

Eulers *Speculum Musicum* und das Instrument mutabor

von Rudolf Wille

Als Leonhard Euler 1741 einem Ruf Friedrichs des Großen an die Berliner Akademie der Wissenschaften folgte, hatte er schon mit dem *Tentamen novae theoriae musicae* [1, S. 197–427] sein Hauptwerk über Musik veröffentlicht. Über dieses Werk schrieb der 24-jährige Euler 1731 an seinen Lehrer Johann I. Bernoulli:

Mein Endzweck in diesem Werke war dieser, daß ich suchte die Musik als einen Theil der Mathematik auszuführen, und alles was eine Zusammenfügung und Vermischung der Thöne kann angenehm machen, aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten. [2, S. XLVI]

Grundlage bei diesem Versuch war die Lehre von den Entsprechungen von Ton und Zahl in harmonischen, melodischen und rhythmischen Vorgängen der Musik. In den Berliner Jahren hat Euler seine neue Musiktheorie in den 1768 veröffentlichten *Briefen an eine Deutsche Prinzessin*, die an Friederike Markgräfin von Brandenburg-Schwedt gerichtet waren, erläutert und dabei seine ästhetische Leitvorstellung folgendermaßen beschrieben:

Je einfacher ein Verhältnis ist, durch je kleinere Zahlen es ausgedrückt wird, desto deutlicher kann es wahrgenommen werden, und desto angenehmer ist seine Wirkung. [2, S. XLV]

Den Grad der Annehmlichkeit (*gradus suavitatis*) solcher Wirkungen definierte Euler zunächst für die natürlichen Zahlen n anhand ihrer Primzahlzerlegung $n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ durch

$$G(n) := a_1(p_1 - 1) + \cdots + a_m(p_m - 1) + 1.$$

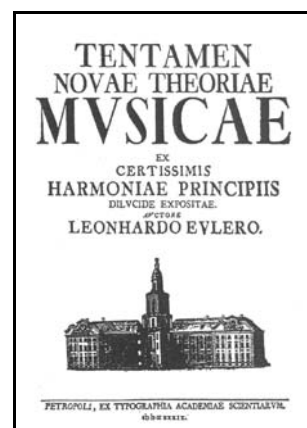
Für die ersten 16 natürlichen Zahlen ergeben sich damit folgende Grade der Annehmlichkeit:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$G(n)$:	1	2	3	3	5	4	7	4	5	6	11	5	13	8	7	5

Für eine endliche Menge natürlicher Zahlen mit 1 als größtem gemeinsamen Teiler wird der Grad der Annehmlichkeit als der Grad des kleinsten gemeinsamen Vielfachen dieser Zahlen definiert. Die Quinte 2 : 3 erhält somit den Grad 4, die Quarte 3 : 4 den Grad 5, die große Terz 4 : 5 den Grad 7 und der Durdreiklang 4 : 5 : 6 den Grad 9. (vgl. [3, S. 136 ff.])

In seiner Schrift *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([1], S. 508–515), die Euler 1760 der Berliner Akademie vorlegte, diskutiert er vor allem das „phénomène paradox“ des Dominantseptakkords 36 : 45 : 54 : 64, der angesichts seines Wohlklangs mit 17 einen zu hohen Grad der Annehmlichkeit zu haben scheint. Da der Akkord 4 : 5 : 6 : 7 mit dem Grad 15 sich von 36 : 45 : 54 : 64 (wegen $36 : 45 : 54 : 63 = (4 \cdot 9) : (5 \cdot 9) : (6 \cdot 9) : (7 \cdot 9)$) nur in der Septime um das Mikrointervall 63 : 64 unterscheidet, nahm Euler an, daß beim Hören des Dominantseptakkords die 64 durch die 63 „substituiert“ wird. Diese Annahme gründet Euler auf seine *Substitutionstheorie des musikalischen Hörens*, nach der komplexe Tonverhältnisse in einfachere Verhältnisse zurechtgehört werden. Die Substitutionstheorie liefert Euler nicht nur eine Rechtfertigung seiner zahlentheoretischen Definition des „gradus suavitatis“, sondern eröffnet die Einsicht, dass der gemeinsame Ort von Musiktheorie und Mathematik mehr im menschlichen Bewusstsein als in der physikalischen Akustik zu sehen ist (vgl. [4, S. 10f.]).

