46. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) Mérida, Mexiko, 2005

von Hans-Dietrich Gronau

Die 46. Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 8.–19. Juli in Mérida, Mexiko, statt. Mit 91 Ländern und 513 Teilnehmern und Teilnehmerinnen wurden bemerkenswerte neue Teilnahmerekorde aufgestellt. Die bisherigen Rekorde stammten aus dem Vorjahr in Athen mit 85 Ländern und 486 Teilnehmern und Teilnehmerinnen. Damit wurde die „Schallmauer 500“ bei den Teilnehmenden erstmals gebrochen.

Die deutsche Mannschaft bestand aus sechs Schülern, dem Berichterstatter als Delegationsleiter, Dr. Eric Müller (München) als stellvertretendem Delegationsleiter und Herrn Hanns-Heinrich Langmann vom IMO-Organisationsbüro Bonn als Beobachter zur Vorbereitung der 50. IMO 2009 in Bremen.

Am 13. und 14. 7. wurden vormittags die beiden 4½-stündigen Klausuren geschrieben. Am 15. und 16. 7. wurden die Schülerlösungen nach der Durchsicht durch die Delegationsleitungen in der Koordination mit Experten des gastgebenden Landes, den Koordinatoren, bewertet. Auf der Abschlussjurysitzung in der Nacht vom 16. zum 17. 7. wurde über die Vergabe der Preise entschieden.

Der Wettbewerb

An der 46. IMO nahmen 91 Länder mit 513 Schülern und Schülerinnen teil.

Bei dieser Olympiade wurden 33,0 % der möglichen Punkte erreicht. Damit war sie schwer und setzte die Tradition der Jahre 1999 bis 2003 fort. In diesen Jahren lag der Durchschnitt der erreichten Punkte bei 31–33 %. Nur im vergangenen Jahr war die IMO etwas leichter, so dass sogar 38,6 % der Punkte vergeben werden konnten. Auch wenn der Gesamtdurchschnitt wieder niedriger lag, so waren trotzdem sowohl die Punktgrenze für die Goldmedaillen (35 statt 32) als auch die Anzahl der Teilnehmer mit perfekter Punktzahl von 42 (16 statt 4) deutlich höher. Demnach war diese IMO für die Allerbesten „etwas leichter“.

Nach 10 Jahren gab es wieder einen Sonderpreis für die besonders elegante Lösung einer Aufgabe, in diesem Fall handelt es sich um die schwerste Aufgabe 3 (siehe folgende Seite).

Die deutsche IMO-Mannschaft

Das Ergebnis der deutschen Mannschaft wird in der Tabelle rechts mitgeteilt. Obwohl die IMO ein Einzelwettbewerb ist und es keine offizielle Länderwertung gibt, wird immer wieder gerade nach dieser Rangfolge gefragt.

Mit dem Abschneiden der deutschen Mannschaft kann man sehr zufrieden sein. Der 12. Platz ist eine deutliche Verbesserung zum Vorjahr, als mit Rang 25

v. l. n. r.: Dr. Eric Müller, Christopher Wulff, Christian Sattler, Peter Scholze, Georg Schönherr, Daniel Harrer, Darij Grinberg, Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau, Hanns-Heinrich Langmann

das schlechteste Abschneiden einer deutschen Mannschaft in der Geschichte erzielt wurde. Erfreulich ist besonders, dass alle 6 deutschen Schüler einen Preis gewannen, was früher fast immer der Fall war, aber leider nicht in letzten 5 Jahren. Besonders freuen wir uns über Peter Scholze, der die perfekte Punktzahl 42 erzielte, was einem deutschen Schüler letztmalig 1989 gelang, also vor 16 Jahren.

Die Ergebnisse der deutschen Mannschaft

Peter Scholze	42	Gold
Christian Sattler	31	Silber
Darij Grinberg	28	Silber
Daniel Harrer	23	Silber
Georg Schönherr	21	Bronze
Christopher Wulff	18	Bronze

Für weitere Informationen über IMOs und andere mathematische Schülerwettbewerbe sei auf die Homepage des Mathematik-Olympiaden e. V. hingewiesen: `http://www.Mathematik-Olympiaden.de`

Anschrift des Autors
Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau
(Delegationsleiter der deutschen Mannschaft)
Institut für Mathematik
Universität Rostock
18051 Rostock
`gronau@uni-rostock.de`

Aufgaben der 46. IMO

1. Tag

1. Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden sechs Punkte folgendermaßen gewählt: A_1 und A_2 auf BC, B_1 und B_2 auf CA sowie C_1 und C_2 auf AB, wobei diese Punkte die Eckpunkte eines konvexen Sechsecks $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ mit gleich langen Seiten sind.
Man beweise, dass sich die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 in einem Punkt schneiden. (Rumänien)

2. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von ganzen Zahlen mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern. Für jede positive ganze Zahl n gelte: Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben n verschiedene Reste bei der Division durch n.
Man beweise, dass jede ganze Zahl genau einmal in der Folge auftritt. (Niederlande)

3. Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $xyz \geq 1$.
Man beweise:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

(Südkorea)

2. Tag

4. Man betrachte die Folge $a_1, a_2, \ldots$ gegeben durch

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen, die zu jedem Glied der Folge teilerfremd sind. (Polen)

5. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$, in dem die Seiten BC und AD gleich lang und nicht parallel sind. Auf den Seiten BC bzw. AD werden die inneren Punkte E bzw. F so gewählt, dass $|BE| = |DF|$ gilt. Die Geraden AC und BD schneiden sich in P, die Geraden BD und EF schneiden sich in Q und die Geraden EF und AC schneiden sich in R. Es werden alle Dreiecke PQR betrachtet, wenn E und F variieren.
Man beweise, dass die Umkreise dieser Dreiecke einen von P verschiedenen gemeinsamen Punkt haben. (Polen)

