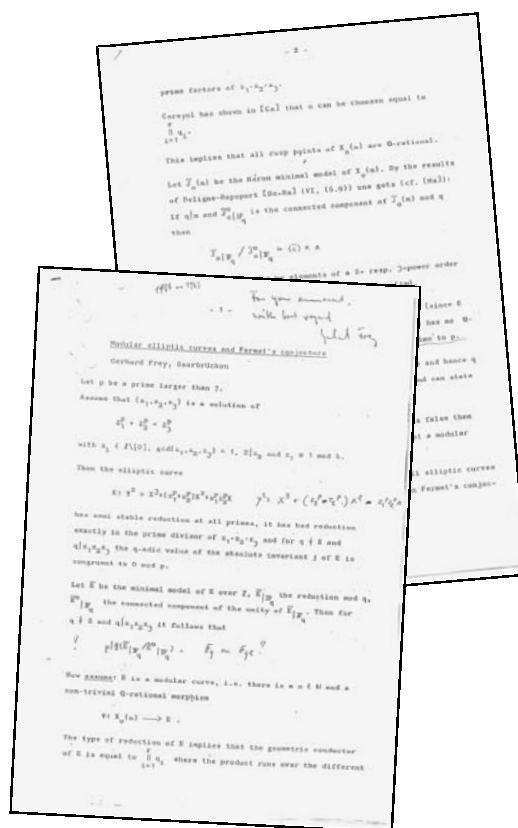




Der verlorene Brief des Gerhard Frey

von Klaus Barner

Am 21. Oktober 1998 hatte der Rat des Fachbereichs Mathematik/Informatik der Universität Kassel in geheimer Abstimmung einstimmig beschlossen, Gerhard Frey in Würdigung seiner Verdienste um den Fortschritt der Mathematik und aus Dank für die von ihm geleistete Aufbauhilfe für unseren Fachbereich die Würde eines Doktors der Naturwissenschaften ehrenhalber zu verleihen. Der Festakt sollte am 15. Januar 1999 in Kassel stattfinden. Die ehrenvolle, aber – wie sich herausstellen sollte – nicht ganz einfache Aufgabe, die Laudatio auf Gerhard Frey zu halten, war mir als Dekan zugefallen. Natürlich mußte ich auf Freys berühmte Idee, die am Ende zum Beweis der Fermatschen Vermutung durch Taylor und Wiles geführt hat, zu sprechen kommen. Aber auf welche Weise hatte diese zunächst offenbar nicht publizierte Idee den Anstoß für die Arbeiten von Jean-Pierre Serre sowie Barry Mazur und Ken Ribet gegeben? Natürlich habe ich Gerhard Frey danach gefragt. Aber der wußte es selber nicht mehr so ganz genau.

Da erinnerte ich mich, daß Norbert Schappacher kurz zuvor in einer Literaturübersicht zum Beweis von Fermats Großem Satz [17, S. 115] *Fermat's Last Theorem* von Simon Singh so gerühmt hatte (auch Wulf-Dieter Geyer hat diesen Roman unlängst im *Jahresbericht* [4, S. 2] wieder empfohlen). Also schlug ich meinen Singh auf, und da las ich [22, S. 215 ff]:

During the autumn of 1984 a select group of number theorists gathered for a symposium in Oberwolfach, a small town in the heart of Germany's Black Forest. They had been brought together to discuss various breakthroughs in the study of elliptic equations, and naturally some of the speakers would occasionally report any minor progress that they had made towards proving the Taniyama-Shimura conjecture. One of the speakers, Gerhard Frey, a mathematician from Saarbrücken, could not offer any new ideas as to how to

attack the conjecture, but he did make the remarkable claim that if anyone could prove the Taniyama-Shimura conjecture then they would also immediately prove Fermat's Last Theorem.

When Frey got up to speak he began by writing down Fermat's equation:

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{where } n \text{ is greater than } 2.$$

Fermat's Last Theorem claims that there are no whole number solutions to this equation, but Frey explored what would happen if the Last Theorem were false, i.e. that there is at least one solution. Frey had no idea what his hypothetical, and heretical, solution might be and so he labelled the unknown numbers with the letters A , B and C :

$$A^N + B^N = C^N.$$

Frey then proceeded to 'rearrange' the equation. This is a rigorous mathematical procedure which changes

the appearance of the equation without altering its integrity. By a deft series of complicated manoeuvres Frey fashioned Fermat's original equation, with the hypothetical solution, into

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N.$$

Although this rearrangement seems very different from the original equation, it is a direct consequence of the hypothetical solution. That is to say if, and it is a big 'if', there is a solution to Fermat's equation and Fermat's Last Theorem is false, then this rearranged equation must also exist. Initially Frey's audience was not particularly impressed by his rearrangement, but then he pointed out that this new equation was in fact an elliptic equation, albeit a rather convoluted and exotic one.