Die Einbeziehung der Primzahl 7 bei seiner idealtypischen Analyse des Septakkordes brachte Euler dazu¹, in seiner letzten musiktheoretischen Arbeit *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* ([1], S. 568–586) von 1773 die Zahlen 1, 2, 3, 5 und 7 als die „Säulen der Harmonie“ zu be-



1 Siehe auch die 1764 vorgelegte Arbeit *Du véritable caractère de la musique moderne*, [1], S. 516–539.

zeichnen. In der Hauptsache wird in dieser Arbeit systematisch beschrieben, wie Töne und Intervalle mit Oktave (1 : 2), Quinte (2 : 3) und großer Terz (4 : 5) gebildet und dargestellt werden können; dabei wird ein zweidimensionales Schema des chromatischen Tonbestandes, das sogenannte „speculum musicum“, auf zweifache Weise präsentiert (s. Abb. 2 und 3).

Per tertiam ascendendo	Per quintam ascendendo			
	F,	C,	G,	D
	A,	E,	H,	Fis
	Cis,	Gis,	Dis,	B
	100,	150,	$112\frac{1}{2}$,	$168\frac{1}{4}$

Abb. 2. Das *speculum musicum* in [1, S. 575 (§13)]

Bevor auf die weitere Geschichte von Eulers *speculum musicum* eingegangen wird, soll kurz wiedergegeben werden, wie Zeitgenossen auf Eulers mathematische Musiktheorie reagiert haben. Für viele Musiker war Eulers Theorie zu mathematisch, was zum Teil zu heftigen Abwehrreaktionen führte. So war für J. Mattheson „der ganze Zahlenkram ein ebenso schädliches, als mühsames und subtiles Hirngespinnst“; diese Meinung veranlasste ihn, die mathematisch orientierten Musiktheoretiker mit ganzen Kaskaden von Schimpfwörtern zu überschütten:

Diesen Satz aber, daß ein richtiges, nämlich vernünftiges Gehör allein, und nicht die Mathematik sowohl den ersten, als letzten Ausspruch in allen musikalischen Dingen thun ... muß, den sollen mir stehen und fest bleiben lassen die pythagoreische, ptolemäische, euklidische und alle andere altmathematische Schulen, auch alle neue Zahl-, Meß- und Gewichtkrämer, mit ihren Tabellen, Generalbaßmaschinen und Gerüsten; alle versunkene Algebristen; erstarrte Contrapunctisten; schulfüchsige Proportions-Leiter- und Rations-Händler; Verhältnißfechter; kahle Temperaturflicker; ohnmächtige Melodienspinner; gesanglose Hümpfer und Stümper; hölzerne Notenklecker; nüchterne Pedalritter; abgeschmackte Grillenfänger; hirnsüchtige Pedanten; wahnwitzige Gemüthsbeweger, samt übrigen anarmonischen Grimm-bärten; scheinheiligen Brummbären ... ([3, S. 289])

29. Simili modo transitus magis complicatos, qui sunt
 $+ V + V + V \pm III, + V + V \pm III \pm III, + V + V + V \pm III \pm III,$
 facile evolvere liceret; verum omnes huiusmodi transitus multo clarius et concinnius obtutui repraesentari possunt per schematismum supra § 13 allatum, quem ergo ad hunc scopum accommodatum ob eximium eius usum *speculum musicum* adpellare liceat:

F	—	C	—	G	—	D
A	—	E	—	H	—	Fis
Cs	—	Gs	—	Dis	—	B

Hoc scilicet speculum inspicienti statim patet, quinam saltus a quolibet sono ad quemlibet alium perducant, simulque, quot modis quilibet transitui institui possit; tantum enim secundum ductum linearum sive horizontalium sive verticalium est procedendum, ubi horizontales saltum per quintam, verticales autem per tertiam declarant.