6. In einem mathematischen Wettbewerb wurden den Teilnehmern 6 Aufgaben gestellt. Je zwei dieser Aufgaben wurden von mehr als $\frac{2}{5}$ der Teilnehmer gelöst. Kein Teilnehmer löste alle 6 Aufgaben.
Man beweise, dass es mindestens 2 Teilnehmer gab, von denen jeder genau 5 Aufgaben gelöst hat. (Rumänien)

Arbeitszeit: 4½ Stunden an jedem Tag. Bei jeder Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Sonderpreis für die besonders elegante Lösung der Aufgabe 3

Um nicht dem trügerischen Eindruck erliegen, dass es sich hier um eine einfache Ungleichung handelt, wird dringend empfohlen, die Aufgabe zunächst selbst zu lösen. Sollte man sie dann mit viel Aufwand und auf vielen Seiten zu Papier gebracht haben, kann man sich an der folgenden Lösung des moldawischen Schülers Iurie Boreico erfreuen.

Es ist

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2(y^2 + z^2)(x^3 - 1)^2}{(x^5 + y^2 + z^2)x^3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0.$$

Nach der Aufgabenstellung gilt $\frac{1}{x} \leq yz$. Analoge Ungleichungen gelten auch für Vertauschungen der Variablen. Schließlich gilt die einfache Ungleichung $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 \geq 0$. Also gilt insgesamt

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0.$$

Länderübersicht (inoffiziell). Jede Mannschaft bestand aus 6 bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern. Eine vollständige Mannschaft (6 Schüler) konnte maximal 252 Punkte erreichen. (N = Platzierung, P = Punktzahl, G = Anzahl der Goldmedaillen, S = Anzahl der Silbermedaillen, B = Anzahl der Bronzemedaillen.)

N	Land	P	G	S	B
1	China	235	5	1	–
2	USA	213	4	2	–
3	Russland	212	4	2	–
4	Iran	201	2	4	–
5	Südkorea	200	3	3	–
6	Rumänien	191	4	1	1
7	Taiwan	190	3	2	1
8	Japan	188	3	1	2
9	Ukraine	181	2	2	2
	Ungarn	181	2	3	1
11	Bulgarien	173	2	3	1
12	Deutschland	163	1	3	2
13	Großbritannien	159	1	3	2
14	Singapur	145	–	4	2
15	Vietnam	143	–	3	3
16	Tschechien	139	1	2	2
17	Hongkong	138	1	3	1
18	Weißrussland	136	1	3	1
19	Kanada	132	1	2	2
20	Slowakei	131	–	4	2
21	Moldawien	130	1	2	2
	Türkei	130	–	4	1
23	Thailand	128	–	4	2
24	Italien	120	–	2	4
25	Australien	117	–	–	6
26	Kasachstan	112	–	2	3
27	Kolumbien	105	–	2	2
	Polen	105	–	1	5
29	Peru	104	–	–	6
30	Israel[a]	99	–	2	3
31	Mexiko	91	–	–	4
32	Frankreich	83	–	–	4
33	Armenien	82	–	–	5
	Brasilien	82	1	–	1
	Kroatien	82	–	1	2
36	Indien	81	–	1	1
37	Georgien	80	–	–	4
38	Neuseeland	77	–	1	2
39	Serbien und Montenegro	75	–	–	3
40	Belgien	74	–	1	1
	Österreich	74	–	–	2
42	Indonesien	70	–	–	3
	Schweiz	70	–	1	1
44	Dänemark	69	–	–	4
45	Estland	68	–	–	3
46	Argentinien	65	–	1	2
47	Lettland	62	–	–	2
	Niederlande	62	–	–	2
49	Aserbaidschan	59	–	–	2
50	Griechenland	58	–	–	2
51	Irland	55	–	1	–
52	Kuba (4)	54	–	–	3
53	Litauen	53	–	–	1
54	Mazedonien	50	–	–	2
55	Bosnien und Herzegowina	49	–	–	2
	Finnland	49	–	–	2
	Slowenien	49	–	1	–
58	Kirgisien	46	–	–	2
	Spanien	46	–	–	1
60	Albanien	44	–	1	–
61	Schweden	42	–	–	–
62	Südafrika	39	–	–	–
63	Macau	38	–	–	1
	Norwegen	38	–	–	–
65	Costa Rica	37	–	–	–
	Uruguay (5)	37	–	–	1
67	Sri Lanka	32	–	–	1
68	Philippinen	30	–	–	–
69	Portugal	27	–	–	–
70	El Salvador	25	–	–	–
71	Island	23	–	–	1
72	Marokko	18	–	–	–
	Turkmenistan (3)	18	–	–	1
74	Ekuador	17	–	–	1
75	Malaysia	15	–	–	–
	Venezuela (2)	15	–	–	–
77	Zypern	14	–	–	–
78	Trinidad und Tobago	13	–	–	–
79	Paraguay	12	–	–	–
80	Pakistan	11	–	–	–
81	Tunesien (3)	9	–	–	–
82	Puerto Rico	8	–	–	–
83	Guatemala (3)	6	–	–	–
84	Liechtenstein (3)	4	–	–	–
85	Bangladesh	3	–	–	–
	Kuwait (5)	3	–	–	–
	Luxemburg (2)	3	–	–	–
	Saudi Arabien (5)	3	–	–	–
	Tadschikistan (3)	3	–	–	–
90	Mozambik (5)	2	–	–	–
91	Bolivien (2)	0	–	–	–

Anmerkung
a Wegen eines Druckfehlers in der Aufgabenstellung außer Wertung.