(Der fehlende Faktor x im letzten Term der „elliptic equation“ ist auch in den späteren Übersetzungen des Buches nicht hinzugefügt worden.) Dr. Singh's Roman stand in Großbritannien und in den USA wochenlang an der Spitze der Bestseller-Liste und wurde von den Wissenschaftsredakteuren in aller Welt, aber auch von Mathematikern, enthusiastisch besprochen. „Ich gestehe meinen Neid“, schreibt Herr Schappacher. „Warum hat kein Mathematiker diesen Bestseller geschrieben?“ Ja, warum wohl? Dr. Singhs (PhD in particle physics von der Universität Cambridge!) Verhältnis zur Mathematik mag ja ein ganz spezielles sein. Aber seine zahlreichen Interviews und Kontakte mit den am Beweis der Fermat-Vermutung Beteiligten schienen mir doch dafür zu sprechen, daß wenigstens Ort, Zeit und handelnde Personen in seiner Story stimmen.

Sicherheitshalber – Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser – schaute ich in den Oberwolfach-Berichten von 1984 nach. Eine Spezialtagung über elliptische Kurven gab es nicht. In Frage kamen nur die Tagung über algebraische Zahlentheorie im August 84 und die Arbeitstagung Geyer-Harder im Oktober 84. An der ersteren hat Herr Frey nicht teilgenommen; er weilte zu jener Zeit in Brasilien, wie er mir mitgeteilt hat. An der letzteren hingegen nahm er teil, trug dort aber nicht über modulare elliptische Kurven und die Fermatsche Vermutung vor. Ein Autor, der es eigentlich hätte wissen müssen, Ken Ribet, verlegt Freys Vortrag in das Jahr 1985 [16, S. 575]:

The Fermat-Taniyama connection grew out of a 1985 Oberwolfach lecture by Gerhard Frey, who pointed out that a nontrivial solution to $a^p + b^p = c^p$ (with p an odd prime) permits one to write down a semistable elliptic curve which does not appear to satisfy Taniyama's conjecture.

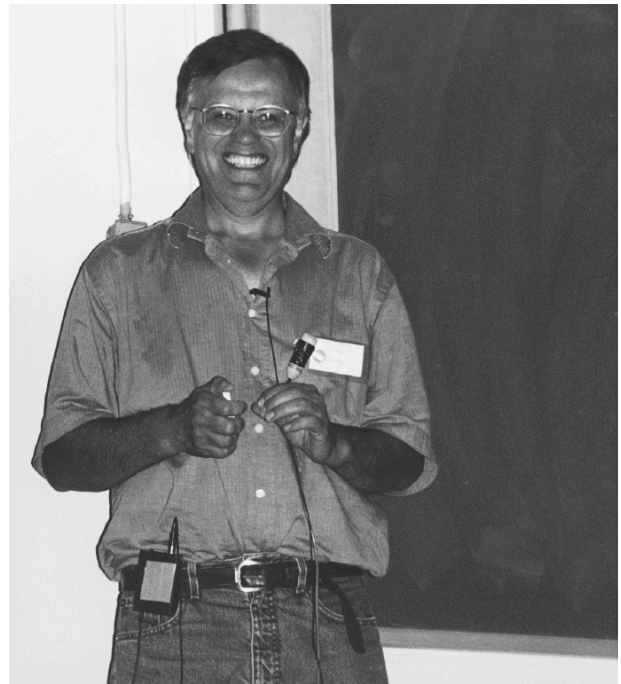


Abbildung 1. Gerhard Frey, Boston 1995

Aber auch in diesem Jahr findet sich kein entsprechender Bericht über einen Vortrag Frey's in den Oberwolfach-Berichten. Es hätte auch zeitlich kaum gepaßt, denn bereits im zeitigen Frühjahr 1985 hat Ken Ribet mit seinen Versuchen, Freys Idee zu verifizieren, begonnen und etwas später auf der Basis von Vermutungen, die in Serres Brief [20] vom 13. August 1985 an Jean-François Mestre formuliert worden sind, erste Fortschritte zum Beweis der darin formulierten „ ε -Vermutung“ erzielt. Darüber wiederum hat Gerhard Frey am 9. Dezember 1985 in Paris im Séminaire de Théorie des Nombres berichtet ([2]):

Recently Ribet succeeded to prove that $(\tilde{S})$ is true in the prime level case and it seems that he can prove $(\tilde{S})$ for arbitrary squarefree level too! Since $E_{(A,B)}$ is stable its conductor is squarefree, and Ribet's result implies: The Taniyama-Shimura conjecture implies Fermat's conjecture.

