Stiftungen gefördert, und 19 Teilnehmer verbrachten einen Teil des Studiums im Ausland. Lediglich 6 Studenten beendeten ihr Studium nach 8 bzw. 9 Semestern.

Die nächste Studentenkonferenz wird vom 4. September bis zum 6. September 1997 in Halle stattfinden.

Adresse des Autors:
Prof. Dr. H.-J. Schmeißer
Mathematisches Institut
FSU Jena
07740 Jena

„Meine Göttinger Lehrjahre"

von Bartel L. van der Waerden

(Gastvortrag in der Algebravorlesung, gehalten am 26.1.1979 in Heidelberg)

Im Jahre 1919 habe ich in Amsterdam mit meinem Studium angefangen. Ich hatte an der Universität Amsterdam sehr gute Lehrer. Erstens mal Henrik de Vries, den ich sehr geschätzt habe. Er hat u. a. eine Vorlesung über Algebra gelesen, eine traditionelle Algebra-Vorlesung, wie es damals üblich war. Er behandelte Determinanten und symmetrische Funktionen und Resultanten, dann den Trägheitsindex einer quadratischen Form mit reellen Koeffizienten und die Lösungen der kubischen Gleichung nach Cardano und die Lösung der biquadratischen Gleichung mit Hilfe von Kubikwurzeln und Quadratwurzeln, den Satz von Sturm über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellem Koeffizienten, mit dem man durch einen bestimmten Formalismus von sukzessiven Divisionen von vornherein, also bevor man die Gleichung gelöst hat, entscheiden kann, wieviele reelle Wurzeln die Gleichung hat. Sturm, der, wie ich glaube, Professor in Lausanne oder in Genève war, der pflegte, wenn er in seiner Vorlesung diesen Satz behandelte, zu sagen: „le théorème d'ont j'ai l'honneur de porter le nom", „das Theorem, dessen Namen zu tragen ich die Ehre habe." Ein sehr schöner Satz.

Die projektive Geometrie wurde in Amsterdam besonders gepflegt, das war das Lieblingsthema des 19. Jahrhunderts; ein wunderschönes Gebäude, was jetzt, wie ich gehört habe, fast nicht mehr betreten wird; wie zum Beispiel die Erzeugung der Kegelschnitte nach Steiner aus zwei projektiven Strahlenbüscheln. Das Buch von Reye „Die Geometrie der Lage" habe ich damals mit Begeisterung gelesen. Darauf aufbauend wurde auch die abzählende Geometrie behandelt. Henrik de Vries gab eine Vorlesung über die abzählende Geometrie, er richtete sich nach dem Buch von Schubert „Kalkül der abzählenden Geometrie". Der Zweck der abzählenden Geometrie ist, die Anzahl der Lösungen eines geometrischen Problems zu bestimmen. Das ist manchmal wichtig; es gibt zum Beispiel das Theorem von Bezout — einer der ältesten Sätze der algebraischen Geometrie — das besagt, daß zwei ebene Kurven vom Grade m und vom Grade n genau $m \cdot n$ Schnittpunkte haben, vorausgesetzt, daß man mehrfache Schnittpunkte auch mit den richtigen Multiplizitäten zählt. Das ist ein sehr wichtiges Theorem. Schubert hat den Kalkül der abzählenden Geometrie mit Virtuosität ausgebaut, so daß er zum Beispiel die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt hat. Das Problem war: wieviele Kegelschnitte im Raum gibt es, die acht gegebene windschiefe Geraden schneiden? Das hat er gelöst, das gibt die Zahl 92. Eine Kuriosität will man sagen, aber die Methoden der abzählenden Geometrie sind doch sehr wichtig geworden. Nur leider waren die Beweise, die Schubert gab, gar keine Beweise im heutigen Sinn. Die Algebraiker haben das nie als richtig anerkannt, auch zur Zeit von Schubert. Die Beweise oder Berechnungen von Schubert beruhen auf dem sogenannten Prinzip der Erhaltung der Anzahl. Dieses Prinzip besagt, daß die Anzahl der Lösungen eines geometrischen Problems sich nicht ändert, wenn die Daten des Problems geändert werden. Eine Anwendung des Prinzips wird Ihnen klar machen, was da gemeint ist. Man hat vier windschiefe Geraden im Raum und fragt: wieviele Geraden gibt es, die diese vier schneiden? Wieviele Transversalen gibt es? Die Antwort ist: es gibt 2 Lösungen des Problems, 2 Transversalen: Und Schubert beweist das so: ändern wir die Daten mal ein wenig und nehmen wir an, daß 2 von den gegebenen Geraden einander schneiden, also in einer Ebene liegen, und daß zwei weitere von den gegebenen Geraden einander auch schneiden. Dann wird eine Gerade, die alle vier schneidet, entweder Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte sein oder die Schnittgerade der beiden Ebenen — die beiden einzigen Möglichkeiten offensichtlich, also gibt's hier zwei Lösungen, also gibt's auch im allgemeinen Fall zwei Lösungen. Das ist die Betrachtung von Schubert.

die Nun ist dabei ein Haken. Man kann unter gewissen Voraussetzungen das Prinzip der Erhaltung der Anzahl sogar genau formulieren und beweisen, aber es kann sein, daß bei der Spezialisierung Lösungen zusammenrücken. Da muß man also im Spezialfall die Lösungen mehrfach zählen. Und wie man diese Multiplizitäten bestimmt, überhaupt wie man sie definiert, das hat Schubert nicht gesagt, und aus dem Grund sind alle seine Beweise unstreng. Und doch sind sie irgendwie überzeugend. Es gibt da einen Ausspruch, den Julius Caesar macht, in einem Stück von Bernard Shaw. Der sagt zu Apollodorus — ich glaube, er hieß so — „What you say has an olympian ring in it; it must be true for it is fine art“. Und so hat man auch bei Schubert den Eindruck, it must be true. Und in der Tat stimmt die Zahl 92. Ganz rezent in den letzten Jahren hat man bewiesen, daß die Zahl 92 bei den Kegelschnitten wirklich stimmt. Nun, das war also die Vorlesung von Henrik de Vries über Kalkül der abzählenden Geometrie.

