



Teacher's corner – kurze Beweise mit langer Wirkung

Im letzten Heft starteten wir eine neue Kolumne, welche ungewöhnlich kurze Beweise oder prägnante Konzepte sammelt, unmittelbar geeignet für den Einsatz in der Lehre. Es gab positive Resonanz und gleich einen weiteren Beitrag. (FB)

No. 2: Woher kommen eigentlich die Bernoulli-Zahlen? Die Bernoulli-Zahlen

$$(B_k)_{k \geq 0} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \dots),$$

definiert durch

$$\tau(t) = \frac{t}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k, \quad (1)$$

treten z. B. in der *Euler-MacLaurin'schen Summenformel* auf:

$$\sum_{x=1}^n f(x) = \int_0^n f(x) dx + \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)) + R_N. \quad (2)$$

Was hat die Funktion t mit Summation zu tun? Folgendes Folklore-Argument macht dies – im Unterschied zum üblichen Induktionsbeweis – unmittelbar klar: Bekanntlich ist die Exponentialfunktion die Mutter aller Mathematik. Betrachten wir also, für $t > 0$, das Integral $\int_{-\infty}^0 e^{tx} dx = 1/t$ und die Summe $\sum_{x=-\infty}^0 e^{tx} = 1/(1 - e^{-t})$. Man sieht

$$\sum_{x=-\infty}^0 e^{tx} = \tau(t) \int_{-\infty}^0 e^{tx} dx. \quad (3)$$

Also: τ vermittelt zwischen Integration und Summation, zumindest für die Exponentialfunktion.

Aus (3) leiten wir nun (2) für den Fall her, dass f ein Polynom vom Grad höchstens N ist, in diesem Fall verschwindet das Restglied R_N : Multiplizieren wir (3) mit e^{nt} , $n \in \mathbb{N}$, indizieren Summe und Integral um und subtrahieren (3), so folgt

$$\sum_{x=1}^n e^{tx} = \tau(t) \int_0^n e^{tx} dx. \quad (4)$$

Dies ist eine Identität zwischen drei Potenzreihen in t . Wir setzen nun formal

$$t = \frac{d}{dh},$$

wobei h eine zusätzliche Variable bezeichnet. Nach dieser Ersetzung wird (4) zu einer Identität zwischen (formalen) Differentialoperatoren. Wenden wir sie auf ein Polynom p in der Variablen h an, so sind alle Summen endlich. Die Taylor'sche Formel $p(h+x) = p(h) + xp'(h) + \frac{x^2}{2!}p''(h) + \dots$ lässt sich schreiben als

$$\left(e^{x \frac{d}{dh}} p\right)(h) = p(h+x).$$

Aus (4) folgt also

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n p(h+x) &= \tau\left(\frac{d}{dh}\right) \int_0^n p(h+x) dx \\ &= \tau\left(\frac{d}{dh}\right) \int_h^{n+h} p(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir sind fast fertig. Mit $I(h) = \int_h^{n+h} p(x) dx$ ist $I(0) = \int_0^n p(x) dx$, $I'(0) = p(n) - p(0)$, $I''(0) = p'(n) - p'(0)$ etc. nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Setzen wir also in (5) die Potenzreihe (1) für τ ein und werten bei $h = 0$ aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n p(x) &= B_0 \int_0^n p(x) dx + B_1(p(n) - p(0)) \\ &\quad + \frac{B_2}{2!}(p'(n) - p'(0)) + \dots \end{aligned}$$

Das ist genau die Euler-MacLaurin'sche Formel.

Als Ehrenrettung für den üblichen Induktionsbeweis von (2) sei erwähnt, dass dieser auch eine Formel für das Restglied R_N liefert, für nicht-polynomiales f .

Adresse des Autors

PD Dr. Daniel Grieser
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Rudower Chaussee 25
10099 Berlin
grieser@mathematik.hu-berlin.de