieses Phänomen anhand eines Wellenzugs, der aus zwei Wellen besteht, kurz beschreiben. Dazu nehmen wir an, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ eine kleine Welle vor einer großen Welle befindet. In endlicher Zeit wird die große Welle die kleine einholen und es findet eine komplizierte nichtlineare Wechselwirkung statt. Mit fortschreitender Zeit erkennt man jedoch wieder zwei Einzelwellen, die sich ihren ursprünglichen Profilen annähern.

Mathematisch versteht man diese nichtlineare Interaktion heutzutage ziemlich gut. Sie beruht auf spektraltheoretischen Eigenschaften, wobei Methoden der harmonischen Analysis und der Funktionentheorie zu deren Untersuchung eingesetzt werden, vgl. [2, 3]. Neben theoretischen Ergebnissen, stehen auch zahlreiche numerische Simulationen zur Verfügung. Außerdem kann die Solitoneninteraktion experimentell im Labor nachgewiesen werden [4].

Unser Wissen über Solitonen entstammt einer

[1] Man kann mathematisch rigoros beweisen, dass es keine dreidimensionale Einzelwellen gibt, vgl. [1].

Der erste von sechs Wellenzügen des Tsunamis vom 26. Dezember, der den Strand von Hat Ray Leh in Thailand verwüstet hat. Man erkennt deutlich eine kleine Front, der eine zweite größere Front folgt. Außerdem ist im Vordergrund des Bildes ein Rückzug der Uferline vor dem Auftreffen des Tsunamis zu erkennen. (Photo: Scanpix 2006)

mathematischen und physikalischen Forschung, die sich über die letzten 125 Jahre erstreckt. Der erste wissenschaftliche Bericht über eine Solitonenwelle ist jedoch noch älter und geht in das Jahr 1834 zurück. Der britische Ingenieur John Scott Russell machte damals auf der Deichkrone eines Kanals in Schottland folgende Beobachtung, vgl. [5]:

> I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminuation of speed.

Wie bereits erwähnt, sind Solitonen nichtlineare Phänomene und können in einer linearen Theorie nicht erklärt werden. Weil im 19. Jahrhundert vorwiegend lineare Wellentheorien Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen waren, wurde Russells Beobachtung in Fachkreisen nicht akzeptiert [6]. Erst im Jahre 1895 haben der holländische Mathematiker Diederik Korteweg und sein damaliger Doktorand Gustav de Vries ein nichtlineares Modell für Flachwasserwellen hergeleitet, das die heutzutage berühmten Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung hervorbrachte, vgl. [7]. Flachwasserwellen sind Wellen, deren Wellenlängen die durchschnittliche Wassertiefe deutlich übersteigen (in praktischen Anwendungen wird mindestens ein Faktor 10 verlangt). Die normalisierte Form der KdV-Gleichung lautet

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0\,,$$

wobei $\eta(t,x)$ die Höhe der Wasseroberfläche über einem ebenen Boden darstellt, [2, 8].
Durch direktes Nachrechnen verifiziert man leicht, dass für jede positive Konstante c durch

$$\eta_c(t,x) = \frac{c}{2}\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)\right]^{-2}, \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \quad \text{(S)}$$

eine Einzelwelle der KdV-Gleichung gegeben ist. Experimentelle Untersuchungen belegten ferner, dass das KdV-Modell eine gute Approximation für Flachwasserwellen ist. Nach diesen Fortschritten wurden J. S. Russells Beobachtungen endlich allgemein anerkannt.
Die Tatsache, dass die Einzelwellen (S) sogar Solitonen sind, wurde erst 1965 aufgrund numerischer Simulationen von R. Kruskal und N. Zabusky [9] nachgewiesen. Die entsprechende mathematische Absicherung wurde in den darauf folgenden 20 Jahren von verschiedenen Wissenschaftlern geleistet, so dass die KdV-Gleichung heutzutage als recht gut verstandene partielle Differentialgleichung betrachtet werden darf. Wir können uns hier nicht weiter der faszinierenden Schönheit der Theorie der KdV-Gleichung widmen, wollen aber noch folgende bemerkenswerte Eigenschaft kurz erläutern: Jede Welle, die im Unendlichen schnell genug gegen Null strebt, lässt sich mit fortschreitender Zeit in mehrere Solitonen zerlegen, die

nach Höhe und Geschwindigkeit geordnet sind [2, 3]. Dies bedeutet insbesondere, dass Solitonen nicht nur spezielle Lösungen der KdV-Gleichung sind, sondern dass sie vielmehr das asymptotische Verhalten *jeder* schnell fallenden Lösung beschreiben.