Auch von Mannoury habe ich viel gelernt. Zum Beispiel hat er eine schöne Untersuchung über die Topologie der komplexen projektiven Ebenen gemacht. Das war damals etwas ganz Neues, diese Ebene topologisch zu untersuchen.

Auch L. E. J. Brouwer, der Vater der Topologie, wie er manchmal genannt wird, lehrte in Amsterdam; er hielt sehr schwierige Vorlesungen. Er befaßte sich aber in dieser Zeit ausschließlich mit dem Intuitionismus, mit der intuitionistischen Mathematik. Er gab eine sehr schöne Vorlesung „Lebesgue-Integrale vom intuitionistischen Standpunkt“. Das war der erste, der einzige wirklich schwierige Teil der klassischen Mathematik, die Integrationstheorie von Lebesgue, die einzige Theorie, die man wirklich exakt intuitionistisch begründen konnte, in der man alle Konstruktionen wirklich durchgeführt hat.

Weiter habe ich eine gründliche Ausbildung gehabt in der Invariantentheorie. Das war eine Theorie, die im 19. Jahrhundert große Mode war und im Zentrum der Aufmerksamkeit stand, die damals nach dem 1. Weltkrieg schon allmählich aus der Mode gekommen ist und heute gar nicht mehr betrieben wird, aber die in der Schule von Weitzenböck in Amsterdam noch lange gepflegt wurde.

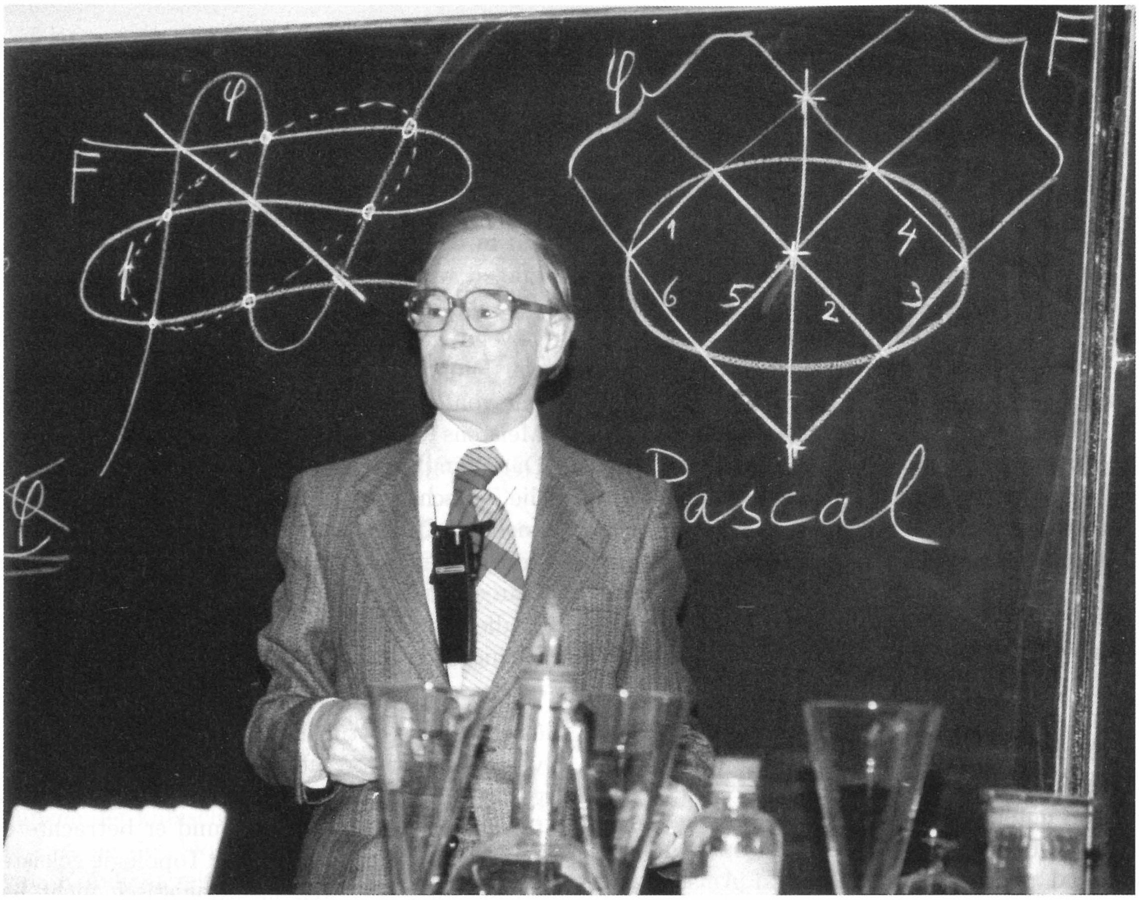
Die Theorie von Galois habe ich natürlich auch gelernt aus altmodischen Darstellungen, insbesondere aus dem schönen Büchlein von Felix Klein „Vorlesungen über das Ikosaeder“. Aber von Gruppentheorie hatte ich nur eine blasse Ahnung, und von Körpern, Ringen und Idealen wußte ich damals gar nichts.

Dann, nach meiner Schlußprüfung in Amsterdam, kam ich nach Göttingen, mit einer Empfehlung von Brouwer an Helmut Kneser, der damals in Göttingen Privatdozent war. Helmut Kneser war der Sohn von Adolf Kneser, einem Mathematiker aus Breslau und später wurde er der Vater von Martin Kneser, einem Zahlentheoretiker, der jetzt in Göttingen Professor ist. Und da soll einer noch sagen, daß die mathematische Begabung nicht erblich sei! Kneser veranlaßte also, daß ich mit ihm am selben Mittagstisch teilnahm, und nach dem Mittagessen gingen wir immer hinauf in den Hainberg an den Rand des Waldes, dann gingen wir am Waldrand entlang und dann wieder hinunter zu seiner Wohnung. Und da wurde ich eingeweiht in die damals moderne Mathematik. Kneser war Funktionentheoretiker und Topologe; er erzählte mir von der neuesten Entwicklung in der Topologie. Meistens verstand ich nicht, was er mir gesagt hat. Dann ging ich schnurstracks in die Bibliothek und las die Zeitschriftartikel, die er mir angesagt hatte. Am nächsten Tag fragte ich dann, ob ich seine Bemerkungen am Vortag richtig verstanden habe, und wie man das beweist und so, und wir diskutierten weiter. In dieser Weise habe ich dann in kürzester Zeit die Grundlagen der Topologie gelernt.