Abb. 3: Die zweite Darstellung und Erläuterung des *speculum musicum* in [1, S. 584 (§ 29)]

Buchstaben-Tonschrift.

-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1+	2+	3+	4+	5+	6+	7+	8+
<u>d</u>	<u>a</u>	<u>e</u>	<u>h</u>	<u>fis</u>	<u>cis</u>	<u>gis</u>	<u>dis</u>	<u>ais</u>	<u>eis</u>	<u>his</u>	<u>fisis</u>	<u>cisis</u>	<u>gis</u>	<u>dis</u>	<u>ais</u>	<u>eis</u>
<u>b</u>	<u>f</u>	<u>c</u>	<u>g</u>	<u>d</u>	<u>a</u>	<u>e</u>	<u>h</u>	<u>fis</u>	<u>cis</u>	<u>gis</u>	<u>dis</u>	<u>ais</u>	<u>eis</u>	<u>his</u>	<u>fisis</u>	<u>cisis</u>
ges	des	as	es	b	f	c	g	d	a	e	h	fis	cis	gis	dis	ais
eses	bb	fes	ces	ges	des	as	es	b	f	c	g	d	a	e	h	fis
ceses	geses	deses	ases	eses	bb	fes	ces	ges	des	as	es	b	f	c	g	d

Abb. 4: Die Buchstaben-Tonschrift von A. von Öttingen dargestellt als *speculum musicum*

Als Beispiel einer positiven Reaktion sei hier L. Mizler zitiert, der in seiner „Musikalischen Bibliothek“ von 1746 an Euler appellierte:

Nun bitte Herr Eulern gar sehr, er möchte doch zur Beförderung der musikalischen Wissenschaften darthun, daß noch mehr Verhältnisse in unserer Musik von Primzahlen sind, ausser den angegebenen; Wo er nur die Möglichkeit erweisen wird, so will ich ihn für den Apollo in der Musik halten, ... [3, S. 299]

Nach Meinung des Musikwissenschaftlers M. Vogel hat sich Euler diesen Titel eines „Apollo in der Musik“ redlich verdient und zwar durch seine beiden musiktheoretischen Arbeiten für die Berliner Akademie, in denen er die Primzahl 7 als eine der Säulen der musikalischen Harmonie begründet [3], S. 299].

Wenn auch die Primzahl 7 bis heute als „Säule der Harmonie“ wenig Anerkennung gefunden hat, ist Eulers Substitutionstheorie mit ihrer These des Zurechthörens von Tonhöhen zum Allgemeingut geworden. (Wie sollte man anders erklären, warum wir Mozarts Musik auf einem temperierten Klavier gespielt als tonal wahrnehmen können?) Dass auch sein aus Primzahlen aufgebautes Tonsystem bis heute bedeutsam geblieben ist, soll am Fortleben von Eulers *speculum musicum* verdeutlicht werden.

Das *speculum musicum* wurde in der Mitte des 19. Jahrhunderts durch A. von Öttingen wiederentdeckt und durch H. von Helmholtz in der musikalischen Akustik durchgesetzt. In seiner Buchstaben-Tonschrift verwendet von Öttingen Über- und Unterstreichungen, um Abwärts- und Aufwärtsveränderungen durch das syntonische Komma 80 : 81 kenntlich zu machen (s. [5], S. 5ff.): In Abb. 4 kann man die Tonnamen als Benennung für die Töne der kleinen Oktave auffassen, wobei die nicht über- oder unterstrichenen Tonnamen die aus dem Ton c durch Oktav- und Quintveränderungen abgeleiteten Töne der kleinen Oktave repräsentieren; das Intervall c : e hat das Verhältnis 64 : 81, jedoch c : e das Verhältnis 4 : 5, was $80 : 81 = (5 : 4) \cdot (64 : 81)$ für e : e ergibt; entsprechend erhält man 80 : 81 für das Intervall e : g usw. Jeder Tonname in Abb. 4 benennt einen Ton, dessen Intervall zu dem Ton c ein durch die Primzahlen 2, 3 und 5 ausdrückbares Verhältnis hat. Da ein solches Verhältnis eindeutig durch das Produkt