(Bei $(\tilde{S})$ handelt es sich um Serres ε -Vermutung.) Dieser Vortrag Freys scheint übrigens der erste überhaupt gewesen zu sein, den er über seine Idee gehalten hat. Die damalige Situation wird von Paulo Ribenboim wie folgt treffend beschrieben [15, S. 87]:

Quite recently, an original and interesting idea by Frey has been circulating in the mathematical underground. Letters, conversations in hallways, but nothing official – since all evolves around an intriguing and daring conjecture concerning elliptic curves. The outcome is that, if the conjecture is assumed to be true, the FLT (the whole of it!) follows as a corollary.

Wie also war es nun tatsächlich gewesen? Meine Nachforschungen wurden dadurch erschwert, daß dem Gerhard Frey bei seiner Übersiedlung von Saarbrücken nach Essen die Aktenordner mit seiner gesamten mathematischen Korrespondenz verlustig gegangen waren und daß er sich zudem an den genauen zeitlichen Ablauf der Ereignisse nicht mehr sicher erinnern konnte. Hatte mich Herr Schappacher zunächst auf die falsche Fährte gelockt, so verdanke ich ihm gleichwohl den Zipfel zum Ergreifen der historischen Wahrheit [17, S. 113]:

Am 20.12.1984 bekam ich, ich weiß nicht mehr wie und von wem, die Kopie einer kleinen Note von zweieinhalb Schreibmaschinenseiten in die Hand, die den Titel trug: „Modular elliptic curves and Fermat’s conjecture“. Der Autor, Gerhard Frey, damals in Saarbrücken, hatte diese insgesamt nur 42 Zeilen Text und 4 Literaturangaben an einen kleinen Kreis ausgewählter Freunde mit der Bitte um Vertraulichkeit geschickt. Innerhalb weniger Tage zirkulierten Kopien am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. In der Note skizziert Frey die Rückführung des Großen Fermatschen Satzes auf die, wie er damals noch formulieren durfte, Weil-Vermutung: daß ‘jede über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definierte elliptische Kurve modular’ ist.

Peter Schneider (Münster) hat mir dazu geschrieben (e-mail aus Chicago vom 26.2.1999):

Ich selbst habe diese 2 $\frac{1}{2}$ Seiten in Kopie von Herrn Schappacher bekommen. Im Gegensatz zu ihm glaube ich mich genau daran zu erinnern, daß er damals sagte, er wiederum haette sie von Herrn Harder bekommen.

Aber von wem hatte Herr Harder die Note? Von Gerhard Frey selbst? Oder von jemand anderem? Und vor allem, wie hat Jean-Pierre Serre davon erfahren, er, der als erster mit Freys Idee wirklich etwas anzufangen wußte? Herr Frey besaß zu jener Zeit (1999) selbst keine Kopie mehr. Sie war mit seiner Korrespondenz bei der Übersiedlung nach Essen verloren gegangen. Und er war sich nicht einmal sicher, ob er die kleine Note mit einem Begleitbrief an Jürgen Neukirch oder an Jürgen Ritter geschickt hatte. Herr Ritter, den ich deswegen anrief, kannte Freys Arbeit überhaupt nicht und fand auch nichts in seiner Korrespondenz mit Frey. Jürgen Neukirch war inzwischen verstorben und die Akten mit seiner mathematischen Korrespondenz waren zum größten Teil vernichtet worden, wie mir Frau Neukirch bestätigte. Bei diesem Stand der Dinge fühlte ich mich an die Geschichten

Regensburger Opern- Schauspiel- und Bänfeltruppe
gibt
am Donnerstag, dem 22. Sept. 1988,
um 8 Uhr abends
in Hörsaal 37
zum wiederholten Male:

Die verlorene Wahrheit

Eine kummervolle Tragödie
in vier Aufzügen und einer Moritat

Verzeichnis der Mitwirkenden

Herr Fermat Hr. Jannsen	Altes Mäuerchen Hr. Wingberg
Frau Fermat Hr. Wingberg	Kleines Kind Hr. Jannsen
Kummer Hr. Neukirch	Geheimagent Hr. Wingberg
Johann Hr. Tamme	Charley Hr. Jannsen
Anton Hr. Wingberg	Tante Trockendock Hr. Wingberg
Dirichlet Hr. Jannsen	Prof. Dr. Müller-Zykel Hr. Neukirch
Richter Hr. Tamme	Dr. Torf, sein Assistent Hr. Tamme
Gerichtsdienner Hr. Wingberg	Bautz, sein Assistent Hr. Jannsen
Dr. Trockendock Hr. Neukirch	Bautz, sein Assistent Hr. Wingberg
Stationsvorsteher Hr. Jannsen	

Der Chor der Regensburger Mathematiker

Schauplätze der Handlung:

1. Aufzug: Im Hause des Herrn Fermat - 2. Aufzug: Im Hause des Herrn Kummer - 3. Aufzug: Gerichtssaal - Hauptstraße von Bad Nervenruh - In der guten Stube von Tante Trockendock - Gerichtssaal - 4. Aufzug: In der Computerzentrale der Bundeswehrhochschule.
Die Moritat wird zwischen dem II. und III. Aufzug dargeboten

Der Beginn der Vorstellung wird durch ein Glockenzeichen bekanntgegeben.
Die Person zahlt 1 Mark.
Ohne Vorweisung eines Billets wird Niemandem der Eingang verweigert.

vom Ungeheuer von Loch Ness, vom Schneemenschen Yeti oder von den in Bayern so beliebten Wolpertingern erinnert. Einige hatten Gerhard Freys wissenschaftshistorisch wohl bedeutendste, aber nie publizierte Arbeit gesehen (oder besaßen sogar eine Kopie) und viele von ihr gehört. Aber an wen er sie geschickt hat und wer sie dann unter die Experten gestreut hat, das konnte ich bis zum 15. Januar 1999 nicht aufklären. Den entscheidenden Hinweis erhielt ich wenige Tage später von Klaus Röll, Dekan des Fachbereichs Physik in Kassel, der meine Laudatio auf Frey gehört hatte:¹

Am vergangenen Wochenende traf ich Herrn Prof. Dr. Tamme von der Universität Regensburg und machte ihn auf das Problem des verschwundenen Briefs aufmerksam. Herr Tamme erinnerte sich sehr genau an folgenden Vorfall:

Im Anschluß an das Theaterstück „Die verlorene Wahrheit“, in dem die Regensburger Mathematiker auf etwas skurrile Weise die Geschichte des Fermat-Problems dargestellt hatten, schrieb Herr Frey an Herrn Neukirch einen Brief und machte ihn darauf aufmerksam, daß dem Theaterstück ein neues Kapitel zugefügt werden müsse. Dies wurde begründet mit dem Hinweis auf die Taniyama-Vermutung, der jetzt

1 Brief vom 4. Februar 1999 an Klaus Barner

eine neue Bedeutung zukomme. Der mathematische Inhalt wurde in einem kurzen Begleittext mitgeteilt. Herr Tamme erinnert sich genau, daß diese Briefe in einem Oberseminar vorgelesen wurden und für eine Sensation sorgten. Aus den Indizien ist zu schließen, daß es sich bei dieser Korrespondenz um das Original des „verschwundenen Briefes“ handelte.

Dieser Brief dürfte für immer verloren sein, nicht hingegen die beigelegte Note, von der wohl zahlreiche Kopien existieren. Auch Herr Deninger, der damals an Neukirchs Oberseminar teilnahm, erinnert sich:²

Ich glaube, mich an folgendes zu entsinnen: Kurz vor dem Oberseminar gab mir Herr Neukirch den Brief von Herrn Frey zu lesen: Das Argument schien so einfach, daß ich mir vornahm, an Stelle meines Vortrages den Brief im Oberseminar auszuführen. Das gelang dann doch nicht in der kurzen Zeit, aber in jedem Fall haben wir den Brief eine Weile besprochen, bevor es dann mit dem eigentlichen Thema weiterging.

Wie und wann aber kam Gerhard Frey auf seine berühmte Idee? Und was gab den Anstoß für seinen Brief an Neukirch? Auf welche Weise sind die Fermat-Tripel a, b, c mit $a^p + b^p + c^p = 0$ überhaupt in die Theorie der elliptischen Kurven hineingeraten? Ehe wir auf diese Fragen eine Antwort suchen, kurz zur Erinnerung: Freys Idee bestand ja in Folgendem:

Angenommen, die Fermatsche Behauptung sei falsch und es gebe zu einer Primzahl $p \geq 5$ ein teilerfremdes Tripel ganzer Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ derart, daß

$$a^p + b^p + c^p = 0.$$

Genau eine der Zahlen a, b und c ist dann notwendig gerade, und dies sei etwa b ; b^p ist also mindestens durch 32 teilbar. Von den beiden anderen ist dann eine $\equiv 1 \pmod{4}$, die andere $\equiv 3 \pmod{4}$. Sei o.B.d.A. $a \equiv 3 \pmod{4}$. Dann betrachten wir die algebraische Kurve

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p). \quad (1)$$

Die Wahl von a, b und c ist so getroffen, daß die rechte Seite dieser Gleichung $\equiv x^2(x + 1) \pmod{4}$ ist. Die Kurve ist dann, wie Frey nachwies [1], eine semistabile elliptische Kurve mit dem Führer

$$N = \prod_{p|abc} p$$

und der Minimaldiskriminante

$$\Delta = \frac{(abc)^{2p}}{256}.$$

Frey hatte nun die Idee, daß die so definierte elliptische Kurve keine Weil-Kurve sei, das heißt, daß sie nicht modular sei im Sinne der Shimura–Taniyama–Vermutung. Ein Beweis dieser Vermutung wenigstens für die Klasse der semistabilen elliptischen Kurven, daß nämlich jede solche Kurve modular sei, würde daher die Nichtexistenz der Kurven von der Form (1) zur Folge haben und somit auch die Nichtexistenz des Fermat-Tripels a, b, c , mithilfe dessen sie konstruiert wurde. Der in der oben erwähnten Note mitgelieferte Beweis der Idee erwies sich als fehlerhaft (darüber weiter unten). Dies ist wohl der Grund, warum Frey sie nie publizierte.