Heinz Hopf, damals Privatdozent in Berlin, kam öfters nach Göttingen und trug über die Topologie von Brouwer vor, über die Brouwer selbst niemals gesprochen hatte. Er trieb, wie gesagt, nur noch intuitionistische Mathematik und er betrachtete alles, was er als junger Mann in der Topologie geleistet hatte, als unstreng, weil intuitionistisch nicht haltbar. Zum Beispiel die Existenz eines Fixpunktes bei gewissen stetigen Abbildungen, die er selbst in einer glänzenden Arbeit bewiesen hatte, betrachtete er als nicht bewiesen, weil der Fixpunkt nicht effektiv konstruiert werden kann, nicht einmal angenähert werden kann mit beliebiger Genauigkeit.

Auch andere Topologen, wie Kuratowski, Kérekjarto und vor allem Paul Alexandrov, der berühmte russische Topologe, kamen öfter nach Göttingen. Sie blieben manchmal auch ein ganzes Semester, so Alexandrov im Jahr 27, glaube ich. Was in dieser Zeit in der Topologie vorging, war die Geburt eines ganz neuen Begriffsystems. Erstens wurde die mengentheoretische Topologie in dieser Zeit axiomatisiert, das geschah durch Hausdorff, Kuratowski und andere. Zweitens wurden in eben dieser Zeit die Grundbegriffe der algebraischen Topologie, wie man es heute nennt, aufgestellt, d. h. Begriffe wie Homologiegruppe, Schnittpunktzahl, Fixpunktindex und so weiter, mit dem heute alle Topologen regelmäßig arbeiten.

Ich erinnere mich noch, wie Hopf und Alexandrov und Emmy Noether über die Fixpunktformel von Lefschetz diskutierten. Diese Formel, die eben von Lefschetz publiziert worden war, gestattete es, die Anzahl der Fixpunkte einer stetigen Abbildung zu berechnen oder genauer gesagt, die Summe der Indizes dieser Fixpunkte, der Fixpunkte einer Abbildung einer Mannigfaltigkeit in sich selbst. Emmy



Noether sagte, das soll man doch nicht mit Matrizen machen, nicht durch Rechnung, sondern mit Begriffen, mit additiven Gruppen und Homomorphismen dieser Gruppen. Dann wird alles viel durchsichtiger und viel schöner. Und so wurden die alten Begriffe wie Bettische Zahlen und Torsionszahlen zwar beibehalten, aber gruppentheoretisch begründet. Der Grundbegriff, aus dem diese alten Begriffe hergeleitet wurden, war der Begriff Homologiegruppe, der heute jedem Topologen geläufig ist. Die neue Auffassung wurde vorbildlich dargestellt in dem bekannten Lehrbuch von Seifert und Threlfall, das 1934 erschienen ist. Als die Fixpunktformel von Lefschetz nun gruppentheoretisch formuliert und bewiesen wurde, war Emmy Noether ganz begeistert. Emmy Noether, sie wird manchmal die Mutter der modernen Algebra genannt, pflegte in solchen Fällen zu sagen: „Der Beweis ist nun abstrakt gefaßt und durchsichtig gemacht". Denn das war für sie der Sinn der modernen, abstrakten Algebra, daß alle speziellen Rechnungen mit Matrizen usw. vermieden wurden, daß man von allen unwesentlichen Zügen des speziellen Problems abstrahierte und daß durch diese Abstraktion das wesentliche sichtbar wurde, die Begriffe an die Spitze gestellt wurden und die ganzen Beweise durchsichtig wurden.

Ein anderes sehr wichtiges Gebiet, das ich damals in Göttingen erst gelernt habe, war die mathematische Physik, d. h. die Gesamtheit der Methoden die die Physiker dauernd brauchen. Die Potentialtheorie, die Theorie der Wärmeleitung, die Lösung der Wellengleichung, die Eigenwertprobleme, Integralgleichungen, Laplace-Transformationen, Fourier-Transformationen usw., kurz, all das was in dem bekannten Buch von Courant-Hilbert so meisterhaft dargestellt ist. Von alledem hatte ich, als ich in Amsterdam mein Studium abschloß, noch keine Ahnung; gelernt habe ich es erst in Göttingen aus dem Buch von Courant-Hilbert, dessen erster Band gerade herausgekommen war, als ich nach Göttingen kam, ferner aus der Vorlesung von Courant, und vor allem aus Gesprächen mit Courant's Schülern Levy, Friedrichs und später Rellich, und aus dem Studium der Arbeiten von Levy und Friedrichs in den Mathematischen Annalen. Apropos Rellich, auch seine Schwester habe ich in Göttingen vor 50 Jahren kennengelernt, sie ist meine liebe Frau geworden und auch in dieser Hinsicht habe ich an Göttingen die angenehmsten Erinnerungen. Von den Privatdozenten damals in Göttingen möchte ich noch zwei hervorheben, erstens Otto Neugebauer, der mich in die ägyptische, babylonische und griechische Mathematik eingeweiht hat, und dann Alexander Ostrowski, er war ein glänzender, vielseitiger Mathematiker. – Habe ich gesagt, er war? Ich möchte sagen, er ist; er lebt noch heute in Lugano. – Eine besondere Eigenschaft von Ostrowski war, daß er auf jedem Gebiet der damaligen Mathematik immer alles gelesen hatte und aus dem Stehgreif alles zitieren konnte. Wenn nun in der mathematischen Gesellschaft irgendein Vortrag gehalten wurde, ganz gleich über welches Thema, aus der Algebra, Analysis oder angewandter Mathematik, immer nahm Ostrowski an der Diskussion teil und sagte etwa: „Über dieses Thema hat der und der in den Mathematischen Annalen Band so und so vom Jahr 1898 auf Seite 211 eine Arbeit geschrieben“. Er hatte ein eisernes Gedächtnis (er hat es übrigens immer noch) und wußte immer alles. Eine großartige Leistung von Ostrowski war seine Begründung der Theorie der bewerteten Körper. Der Bewertungsbegriff war von Rychlik eingeführt worden, als Verallgemeinerung des Begriffs Absolutwert einer reellen und komplexen Zahl. Hensel und sein Schüler Hasse hatten die Bewertung mit großem Erfolg für die Zahlentheorie verwendet. Aber Ostrowski setzte dem Werk mit seinen großen Abhandlungen der Mathematischen Zeitschrift, Band 39, die Krone auf. Die Darstellung dieser Theorie im zweiten Band meiner Algebra beruht ganz auf dem Werk von Ostrowski.