Tsunamis sind keine Solitonen

Die eben dargelegte asymptotische Eigenschaft der Lösungen der KdV-Gleichung erklärt teilweise die Versuche, Tsunamis mit Solitonen beschreiben zu wollen, vgl. [10, 11]. Die folgenden Beobachtungen stützen ebenfalls die Hypothese, Tsunamis als Solitonen zu betrachten. Erstens werden Tsunamis üblicherweise von Seebeben verursacht. Solche Seebeben bewirken auch Verschiebungen der tektonischen Platten, die sich über mehrere hundert Kilometer erstrecken. Da der tiefste Punkt im Ozean ungefähr in elf Kilometer Tiefe liegt, müssen Tsunamis als Flachwasserwellen betrachtet werden. Zweitens stellt man fest, dass sich Tsunamis über mehrere Tausend Kilometer fortpflanzen[2], um dann in der Nähe der Küste als Welle mit einigen wenigen isolierten Wellenbergen zu erscheinen.

Eine genauere Untersuchung der Tsunamis zeigt jedoch, dass es gute Gründe gibt, diese Wellen nicht als Solitonenwellenzüge zu betrachten. Wären die beobachteten Wellen eines Tsunamis in der Nähe der Küsten nämlich aus Solitonen zusammengesetzt, so müssten diese Solitonen der Höhe nach geordnet auftreten. Dies scheint aber äußerst selten der Fall zu sein, auch wenn die Laufzeit des Wellenzuges groß genug war, so dass sich, wie oben beschrieben, ein durch KdV beschriebener Tsunami in Solitonen zerlegen müsste, falls die KdV-Gleichung für die Modellierung relevant wäre. Beispielsweise wurde der Tsunami im Dezember 2004 vor der Küste Sumatras von einem Seebeben verursacht, das sich über eine elliptische Fläche von ungefähr 100 km Breite und 1 300 km Länge erstreckte. Der erste Wellenberg erreichte Sri Lanka nach einer Laufzeit von 2 h 12 min mit einer Höhe von 1 m, während der zweite Wellenberg mit einer Höhe von 10 m etwa 10 min später auf die Küste traf [12, 13].

Ein weiterer Hinweis, dass Tsunamis nicht durch Solitonen beschrieben werden können, ist die Tatsache, dass die erste Welle des Tsunamis vom 26. Dezember 2004, die den Strand bei Hat Ray Leach in Sri Lanka traf, eine Senkwelle war, d.h. die Welle wies nur einen Wellentiefpunkt, aber keinen Scheitelpunkt auf. Diese Beobachtung deckt sich mit Berichten über einen merkwürdigen „Rückzug" des Ozeans vor dem Auftreffen des Tsunamis, vgl. [12, 13].

Zur Modellierung von Tsunamis

Wir beschließen unsere Ausführungen mit der Beschreibung möglicher Ansatzpunkte zur Modellierung von Tsunamis. Wie wir bereits oben festgehalten haben, müssen Tsunamis als Flachwasserwellen betrachtet werden. Des Weiteren hat man beobachtet, dass die maximale Wellenhöhe der Tsunamis nach dem Seebeben rasch abnimmt, und über tiefem Meeresboden höchstens eine Höhe von 0.5 m aufweist. Dies war auch beim Tsunami vom Dezember 2004 vor Sumatra der Fall, obwohl die Bewegung der tektonischen Platten eine Welle mit einer ursprüngliche Höhe von 10 m hervorrief. Es gibt Ansätze, Tsunamis im Bereichen großer Meerestiefe durch lineare Wellengleichungen der Form

$$\eta_{tt} - c^2 \eta_{xx} = 0$$

zu beschreiben, vgl. [14]. Für die Konstante gilt hier $c = \sqrt{gh}$, wobei h für die durchschnittliche Meerestiefe und g für die Erdbeschleunigung stehen. Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung, die sich in positiver Richtung fortpflanzt, lautet