Die Kurven (1), welche es, wie wir seit dem 19. September 1994 wissen, nicht gibt, werden in der Literatur meist „Frey-Kurven“ genannt. Das ist aber nicht ganz in Ordnung. Sie müssen „Frey-Hellegouarch-Kurven“ heißen, denn Yves Hellegouarch hat sich schon seit Ende der 60er Jahre mit diesen Kurven beschäftigt, und zwar im Zusammenhang mit einer anderen berühmten Vermutung über rationale Punkte endlicher Ordnung auf elliptischen Kurven, die bereits um 1906 von Beppo Levi aufgestellt, lange Zeit in Vergessenheit geraten und schließlich 1970 erneut von Andrew Ogg formuliert worden war. Eine ausführliche und sehr lesenswerte Geschichte dieser Vermutung haben Norbert Schappacher und René Schoof in [18] gegeben.

An der Erforschung der Torsionsgruppen elliptischer Kurven beteiligte sich sehr früh schon der junge Yves Hellegouarch [5, 6]. Bei den *Journées Arithmétiques de Bordeaux* 1969 schlug Hellegouarch in diesem Kontext erstmals vor, von einer nichttrivialen teilerfremden Lösung (a, b, c) der Fermat-Gleichung vom Grad $p \geq 5$ auszugehen und dann die Kurven

$$\begin{aligned} y^2 &= x(x - a^p)(x + b^p) \\ y^2 &= x(x + a^p)(x - b^p) \end{aligned} \quad (2)$$

zu betrachten und ihre p -Torsion zu untersuchen. (Die Auszeichnung einer der beiden Kurven (2) oder (3) als „semistabil“ wurde erst von Gerhard Frey vorgenommen.) Diese Kurven wurden von Hellegouarch in einer Reihe von publizierten Arbeiten [7, 8, 10] sowie in seiner Dissertation [9] untersucht. In seiner 2001 in zweiter Auflage erschienenen Monographie [11, S. 350] nennt er sie seine *■juments de Roland■*, seine „Stuten des Roland“, (nach der fliegenden Stute (Hippogryph) des Roland in *Orlando furioso* von Ludovico Ariosto), *c'est-à-dire qu'elles étaient douées de toutes les vertus sauf l'existence*. Hellegouarch hoffte auch, daß es Jean-Pierre Serre gelingen würde zu beweisen, daß die Existenz der *juments*

² Brief vom 18. Februar 1999 an Klaus Barner

de Roland der Vermutung von Beppo Levi widersprechen würde, eine Erwartung, die sich aber nicht erfüllte. Damit war auch die Hoffnung geschwunden, mit dieser Vermutung auch Fermats Letzten Satz als Korollar zu beweisen.

Das Thema *juments de Roland* war für Hellegouarch beendet, als es 1976 Barry Mazur gelang, Beppo Levis Vermutung zu beweisen [14]. Jedenfalls scheint Hellegouarch auf diesem Gebiet nicht mehr gearbeitet zu haben. Aber inzwischen hatte auch Gerhard Frey (Jahrgang 1944, Promotion 1969 bei Peter Roquette, Habilitation 1973, beides in Heidelberg) unabhängig von Hellegouarch die *juments de Roland* entdeckt und Gefallen an ihnen gefunden. Jedenfalls hatte er um 1974 die entscheidende Idee, warum es Rolands Stuten nicht geben kann: Diese Kurven (wenigstens die semistabile Variante) können nicht modular sein im Sinne der Vermutung von Shimura-Taniyama, und wenn diese Vermutung bewiesen wird, folgt Fermats Großer Satz. Aber wenn Frey diese Idee, wie er mir versicherte, schon 1974 hatte, dann muß man sich schon die Frage stellen, die Hellegouarch wie folgt formuliert [11, S. 353]:

Il semble étrange que la mèche ait attendu si longtemps pour faire exploser la poudrière en 1985 lorsque Frey conjectura, dans un article non publié, que les courbes $E_{A,B,C}$ liées à l'équation de Fermat ne pouvaient pas être *modulaires*.