Die Bibliothek des Mathematischen Instituts war für mich ein Paradies. In Amsterdam gab es damals keine Institutsbibliothek. Man mußte die Universitätsbibliothek benutzen, d. h. man mußte für jedes Buch einen Zettel schreiben, eine halbe Stunde bis eine Stunde warten, und dann kam das Buch, aber nur das eine, dessen Titel man zufällig kannte. In Göttingen dagegen konnte man selbst an die Bücher herangehen. Dann fand man vielleicht neben einem Buch, das man suchte, ein anderes, das noch interessanter war. Heute ist das eine Selbstverständlichkeit, aber damals war das etwas ganz besonderes. Felix Klein lebte noch, war aber sehr alt und zurückgezogen. Ich habe ihn niemals gesehen. Aber bei Hilbert habe ich noch Vorlesungen gehört, insbesondere eine sehr schöne Vorlesung über: „Die Transzendenz von e und π“.

Doch nun zur Algebra. Sie sind ja schließlich gekommen, um eine Algebra-Vorlesung zu hören. Brouwer hatte mir empfohlen, mich insbesondere an Emmy Noether zu halten. Mit Hilbert war er damals schon ziemlich verfeindet wegen des Streites um Intuitionismus und Formalismus. Aber die jüngeren Mathematiker in Göttingen, wie Emmy Noether, Ostrowski und Helmut Kneser, die schätzte Brouwer. Ich ging also in die Vorlesung von Emmy Noether und kam bald mit ihr auch persönlich zusammen. Sie war eine ganz eigenartige Persönlichkeit, grob gebaut mit einer dicken Nase, mit uneleganten Bewegungen, sie stapfte so vor der Vorlesung, sie zerstampfte manchmal ein Stück Kreide, das sie zerbrochen hatte ..., das Gegenteil einer eleganten Dame. Hermann Weyl drückte es in seinem Nachruf so aus: „Die Grazien standen nicht an ihrer Wiege“. Aber das sind Äußerlichkeiten. Wichtiger war, sie war durch und durch ein guter Mensch, frei von jedem Egoismus, frei von aller Eitelkeit, frei von Pose, und sie half immer jedem Menschen wo sie konnte.

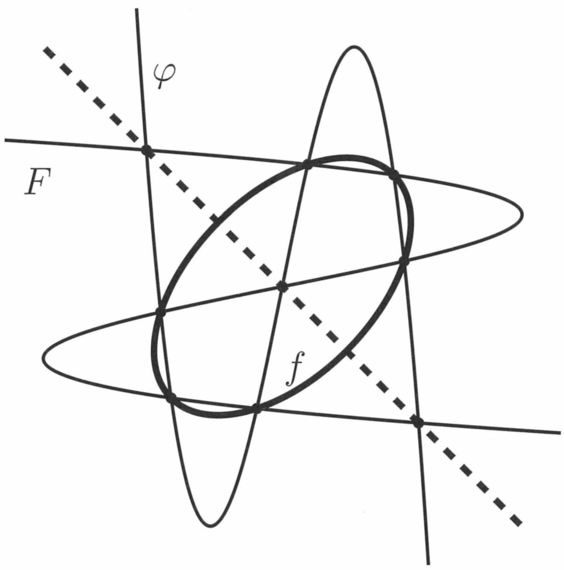
Ihre Vorlesungen waren nicht schön ausgefeilt. Sie trug das vor, was sie sich eben neu überlegt hatte und sie versuchte noch während der Vorlesung die Darstellung zu verbessern. Das ging so: noch bevor sie einen Satz zu Ende gesprochen hat, brachte sie ganz rasch eine bessere Formulierung. Dadurch wurde das Verständnis natürlich nicht erleichtert, im Gegenteil. Aber wenn man aufmerksam zuhörte und mitzudenken versuchte, so hatte man mehr gelernt als in einer vollendet ausgefeilten Vorlesung. Der Titel der ersten Vorlesung, die ich von ihre hörte, war: „Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen“. Drei Jahre später, als ich mich in Göttingen habilitiert hatte, gab sie wieder eine Vorlesung mit demselben Titel, aber in verbesserter Form, sie hatte inzwischen sehr viele schöne Sachen gemacht, besonders über die Darstellungstheorie der Gruppen und die der hyperkomplexen Zahlen. Ich machte eine Mitschrift dieser Vorlesung. Sie hat die Mitschrift noch verbessert und sie in der Mathematischen Zeitschrift publiziert, als Arbeit über die Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Zahlen. Nachher wurde der Inhalt auch in Band 2 meiner Algebra aufgenommen.