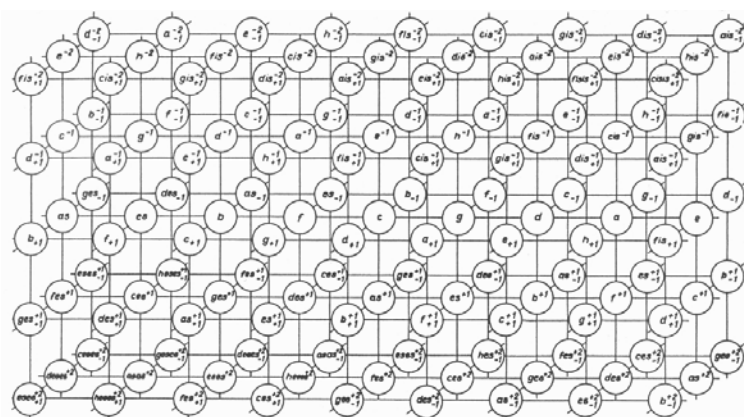


Abb. 5: Das dreidimensionale *speculum musicum* erzeugt von 3er-, 5er- und 7er-Intervallen

seiner Potenzen von 3 und 5 bestimmt ist, entspricht jedem Tonnamen eindeutig ein Ausdruck $3^x 5^y$, bei dem x und y ganze Zahlen sind.

Der Musikwissenschaftler M. Vogel schlägt in seinem Buch *Die Lehre von den Tonbeziehungen* statt der Über- und Unterstreichungen ganzzahlige Exponenten vor, die anzeigen, um wie viele syntonische Kommas der Ton mit dem Basisnamen erniedrigt bzw. erhöht wird ([3], S. 104). Bezieht man noch die Primzahl 7 als „Säule der Harmonie“ mit ein, wofür sich Vogel seit seiner sehr lesenswerten Dissertation „Die Zahl Sieben in der spekulativen Musiktheorie“² auf vielfältige Weise eingesetzt hat, dann erhält man ein dreidimensionales *speculum musicum*, wie es in Abb. 5 dargestellt ist (die tiefstehenden Indices zeigen an, um wieviele septimale Kommas 63:64 der Ton mit dem Basisnamen erniedrigt bzw. erhöht wird).

Das dreidimensionale *speculum musicum* eignet sich insbesondere dazu, die Eulersche Lehre von den Tongeschlechtern zu veranschaulichen. Nach dieser Lehre hat der „Genus“ $2^m \cdot 3^p \cdot 5^q \cdot 7^r$ vom Grad $n := p + q + r$ einen Tonbestand, der durch die Zahlenmenge $\{2^m \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z \mid m, x, y, z \text{ ganzzahlig mit } 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r\}$ gekennzeichnet ist. Um die Eulerschen Genera musikalisch erfahrbar zu machen, ließ der holländische Physiker A. D. Fokker um 1950 die im Haarlemer Museum Teyler stehende Orgel in gleichstufiger 31-Tonstimmung mit zwei Spieltischen bauen, von denen der eine zwei Manuale

und Pedal mit jeweils 31 Tasten in der Oktave hat³ (die 7-er Intervalle werden durch eine Oktavteilung in 31 gleiche Stufen sehr viel besser approximiert als durch die übliche Oktavteilung in 12 gleiche Stufen).

Eulers *speculum musicum* ist bis heute die überzeugendste Darstellung der *Tonvorstellungen in Reiner Stimmung*, bei denen die Grundintervalle durch Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen gekennzeichnet sind.⁴ Wie inspirierend diese Tondarstellung sein kann, habe ich selbst in meinem Musikstudium und meinen späteren musiktheoretischen Forschungen erfahren. So bildete das dreidimensionale Tonnetz in Abb. 5 die Grundlage meiner Staatsexamensarbeit zum Thema „Die Erweiterung des harmonischen Tonsystems mit dem 7. Oberton“.⁵ In einem langjährigen Forschungsvorhaben „Mathematische Musiktheorie“ ist später umfassender eine „extensionale Standardsprache der Musiktheorie“ entwickelt worden,⁶ was ohne das Eulersche Gedankengut wohl kaum geschehen wäre.