Frey hielt nämlich mit seiner Idee keineswegs hinter dem Berg. Er erzählte vielen Kollegen davon, zuerst wohl Jürgen Neukirch. Im Jahre 1975 war Ken Ribet in Saarbrücken zu Gast, und Frey schilderte ihm seine Idee, aber Ribet zeigte sich wenig beeindruckt. Auch Freys Doktorvater Peter Roquette erinnert sich³:

Ich kann mich noch sehr genau erinnern, wie Frey eines Tages aus Saarbrücken nach Heidelberg anreiste, um mir seine neuesten Erkenntnisse mitzuteilen, nämlich daß die Fermatsche Vermutung gleichbedeutend sei mit gewissen Spezialfällen der Taniyama-Vermutung. Das muß etwa Ende der siebziger Jahre gewesen sein. Ich entsinne mich auch noch meiner eigenen Reaktion auf diese, eigentlich sensationelle Mitteilung, nämlich: Da das Fermatsche Problem derart schwierig sei, daß es sich über Jahrhunderte der Lösung widersetze, so meinte ich, daß auch die Lösung der Taniyama-Vermutung entsprechend schwierig sei und es also bei dem gegenwärtigen Stand der Kenntnis kaum aussichtsreich sei, sich mit der letzteren zu beschäftigen. Ich rechne es Frey hoch an, daß er sich durch mein damaliges Urteil, das auf meinem Studium der klassischen Versuche zum Fermat-Problem beruhete, nicht beeindrucken ließ.



Abbildung 2. Neukirch alias Kummer (l.) und Jannsen alias Dirichlet

In der Tat ließ Gerhard Frey mehrere Jahre lang keine Gelegenheit aus, jedem, der bereit war ihm zuzuhören, seine Idee zu erläutern. Bei Tagungen, Konferenzen und Forschungsaufenthalten im Ausland nutzte er jede Chance dazu, hielt allerdings nie einen Vortrag über seine Lieblingsidee. Dabei war er nicht pingelig in der Wahl seiner Schreibmaterialien, etwa Bierfilze und Hotelrechnungen, wie sich Gesprächspartner erinnern. In Günter Harders Besitz befand sich lange Jahre ein roter Tischtennisschläger mit glatter Oberfläche, auf dem Frey seine Idee mit Filzstift skizziert hatte. Besonders bemerkenswert aber ist es, daß weder Barry Mazur, mit dem er schon 1976 in Bonn und 1981 in Harvard darüber gesprochen hatte, noch Ken Ribet, dem er 1975 in Saarbrücken und 1981 in Berkeley seine Idee erläuterte, sich von ihm für diese erwärmen ließen, obwohl sie es waren, die später gemeinsam Freys Idee verifizierten.

Häufigstes Opfer von Freys Mitteilungsbedürfnis scheint aber Neukirch gewesen zu sein. Irgendwann im Herbst 1984 muß Gerhard Frey dem Jürgen Neukirch mit seiner Idee von der Nichtmodularität der Frey-Hellegouarch-Kurven (zum soundsovielten Male) wohl derart auf die Nerven gegangen sein, daß dieser seinen Freund dazu überreden konnte, seine Idee endlich einmal ordentlich aufzuschreiben. Und so geschah es. Da der Begleitbrief wohl für immer verloren ist, kann ich nur schätzen, daß er gegen Ende November 1984 in Regensburg eintraf und die Wirkung erzielte, von der ich schon berichtet habe.

Von diesem Zeitpunkt an begann sich die Nachricht von Freys nie publizierter Note unter den interessierten Kolleg(inn)en schnell auszubreiten, und es läßt sich nicht mehr rekonstruieren, wer wem davon erzählt und wer wem eine Kopie gegeben hat. Frey wurde selbst von dem einen oder anderen um ein

3 Brief vom 8. April 1998 an Bruno Bosbach

Exemplar gebeten, und es ist nicht mehr sicher zu ermitteln, ob etwa Harder seine Kopie von Neukirch oder von Frey direkt erhalten hat. Vom Max-Planck-Institut in Bonn ist die Kunde schon im Dezember 1984 nach Paris gedrungen und Jean-Pierre Serre zu Ohren gekommen, und dieser, das steht fest, hat Frey um eine Kopie gebeten und von ihm erhalten. Dazu hat Serre mir geschrieben⁴:

J'ai eu connaissance de l'idée de Frey ("Weil $\Rightarrow$ Fermat") par un petit texte de 3 pages (copie-jointe) qu'il m'a envoyé "for your amusement" en fin 84 ou début 85 (je n'arrive pas à retrouver la date exacte, mais vous devez pouvoir la reconstituer). Je me souviens avoir été immédiatement convaincu que "ça doit être vrai". Toutefois, au bout d'un jour ou deux, j'ai vu que Frey utilisait un argument sur les modèles de Néron que je savais être faux. J'ai consulté Raynaud,⁵ qui a confirmé : l'argument de Frey était faux. J'ai écrit à Frey pour l'avertir (je n'ai malheureusement pas gardé copie de ma lettre, et il semble que Frey l'ait perdue). Toutefois l'argument de Frey montrait que la représentation galoisienne mod. p associée à la courbe elliptique était très peu ramifiée. Cela m'a remis en mémoire des conjectures que j'avais faites une dizaine d'années auparavant, et que je n'avais publiées que très partiellement (dans le cas du niveau 1).⁶ Je me suis rendu compte que ces conjectures suffisaient (amplement !) à justifier l'idée de Frey. Est-ce que je le lui ai écrit à ce moment-là ? Je ne m'en souviens plus. Ma lettre à Mestre a dû être écrite un peu plus tard, pendant les vacances d'été.

Serres Brief [20] an Mestre ist vom 13. August 1985 datiert, wurde aber erst 1987 publiziert. Die darin enthaltenen Ideen müssen aber schon im Herbst 1985 bekannt geworden sein.

Freys Note und Serres Reaktion darauf sind schon bei der Oberwolfach-Tagung über nichtarchimedische Funktionentheorie im Februar 1985, an der Frey teilgenommen hat, Gesprächsstoff gewesen. Ein bislang auch von Ribet nicht identifizierter Teilnehmer dieser von Yvette Amice (Paris) und Lothar Gerritzen (Bochum) geleiteten deutsch-französischen Gemeinschaftstagung, an der zahlreiche Kolleg(inn)en aus Paris teilgenommen haben, muß Ken Ribet von dem neuesten Diskussionsstand berichtet haben⁷. Dieser erinnert sich nur, daß es bald nach der Tagung gewesen sein muß. Es sei noch Winter gewesen, denn in den Straßen von Paris habe Schnee gelegen. Noch im

gleichen Jahr konnte Ribet erste Erfolge in Richtung eines Beweises von Serres ε -Vermutung erzielen.

Wenige Tage nach seinem Vortrag im Séminaire de théorie des nombres in Paris, am 16. Dezember 1985, hat Frey dann seine vielzitierte Abhandlung „Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations“ [3] bei den Annales Universitatis Saravien-sis eingereicht. Sie ist schon in Kenntnis von Serres Brief an Mestre geschrieben und ist nicht die Note, welche *a fait exploser la poudrière*.⁸ Dafür dürfte sie die erste mathematische Arbeit sein, deren Titel ein T-Shirt ziert. Auch in Oberwolfach hat Gerhard Frey noch über seine und Serres Ideen einen Vortrag gehalten mit dem Thema „Modulare Darstellungen der Galoisgruppen von $\mathbb{Q}$, elliptische Kurven und Fermats Vermutung“, und zwar am 3. August 1986 auf der Tagung über algebraische Zahlentheorie. Es ist dieser Vortrag, an den sich einige Teilnehmer noch glauben erinnern zu können und der vermutlich auch irgendwie die Vorlage zu Simon Singhs romanhafter Darstellung geliefert hat. Aber das war nicht 1984, sondern wenige Tage vor dem Internationalen Mathematikerkongreß in Berkeley 1986, wo Barry Mazur angeblich bei einer (inzwischen legendären) Tasse Cappuccino Ken Ribet zeigte, wie dieser seinen bereits für Primzahlstufe erbrachten Beweis von Serres ε -Vermutung auf beliebige quadratfreie Stufen erweitern könnte [12, S. 984].

Eine andere Szene, neun Jahre später, bei der Fermat-Tagung über „Modular Forms and Fermat's Last Theorem“ in Boston im August 1995 habe ich miterlebt; sie ist mir bleibend im Gedächtnis geblieben: Am Ende der Konferenz, am Freitag, dem 18. August 1995, gegen 16 Uhr, hatte Andrew Wiles den letzten Vortrag mit dem Thema „Modularity of semistable elliptic curves: Overview of the proof“ fast beendet und bedankte sich bei den anwesenden Kollegen, die wichtige Vorarbeiten geleistet und entscheidende Ideen beigesteuert hatten: bei Barry Mazur, bei Ken Ribet und zuletzt bei Gerhard Frey. Ihm dankte er dafür, daß er den entscheidenden Hinweis auf die Verbindung zwischen der Fermat-Vermutung und der Shimura-Taniyama-Vermutung gegeben habe, und legte ihm dann nahe, ob er sich nicht darum kümmern wolle, einen ähnlichen Brückenvorschlag für „those zeros“, für jene Nullstellen zu machen. Gemeint waren natürlich die Nullstellen der Riemann-

⁴ Brief vom 22. November 1999 an Klaus Barner

⁵ Die handschriftlichen Bemerkungen in der auf S. 38 abgebildeten Note Freys stammen von Michèle Raynaud.

⁶ Es handelt sich um die Arbeit [19].