Doch kehren wir zum Jahr 24 zurück, als ich als Student nach Göttingen kam. Nach ihrer Vorlesung haben wir, ihre Schüler, oft mathematische Probleme mit ihr diskutiert. Meine Probleme waren vor allem Probleme der algebraischen Geometrie, denn ich fand das alles was ich in Amsterdam gelernt hatte, zwar sehr schön, aber ich wußte, daß das alles nicht streng begründet war und ich suchte nach einer Begründung. Dazu brauchte ich die Algebra. Ich legte ihr also meine Grundlagenprobleme vor, mit denen ich mich in Amsterdam schon gequält hatte. Zum Beispiel: Wie definiert man die Dimension einer algebraischen Mannigfaltigkeit, wie es damals hieß, oder einer algebraischen Varietät, wie man heute sagt? Man hat ein System von Gleichungen, die definieren im n-dimensionalen Raum eine algebraische Varietät. Was meint man, wenn man diese Varietät eine Kurve nennt oder eine Fläche? Oder, was meinen die Italiener, wenn sie von einem punto generico, einem allgemeinen Punkt, einer Varietät sprechen? Nun, man kann sich populär etwas denken, ein allgemeiner Punkt einer Kurve, das ist nicht ein Doppelpunkt, es ist auch nicht ein Wendepunkt, es ist auch nicht der Berührungspunkt einer Doppeltangente. Kurz, vom allgemeinen Punkt wird verlangt, daß er keinerlei spezielle Eigenschaften hat, die nicht allen Punkten zukommen. Gibt es das überhaupt? Die Antwort auf diese Frage fand ich in einer Arbeit von Emmy Noether über die Elimination. Die Antwort lautet so: man konstruiert einen allgemeinen Punkt einer irreduziblen Kurve zum Beispiel, indem man für eine Koordinate x_1 eine Unbestimmte nimmt. Den Begriff Unbestimmte hatte schon Kronecker im 19. Jahrhundert in die Algebra eingeführt. Eine Unbestimmte ist nichts anderes als ein Rechensymbol, für das man zwar spezielle Werte einsetzen darf, aber nicht einsetzen muß: ein Rechensymbol, mit dem man rechnen kann. Man nimmt also für eine Koordinate eine Unbestimmte und die anderen Koordinaten werden dann algebraische Funktionen dieser Unbestimmten. Im Fall einer Fläche nimmt man für 2 Koordinaten Unbestimmte und die übrigen Koordinaten werden algebraische Funktionen dieser Unbestimmten. Und damit ist gleichzeitig meine erste Frage beantwortet, was ist die Dimension? Wann nennt man eine Varietät eine Kurve oder Fläche? Die Dimension einer irreduziblen Varietät ist die Anzahl der Koordinaten, die man als Unbestimmte wählen kann, und von denen die übrigen dann algebraische Funktionen sind, also der Transzendenzgrad des Nullstellenkörpers im Sinne der Körpertheorie von Steinitz. Durch diese Berufung auf Steinitz ist gleichzeitig bewiesen, daß die Dimension unabhängig von der Wahl der unbestimmten Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ ist. Denn Steinitz hat bewiesen, daß der Transzendenzgrad eines Körpers unabhängig davon ist, welche Körperelemente man als unabhängige Elemente wählt. Und so sehen Sie, daß die moderne Algebra, die ich von Emmy Noether lernte, mir die Lösung meiner Grundlagenprobleme fertig lieferte. In diesem Fall war es die Arbeit von Steinitz „Die algebraische Theorie der Körper", die 1910 in Crelles Journal, Band 137, erschienen ist. Sie müssen die Arbeit mal lesen, sie ist auch als Buch extra erschienen, ich glaube von Hasse und Baer herausgegeben. Die Wichtigkeit dieser Arbeit kann man gar nicht überschätzen, das Erscheinen dieser Arbeit von Steinitz war ein Wendepunkt in der Geschichte der Algebra des 20. Jahrhunderts. Nämlich, es war das erste Mal, daß eine bestimmte Struktur, nämlich die Körperstruktur, ganz allgemein axiomatisch untersucht wurde. Früher hatte man zwar Zahlkörper untersucht und Funktionenkörper, und auch endliche Körper hat Galois selbst untersucht – sie heißen heute noch Galoisfelder – aber der allgemeine Begriff Körper war noch nicht aufgestellt. Und nun ist es so, daß die Körper zu den allerwichtigsten Strukturen der modernen Algebra gehören; Körper und Gruppen sind die wichtigsten Strukturen und sie gehören auch zu den Strukturen, zu den Gebilden, deren Struktur man vollständig untersuchen kann. Man weiß seit der Arbeit von Steinitz, wie alle Körper aus Primkörpern entstehen: Durch Adjunktion, zuerst von Unbestimmten und dann von algebraischen Funktionen dieser Unbestimmten. So kann man sämtliche Körper erzeugen und so eine Übersicht über alle möglichen Körper gewinnen. Begriffe, die heute grundlegend sind für die ganze Algebra, sind bei Steinitz zum ersten Mal definiert, z. B. der Begriff „Körper der Charakteristik 0" oder „Körper der Charakteristik p" oder der Begriff „Transzendenzgrad", den ich vorhin erwähnt habe, stammt auch von Steinitz.

Nun zurück zum allgemeinen Punkt einer Varietät. Zur Konstruktion des allgemeinen Punktes hatte ich anfangs, wie gesagt, die Arbeit von Emmy Noether über die Eliminationstheorie gebraucht. Aber bald merkte ich, daß man den allgemeinen Punkt auch ohne Eliminationstheorie ganz einfach konstruieren kann, wenn man nur den Begriff Restklassenkörper eines Primideals benutzt und natürlich die Theorie von Steinitz anwendet. Ich schrieb das auf in einer Arbeit „Zur Nullstellentheorie der Polynomideale", meine erste Arbeit zur algebraischen Geometrie, und ich zeigte die Arbeit Emmy Noether. Sie sagte: „Das ist sehr gut, das werden wir gleich bei den Mathematischen Annalen einreichen". Sie gab mir dann noch an, wie ich die Arbeit etwas mehr begrifflich fassen konnte und wie ich die Reihenfolge der Definitionen und Theoreme und noch etwas ändern konnte. Die Arbeit wurde dann in Mathematische Annalen 96 publiziert. Aber Emmy Noether hatte mir verschwiegen, daß sie selbst ein halbes Jahr früher, bevor ich nach Göttingen kam, dieselbe Konstruktion des allgemeinen Punktes in ihrer Vorlesung schon gebracht hatte. Sie wollte dem jungen Mann die Freude an der Entdeckung nicht verderben! Ist das nicht großartig? Ganz anders war Gauß, der dem jungen Bolyai die ganze Freude an der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie verdorben hat, indem er ihm geschrieben hat: „Das weiß ich ja alles längst".