Das Bestreben, die im *speculum musicum* repräsentierte Reine Stimmung auf einem Tasteninstrument verfügbar zu machen, hat zu der Entwicklung des computergesteuerten Musikinstruments MUTABOR (MUTierende Automatisch Betriebene ORgel) geführt⁷, das zum Salzburger Musikgespräch 1984

² Phil. Fak., Univ. Bonn, 1955.

³ B. J. A. Pels: L'orgue accordé en cinquièmes de ton du Musée Teyler à Haarlem. *Archives du Musée Teyler*, Série III, Vol. 10 (1951), S. 173–181.

⁴ vgl. *Riemann Musiklexikon*. 12. Aufl. Sachteil, Artikel: Reine Stimmung. B. Schott's Söhne, Mainz 1967.

⁵ Staal. Hochschule f. Musik, Frankfurt 1962.

⁶ s. R. Wille: *Mathematische Sprache in der Musiktheorie*. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980. Bibl. Inst., Mannheim 1980, S. 167–184; W. Neumaier, R. Wille: *Extensionale Standardsprache der Musiktheorie – eine Schnittstelle zwischen Musik und Informatik*. In: H.-P. Hesse (Hrsg.): *Mikrotöne III*. Edition Helbing, Innsbruck 1990, S. 149–167.

⁷ s. B. Ganter, H. Hempel, R. Wille: *MUTABOR – Ein rechnergesteuertes Musikinstrument zur Untersuchung von Stimmungen*. *ACUSTICA* 57 (1985), S. 284–289.



Abb. 6: Musikbeispiel von M. Planck zur Problematik der Reinen Stimmung

(Thema: „Musik und Mathematik“) erstmals der Öffentlichkeit vorgestellt wurde. Mit MUTABOR wurde an der TH Darmstadt M. Vogels originäre Idee realisiert, die übliche Klaviatur über eine Automatik so mit Tonerzeugern zu verbinden, dass sich nach Tastenanschlag (ohne wahrnehmbare zeitliche Verzögerung) die jeweils gewünschten Tonhöhen von selbst einstellen [3, S. 343 ff.]. Für das jeweilige Berechnen der aktuellen Tonhöhen muß ein Programm in MUTABOR aktiviert werden, das „mutierende Stimmungslogik“ genannt wird. Prinzip einer solchen Stimmungslogik ist, „dass nach gewähltem Anfangszustand die jeweils aktuellen Tonhöhen auf der Grundlage der vorangegangenen Tonereignisse und der momentan angeschlagenen Tasten berechnet werden, d. h. beim Spielen auf MUTABOR ist für die gegenwärtige Einstimmung jeweils die Vergangenheit maßgebend. Wenn man auch in Hinblick auf eine zu antizipierende Zukunft einstimmen möchte, muss man ggf. wie beim Registerwechsel auf einer Pfeifenorgel eine neue Stimmungslogik wählen“ [6, S. 384 f.].

Auch wenn sich die bisher entwickelte mathematische Musiktheorie auf der Grundlage des *speculum musicum* als hilfreich für den Entwurf und die Programmierung von Stimmungslogiken erwiesen hat, sind damit die Probleme der Realisierung von tonaler Musik in Reiner Stimmung noch längst nicht bewältigt. Schon 1893 veröffentlichte der Physiker M. Planck das Beispiel in Abb. 6 [7, S. 435], bei dem, wenn die Durdreiklänge rein eingestimmt werden und sich die Tonhöhe von liegenbleibenden Tasten nicht ändert, die Grundtöne der aufeinanderfolgenden Durdreiklänge folgende Sequenz ergeben: $c - f - b - g^{-1} - c^{-1} - f^{-1} - b^{-1} - es^{-1} - as^{-1} - f^{-2} - d^{-3} - g^{-3} - c^{-3} - a^{-4} - fis^{-5} - h^{-5} - e^{-5} - a^{-5} - d^{-5} -$