⁷ Vielleicht hat Ribet später geglaubt, Frey habe bei dieser Tagung sogar einen Vortrag über sein Lieblingsthema gehalten, was allerdings nicht der Fall war. Dies würde seine Darstellung in [16, S. 575], erklären.

⁸ Allerdings ist mir Andrew Wiles in der Nacht vom 7. auf den 8. Januar 1999 im Traum erschienen, hat ganz ernst den Kopf geschüttelt und gesagt: *The zeros of the L-series attached to the elliptic curves at $s = 1$, I meant the Birch & Swinnerton-Dyer conjecture.* Gerhard Frey hat mir freilich zu bedenken gegeben, daß Wiles das nicht im Ernst gemeint haben könnte.

schen Zetafunktion.⁸ Jedenfalls, sollte Gerhard Frey erneut einen so interessanten Brief verfassen, der diesmal die entscheidende Idee zum Beweis der Riemannschen Vermutung enthält, so wird er hiermit höflichst gebeten, sicherheitshalber eine Kopie davon beim Herausgeber der *Mitteilungen* zu hinterlegen.

Literatur

- [1] Frey, Gerhard, *Rationale Punkte auf Fermatkurven und gewristete Modulkurven*. J. Reine Angew. Math. 331 (1982), 185–191
- [2] Frey, Gerhard, *Elliptic curves and solutions of $A - B = C$* . Séminaire de Théorie des Nombres (Paris 1985–86). Progress in Mathematics 71, Birkhäuser, Boston, 1987, pp. 39–51
- [3] Frey, Gerhard, *Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations*. Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae, 1 (1986), 1–40
- [4] Geyer, Wulf-Dieter, *Besprechung von Cornell, G. Silverman, J. H., Stevens, G. (Editors), Modular Forms and Fermat's Last Theorem*. Jahresbericht der DMV 103 (2001), Heft 1, 2. Abteilung, 1–3
- [5] Hellegouarch, Yves, *Une propriété arithmétique des points exceptionnels d'ordre pair d'une cubique de genre 1*. C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 5989–5992
- [6] Hellegouarch, Yves, *Applications d'une propriété arithmétique des points exceptionnels d'ordre pair d'une cubique de genre 1*. C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 6256–6259
- [7] Hellegouarch, Yves, *Étude des points d'ordre fini des variétés abéliennes de dimension un définies sur un anneau principal*. J. reine angew. Math 244 (1970), 20–36
- [8] Hellegouarch, Yves, *Points d'ordre fini sur les courbes elliptiques*. C.R. Acad. Sc. Paris 273 (1971), 540–543
- [9] Hellegouarch, Yves, *Courbes elliptiques et équation de Fermat*. Thèse, Besançon, 1972
- [10] Hellegouarch, Yves, *Points d'ordre $2p^k$ sur les courbes elliptiques*. Acta Arith. 26 (1975), 253–263
- [11] Hellegouarch, Yves, *Invitation aux Mathématiques de Fermat-Wiles*. Dunod, Paris, 2001
- [12] Jackson, Allyn, *Fermat fest draws a crowd*. Notices of the AMS 40 (1993), 982–984
- [13] Levi, Beppo, *Sull'equazione indeterminata del 3° ordine*. Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici 1908, Accademia Nazionale dei Lincei Bd.2, Roma, 1909, 175–177
- [14] Mazur, Barry, *Modular curves and the Eisenstein ideal*. Publ. Math. IHES 47 (1977), 33–186
- [15] Ribenboim, Paulo, *Recent results about Fermat's last theorem*. Expositiones Mathematicae 5 (1987), 75–90
- [16] Ribet, Kenneth A., *Wiles proves Taniyama's conjecture; Fermat's Last Theorem follows*. Notices of the AMS 40 (1993), 575–576
- [17] Schappacher, Norbert, *Der Beweis von Fermats Großem Satz – eine Literaturübersicht*. Mathematische Semesterberichte 45 (1998), 113–123
- [18] Schappacher, Norbert & René Schoof, *Beppo Levi and the arithmetic of elliptic curves*. The Mathematical Intelligencer 18 (1996), 57–69
- [19] Serre, Jean-Pierre, *Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo l*. Astérisque 24/25 (1975), 109–117
- [20] Serre, Jean-Pierre, *Lettre à J.-F. Mestre*. Contemporary Mathematics 67 (1987), 263–268
- [21] Serre, Jean-Pierre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* . Duke Mathematical Journal 54 (1987), 179–230
- [22] Singh, Simon, *Fermat's Last Theorem. The story of a riddle that confounded the world's greatest minds for 358 years*. Fourth Estate, London, 1997

Adresse des Autoren

Prof. Dr. Klaus Barner
Fachbereich Mathematik-Informatik
Universität Kassel
34109 Kassel
klaus@mathematik.uni-kassel.de