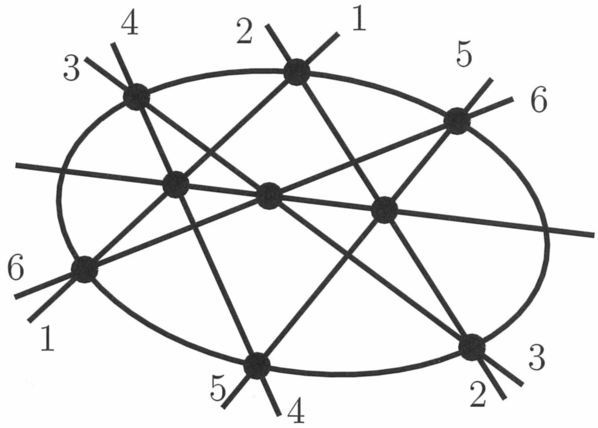
Schon in Amsterdam hatte ich mich intensiv befaßt mit dem Noetherschen Fundamentalsatz und seinen Verallgemeinerungen. Er heißt Noetherschen Fundamentalsatz nicht nach Emmy Noether, sondern nach ihrem Vater, Max Noether, dem Begründer der algebraischen Geometrie. Was ist unter diesem Satz zu verstehen? Da gehen wir von einer Grundkurve $\varphi = 0$ in der Ebene aus. Man hat also zwei Koordinaten x und y, φ ist ein Polynom in x und y und das setzt man gleich 0: die Punkte, die diese Gleichung erfüllen, bilden die Kurve. Ich werd' fortan nicht sagen: „die Kurve $\varphi = 0$", sondern ich werde einfach sagen: „die Kurve φ" – das ist die Kurve, die durch das Polynom φ definiert ist. Wenn man diese Grundkurve φ mit einer anderen Kurve f schneidet, so gibt das nach dem Satz von Bezout $m \cdot n$ Schnittpunkte, wo m der Grad von φ und n der Grad von f ist. Wenn nun eine weitere Kurve F durch alle diese Schnittpunkte hindurchgeht – nehmen wir mal der Einfachheit halber an, daß alle $m \cdot n$ Schnittpunkte verschieden sind, daß es keine Berührungen oder so was gibt – dann sagt der Fundamentalsatz von Max Noether, daß dann F sich darstellen läßt als $F = A \cdot f + B \cdot \varphi$. Das Umgekehrte ist trivial. Wenn eine solche Gleichung gilt, dann wird in allen Punkten, in denen $f = 0$ wird und $\varphi = 0$ wird, auch automatisch $F = 0$ werden. Aber dieser Satz ist von fundamentaler Wichtigkeit in der algebraischen Geometrie für die Theorie der ebenen Kurven. Und um Ihnen das zu zeigen gebe ich Ihnen ein Beispiel der Anwendung.

Ich zeichne mir hier die Grundkurve φ, das sei eine Kurve dritten Grades, d. h. sie wird gegeben durch eine Gleichung vom dritten Grad. Und auf dieser Kurve markier' ich drei Punkte und schau, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, aber das ist nur ein Mogel, damit die Figur nachher nicht mißlingt. Jetzt lege ich eine zweite Kurve F, auch vom dritten Grad, die die erste Kurve in 9 Punkten schneidet.[1]



Wenn nun von diesen 9 Schnittpunkten 6 auf einem Kegelschnitt f liegen, dann liegen die übrigen 3 auf einer Geraden – das ist der Satz, den ich jetzt beweisen will oder genauer, aus dem Fundamentalsatz herleiten möchte. Das ist doch ein schöner geometrischer Satz! Aber bevor ich ihn beweise, werde ich erstmal einen wichtigen Spezialfall betrachten, damit Sie sehen, wie schön und wichtig dieser Satz ist.

Dazu lasse ich die Kurven dritten Grades zerfallen in je 3 Geraden und dann kriege ich den folgenden Satz: Ich zeichne zuerst den Kegelschnitt, jetzt zeichne ich ein eingeschriebenes Sechseck, die Seiten numerier' ich, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 und jetzt markier' ich die Schnittpunkte von 1 und 4, von 2 mit 5 und von 3 mit 6, also immer die Schnittpunkte von gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks: Dann gibts einen berühmten Satz von Pascal, der sagt, daß diese 3 Schnittpunkte auf einer Geraden liegen. Dieser Satz ist offensichtlich ein Spezialfall von dem obigen Satz. Man hat hier die Kurve f, die 3 Geraden 1,3,5 bilden zusammen die Kurve F, die 3 Geraden 2,4,6 bilden zusammen die Kurve φ, von den 9 Schnittpunkten liegen 6 auf einem Kegelschnitt, also müssen die übrigen 3 auf einer Geraden liegen.



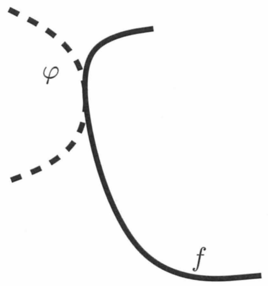
So, und jetzt der Beweis, den will ich hier in diesem allgemeinen Fall führen. Die Kurve F geht durch alle Schnittpunkte von f und φ, das sind diese 6 Schnittpunkte, nicht wahr (s. Figur 1). Da geht die Kurve F durch, also ist die Voraussetzung des Noetherschen Fundamentalsatzes erfüllt, also läßt sich F darstellen als $A \cdot f + B \cdot \varphi$ und man kann auch noch beweisen, daß die beiden einzelnen Glieder Af und $B\varphi$ denselben Grad haben wie F. f ist von Grad 2, denn das ist die Gleichung eines Kegelschnitts, F hat den Grad 3, also ist A vom 1. Grad, also ist $A = 0$ die Gleichung einer Geraden. Ja nun ist es so, auf der Grundkurve ist $\varphi = 0$, auf der Grundkurve kann ich also diesen Teil streichen, wenn ich an der Grundkurve entlang gehe, da ist überall dieses konstant $= 0$. Also überall wo $F = 0$ wird, muß entweder A oder f 0 werden. In den 6 Punkten wird $f = 0$; in den übrigen 3 Punkten muß also $A = 0$ werden, also liegen die übrigen 3 auf einer Geraden.