$$\eta(t,x) = f(x - ct), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Diese Lösungen stellen somit die Bewegung der Wellenform f mit konstanter Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$ dar. Solche Ansätze erklären insbesondere die beobachtete Geschwindigkeit von über 800 km/h, wie sie auch im Falle des Tsunamis vom Dezember 2004 auftraten. Im Gegensatz zur obigen linearen Wellengleichung kann die KdV-Gleichung als Ausgleichsmechanismus zwischen der Nichtlinearität $\eta\eta_x$ und der linearen Dispersion η_{xxx} verstanden werden: ohne Dispersion würde die Nichtlinearität die Welle in eine Singularität, eine sogenannte Wellenbrechung treiben, vgl. [15]. Da die Aufzeichnungen über Tsunamis Längenskalen nahelegen, die den Einfluss der Dispersion im Wesentlichen ausschließen [16], können die Nichtlinearitäten über tiefem Meeresboden vernachlässigt werden, was den linearen Ansatz bestätigen würde. Das Auftreten von Wellenbergen in der Nähe der Küste könnte auf den wachsenden Einfluss der abnehmenden Meerestiefe zurückgeführt werden. Somit scheint der lineare Ansatz in diesen Bereichen nicht mehr gerechtfertigt zu sein und nichtlineare Effekte müssen berücksichtigt werden. Da der Einfluss der Dispersion weiterhin keine wesentlichen Beiträge liefert, ist eine Wellenbrechung unvermeidlich. Die Entwicklung ei-

[2] Der Tsunami vom Dezember 2004 vor Sumatra hat sich über 24 000 km fortgepflanzt.

nes mathematischen Rahmens, in welchem solche Überlegungen schlüssig formuliert werden können, ist Gegenstand aktueller Forschungsvorhaben im Bereich der Angewandten Analysis.

Quellen

[1] W. Craig, Non-existence of solitary water waves in three dimensions, *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A* **360** (2002), 2127–2135.

[2] P. G. Drazin und R. S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[3] P. D. Lax, Outline of a theory of the KdV equation. Recent mathematical methods in nonlinear wave propagation (Montecatini Terme, 1994), 70–102, Lecture Notes in Math., 1640, Springer, Berlin, 1996.

[4] http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/

[5] J. S.Russell, Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1844.

[6] A. D. D. Craik, The origins of water wave theory, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004), 1–28.

[7] D. J. Korteweg und G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* **39** (1895), 422–443.

[8] G. Schneider und C. E. Wayne, The long-wave limit for the water wave problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), 1475–1535.

[9] N. J. Zabusky und M. D. Kruskal, Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965), 240–243.

[10] G. M. Ziegler, Zur Mathematik von Tsunamis, *DMV-Mitteilungen* **13** (2005), 51–53.

[11] http://de.wikipedia.org/wiki/Tsunami

[12] P. L. F. Liu, P. Lynett, H. Fernando, B. E. Jaffe, H. Fritz, B. Higman, R. Morton, J. Goff und C. Synolakis, Observations by the International Tsunami Survey Team in Sri Lanka, *Science* **308** (2005), 1595.

[13] V. Titov, A. B. Rabinovich, H. O. Mofjield, R. E. Thomson und F. I. Gonzalez, The global reach of the 26 December 2004 Sumatra tsunami, *Science* **309** (2005), 2045–2048.

[14] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.

[15] A. Constantin und J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, *Acta Mathematica* **181** (1998), 229–243.

[16] A. Constantin und R. S. Johnson, Modeling tsunamis, *J. Phys. A* **39** (2006), L215–L217.

Adresse der Autoren

Prof. Dr. Adrian Constantin
School of Mathematics
Trinity College Dublin
Dublin 2
Ireland
adrian@maths.tcd.ie

Prof. Dr. Joachim Escher
Institut für Angewandte Mathematik
Leibniz Universität Hannover
Welfengarten 1
30167 Hannover
escher@ifam.uni-hannover.de

Adrian Constantin ist Inhaber des Erasmus Smith's Chair of Mathematics (1762) am Trinity College in Dublin, Irland. Seine Forschungsinteressen befassen sich hauptsächlich mit Differentialgleichungen der Mathematischen Physik.

Joachim Escher leitet die Arbeitsgruppe Angewandte Analysis an der Fakultät fuer Mathematik und Physik der Leibniz Universität Hannover. Zu seinen Forschungsprojekten gehören insbesondere freie Randwertaufgaben in dissipativen und dispersiven Systemen.

Ein Mathematiker als Papst?

Antwort (B) ist richtig: Gerbert von Aurillac, auch Gerbert von Reims, ca. 950–1003, war ein Mathematiker, Abt von Bobbio, Erzbischof von Reims und Ravenna und schließlich Papst vom 999 bis zu seinem Tod im Jahre 1003. (Gregor VIII. ist es nicht, aber auf seiner Grabplatte kniet der „Euklid des Sechzehnten Jahrhunderts“ und Konstrukteur des „gregorianischen Kalenders“, der Jesuit Christopher Clavius.)