$g^{-5} - c^{-5}$. Das Absinken vom c-Durdreiklang zum c^{-5} -Dreiklang um fünf syntonische Kommas (mehr als eine Halbtonstufe) wurde M. Planck von einem Testchor bestätigt. Bis heute ist ungeklärt, welche Komma-Schwankungen bei Musik in Reiner Stimmung vorstellbar bzw. wünschenswert sind und welche nicht.

Experimente mit MUTABOR haben gezeigt, dass Musiker oft unterschiedliche Vorstellungen davon haben, wie Akkordfolgen jeweils einzustimmen sind. Das veranlasste, eine musikergerechte Programmiersprache zu entwickeln, mit der Musiker selbst die von ihnen gewollten Stimmungslogiken programmieren können⁸. In den letzten Jahren ist die MUTABOR Software am Institut für Algebra der TU Dresden auf Windows-Plattformen übertragen und weiterentwickelt worden.⁹; diese MIDI-Software für Windows ist als freie Forschungssoftware kostenlos erhältlich unter <http://www.math.tu-dresden.de/~mutabor>. Vielfache Beachtung fand die neue MUTABOR Software auf der CeBIT'99, wozu insbesondere die Uraufführung von K. Gundermanns „Vier Miniaturen für Mutabor“ beigetragen hat.

Literatur

- [1] Leonhardi Euleri Opera Omnia. Serie III, Band 1. Leipzig und Berlin 1926.
- [2] M. Vogel: Die Musikschriften Leonhard Eulers. In: *Euleri Opera Omnia*. Serie III, Band 11. Zürich 1960, S. XLIV–LX.
- [3] M. Vogel: *Die Lehre von den Tonbeziehungen*. Verlag für systematische Musikwissenschaft. Bonn – Bad Godesberg 1975.
- [4] R. Wille: Musiktheorie und Mathematik. In: H. Götze, R. Wille (Hrsg.): *Musik und Mathematik*. Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von H. von Karajan. Springer-Verlag, Heidelberg 1985, S. 4–31.
- [5] A. von Öttingen: Das duale Harmoniesystem. Verlag von C.F.W. Siegel's Musikalienhandlung, Leipzig 1913.
- [6] R. Wille: MUTABOR – ein Medium für musikalische Erfahrungen. In: M. Warnke, W. Coy, G. C. Tholen (Hrsg.): *Hyperkult: Geschichte, Theorie und Kontext digitaler Medien*. Stroemfeld Verlag, Frankfurt 1997, S. 383–391.
- [7] M. Planck: Die natürliche Stimmung in der modernen Vokalmusik. *Vierteljahrsschrift für Musikwissenschaft* 9 (1893), 418–440.

Anschrift des Autors

Prof. Dr. Rudolf Wille
 Fachbereich Mathematik
 Technische Universität Darmstadt
 64289 Darmstadt
wille@mathematik.th-darmstadt.de

⁸ s. C. Misch, R. Wille: Stimmungslogiken auf MUTABOR: Eine Programmiersprache. In: F. Richter Herf (Hrsg.): *Mikrotöne II*. Edition Helbing, Innsbruck 1988, S. 87–94; V. Abel, P. Reiss, R. Wille: MUTABOR II – Ein computergesteuertes Musikinstrument zum Experimentieren mit Stimmungslogiken und Mikrotönen. *Musikinformatik und Medientechnik*, Universität Mainz, Bericht 34 (1998), S. 3–9.

⁹ dazu: Institut für Algebra: Mutabor: Das dynamisch temperierte Klavier. TU Dresden 1999. (Kontaktadresse: Prof. Dr. B. Ganter, Tel. (0351) 463-5355, Fax (0351) 463-4235)