Sie sehen selbstverständlich, daß dieser Satz und dieser Beweis nicht beschränkt sind auf Kurven vom 3. und vom 2. Grad, sondern man kann, wenn man eine Grundkurve vom n-ten Grad hat, sie schneiden mit einer Kurve vom Grad $n + q$; das gibt $m \cdot (n + q)$ Schnittpunkte. Wenn von diesen Punkten $m \cdot n$ auf einer anderen Kurve vom n-ten Grad liegen, dann liegen die übrigen $m \cdot q$ auf einer Kurve vom Grade q – das kann man alles genauso beweisen und man kann auch eine ganze Reihe von interessanten Theoremen aus dieser Formel herleiten. Deswegen heißt

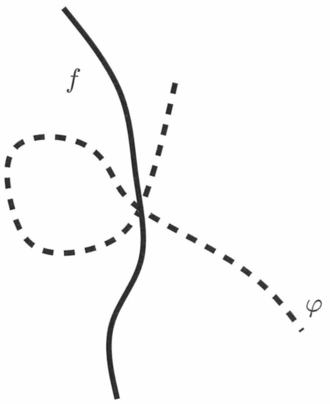
[1] Die Zeichnungen wurden mit Hilfe der Programme ipe (`http://www.postech.ac.kr/~otfried/html/ipe.html`) und Cinderella (`http://www.cinderella.de`) erstellt.

dieser Satz mit Recht „der Fundamentalsatz der algebraischen Geometrie", „Fundamentalsatz von Max Noether". Die ganze Theorie der Punktgruppen auf ebenen Kurven wurde von Brill und Noether aus diesem Fundamentalsatz hergeleitet.

Es gibt aber Schwierigkeiten, wenn von den Schnittpunkten einige zusammenfallen. Nehmen wir mal an, daß sich die Kurven φ und f berühren, daß Sie also eine gemeinsame Tangente haben:



oder daß f durch einen Doppelpunkt von φ hindurchgeht:



Wenn nun F durch diesen Schnittpunkt s hindurchgeht, so genügt das nicht, um F in der Form $F = af + b\varphi$ darzustellen, sondern die Kurve F muß entweder dieselbe Tangente haben oder sie muß hier einen Doppelpunkt haben. Die Kurve F muß also gewisse lokale Bedingungen erfüllen.

Was heißt lokale Bedingungen? Ich nehme diesen Punkt mal als Anfangspunkt der Koordinate und ich entwickle F nach Potenzen von x und y. Das konstante Glied fällt weg, wenn F null wird im Anfangspunkt, also es fängt so an: $F = ax + by +$ höhere Glieder. Wenn ich von lokalen Bedingungen spreche, so meine ich, daß die Anfangsglieder dieser Potenzreihe bis zu einem gewissen Grad gewisse lineare Bedingungen zu erfüllen haben. Das heißt in unserem Fall, entweder werden a und b beide 0, so daß die Kurve F einen Doppelpunkt hat, oder a und b erfüllen eine lineare Gleichung, die besagt, daß F eben diese Tangente hat. Und in den höheren Fällen wird es noch viel komplizierter. Aber es gibt immer lokale Bedingungen. Noether hat die lokalen Bedingungen als Bedingungen über Potenzreihen formuliert, Bertini hat dann schwächere Bedingungen angegeben, die auch noch genügen und in denen immer nur endlich viele Koeffizienten dieser Potenzreihe berücksichtigt werden.

Mein Problem, mit dem ich mich in Amsterdam schon befaßt hatte, war: Wie verallgemeinert man den Fundamentalsatz auf Flächen im Raum und zu noch höheren Dimensionen? Wenn man eine Gleichung $F = 0$ betrachtet, so definiert diese im Raum nicht eine Kurve sondern eine Fläche. Wenn diese Fläche durch die Schnittkurve von zwei anderen Flächen f und φ hindurchgeht, kann man dann F auch darstellen in der Form $F = af + b\varphi$? Oder wenn man nun drei Flächen hat f, φ und ψ, die einander in endlich vielen Punkten schneiden, und wenn dann die Fläche F durch die Schnittpunkte dieser drei Flächen hindurchgeht – nehmen wir mal an, daß sie verschieden sind – kann man dann F darstellen als $F = a \cdot f + B \cdot \varphi + C \cdot \psi$? Unter welchen Bedingungen kann man das? Und da hatte ich mir einige Spezialfälle und Verallgemeinerungen überlegt, aber ich hatte das Problem nicht allgemein gelöst und ich zeigte das Emmy Noether. Sie sagte, das ist alles gut und recht, das ist richtig, aber Emanuel Lasker, der Schachmeister, hat das Problem ganz allgemein im Prinzip schon gelöst. Lasker war nämlich nicht nur ein genialer Schachspieler; er war auch ein Mathematiker. Es war ein Schüler von Hilbert: er hat bei Hilbert den Doktor gemacht. Und Hilbert hatte ihm das Problem gestellt: wenn ein Polynom F null wird in allen Nullstellen der Polynome $f_1, \ldots, f_r$, welche Bedingungen muß dann F noch erfüllen, damit F sich ganz allgemein, ganz egal wieviel Veränderliche man hat, wieviel Dimensionen, darstellen läßt als $F = A_1 f_1 + \ldots + A_r f_r$? Mit anderen Worten, modern formuliert, welche Bedingungen muß F erfüllen, damit f dem Ideal $\mathfrak{m}$ angehört? $\mathfrak{m}$ ist das Ideal, was erzeugt wird von $f_1, \ldots, f_r$. Die Antwort, die Lasker 1905 fand, lautet so: das Ideal $\mathfrak{m}$ ist ein Durchschnitt von Primäridealen, $q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_s$. Das heißt: damit f dem Ideal $\mathfrak{m}$ angehört, muß F allen diesen Primäridealen angehören – und das genügt auch.

Nun, was ist damit gewonnen? Scheinbar hat man das Problem nur verschoben, von einem Ideal $\mathfrak{m}$ auf einige Primärideale. Aber: zu jedem Primärideal q gehört ein Primideal p und zu diesem Primideal gehört eine irreduzible Varietät V, die Nullstellenvarietät des Ideals. Und die Varietät V hat, wie wir eben gesehen haben – da sie irreduzibel ist – einen allgemeinen Punkt s, der spielt die Rolle unseres Schnittpunktes s. Wir hatten s als Koordinate im Anfangspunkt gewählt, nun hat man im allgemeinen Fall eine Nullstellenvarietät und darauf einen allgemeinen Punkt s und diesen Punkt s kann man wieder als Anfangspunkt der Koordinaten wählen und F entwickeln nach Potenzen von x_1 bis x_n, $f = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n +$ höhere Glieder. Und damit f nun dem Primärideal angehört, müssen die Anfangsglieder dieser Potenzreihen gewisse Bedingungen erfüllen, dann gehört f dem Primärideal an. Und daraus sieht man, daß der Satz von Lasker eine vollwertige Verallgemeinerung des Noetherschen Fundamentalsatzes ist.

Emmy Noether gab mir ein Separat ihrer Arbeit „Idealtheorie in Ringbereichen“, in der sie die Darstellung eines Ideals als Durchschnitt von Primäridealen nicht nur für Polynomringe bewiesen hat, sondern viel allgemeiner für kommutative Ringe, die den sog. Teilerkettensatz erfüllen; das ist alles natürlich im 2. Band meiner Algebra dargestellt. Sie sagte mir: studieren Sie diese Arbeit und studieren Sie das Büchlein „Modular Systems“ von Macaulay, und dort werden Sie die Antworten auf Ihre Fragen über den Fundamentalsatz finden. Und so wurde ich in kurzer Zeit in die allgemeine Idealtheorie eingeweiht und auf dieser Grundlage habe ich dann in den darauffolgenden 20 Jahren meine Begründung der algebraischen Geometrie entwickelt.

Nachher in Hamburg, in den Jahren 1926-27, bei Artin und Schreier und Hecke habe ich noch sehr viel Algebra und Zahlentheorie dazugelernt, u. a. die Theorie der reellen Körper, die auch in meinem Algebra-Buch dargestellt ist, genau nach der Arbeit von Artin und Schreier. Aber dieser Aufenthalt in Hamburg, das ist ein anderes Kapitel; ich wollte hier nur über meine Göttinger Lehrjahre berichten und ich bin grad noch innerhalb der mir zugemessenen Zeit.

Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit.

Nachwort von Peter Roquette

Bei dem vorstehenden Text handelt es sich um die Wiedergabe eines Vortrags, den VAN DER WAERDEN am 26. Januar 1979 in Heidelberg gehalten hat. Der Vortrag fand im Rahmen unseres „Kolloquiums für Mathematik-Studenten aller Semester“ statt. Die Zielsetzung dieses Kolloquiums, zu dem von Zeit zu Zeit auswärtige Gäste nach Heidelberg eingeladen wurden, hatte ich van der Waerden in einem Brief wie folgt beschrieben:

„Gerade in der heutigen Zeit, in der der Mathematikunterricht an unseren Universitäten ziemlich formalisiert worden ist, halte ich es für wichtig und wünschenswert, daß die Studenten durch außerplanmäßige Gastvorträge auch einmal in außergewöhnlicher Weise angesprochen werden. Diese Gastvorträge zielen nicht so sehr auf die Vermittlung von zusätzlichem Sachwissen, sondern auf eine Anregung zur Reflexion über die erlernte Wissenschaft, sei es aus historischer Sicht, oder im Hinblick auf die Grundlagen, oder auf mögliche Anwendungen u.a.m. Ein solcher Vortrag von Ihnen wäre für viele unserer Studenten ein bedeutendes Erlebnis ...

Es würde sicherlich auf großes Interesse stoßen, wenn Sie z.Bsp. aus Ihren eigenen Erinnerungen erzählen würden, und vielleicht auch Allgemeines über die damalige Situation in der Mathematik. Meiner Meinung nach ist es wichtig für unsere Studenten, zu erfahren, daß die Mathematik, wie wir sie heute sehen, nicht statisch verharrt, sondern sich weiter entwickelt. Die Entdeckung und Beobachtung von historischen Entwicklungslinien hat stets einen besonderen Reiz und trägt zum Verständnis der heutigen Mathematik bei.“

Van der Waerden kündigte daraufhin seinen Vortrag unter dem Titel „Meine Göttinger Lehrjahre“ an. Mir scheint, daß dieses Thema auch aus mathematikhistorischer Sicht von Interesse ist. Für die etwa 500 Hörer reichte der große Hörsaal unseres Mathematischen Instituts nicht aus, und daher mußte der Vortrag in den Hörsaal der Chemie verlegt werden. Die chemische Umgebung wird dokumentiert durch die gläsernen Apparaturen, die auf dem Photo zu sehen sind. Dieses Photo wurde während des Vortrags von Klaus Wohlfahrt aufgenommen.

Van der Waerden sprach frei, ohne vorbereitetes Manuskript. Der Vortrag wurde auf Tonband aufgenommen und danach direkt vom Band auf Schreibmaschine übertragen. Der Text gibt demnach unverändert die mündliche Rede wieder, was ein lebendiges Bild der Persönlichkeit van der Waerdens als Redner und Mathematiker erstehen läßt. Die eingezeichneten Figuren entsprechen denen, die während des Vortrags an die Tafel gezeichnet wurden. So mag die Publikation dieses Vortrags als eine Ergänzung zu den vielfältigen Nachrufen und biographischen Aufsätzen über van der Waerden angesehen werden.

In einem Punkt hat übrigens van der Waerden später brieflich seinen Vortrag korrigiert: Nämlich bei der Diskussion des Schubertschen Kalküls berichtet er, daß es genau 92 Kegelschnitte im Raum gebe, die acht gegebene windschiefe Geraden schneiden. Das sei, so sagt van der Waerden, von Schubert so angegeben, aber erst ganz rezent in den letzten Jahren bewiesen worden. In einem späteren Brief korrigierte er sich dahingehend, daß ein strenger Beweis doch noch nicht existiere.

Adresse des Autors:
Prof. Dr. Peter Roquette
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 228
69120 Heidelberg
`roquette@mathi.uni-heidelberg.de`