

Doppelseifenblasen und Studentenforschung

von Frank Morgan

Auf dem Burlington Mathfest 1995 wurde ein Beweis der "Double Bubble Conjecture" über die Form von Doppelseifenblasen im Spezialfall zweier gleicher Volumina bekanntgegeben. Dies hat zwei bemerkenswerte Aspekte:

- Obwohl es sich um ein „stetiges“ Problem handelt, wurde der Beweis per Computer geführt.
- Ein großer Teil der Theorie entstand aus Forschungsarbeit von Undergraduate-Studenten.

Dieser Aufsatz ist eine Revision von [M1].

Seifenblasen minimieren ihren Flächeninhalt. Ein berühmter Satz besagt, daß eine Sphäre – eine einzelne runde Seifenblase – die Fläche mit dem kleinsten Flächeninhalt darstellt, die ein gegebenes Volumen einschließen kann. Wenn zwei Seifenblasen zusammenkommen wie in Abbildung 1, dann bilden sie eine Doppelseifenblase, die aus zwei Sphärenteilen und einer Trennfläche besteht. Die Trennfläche ist flach, wenn die ursprünglichen Seifenblasen gleiche Volumina hatten. Die "Double Bubble Conjecture" besagt, daß diese Standardform tatsächlich diejenige Konfiguration mit dem kleinsten Flächeninhalt ist, welche zwei gegebene Volumina an Luft einschließt und trennt. Diese fundamentale Vermutung ist ziemlich lange offengeblieben, obwohl – worauf mich Brian White hingewiesen hatte – die flächenminimierende Konfiguration eine Rotationsfläche sein muß, was das Problem auf eine Frage über Kurven in der Ebene reduziert.

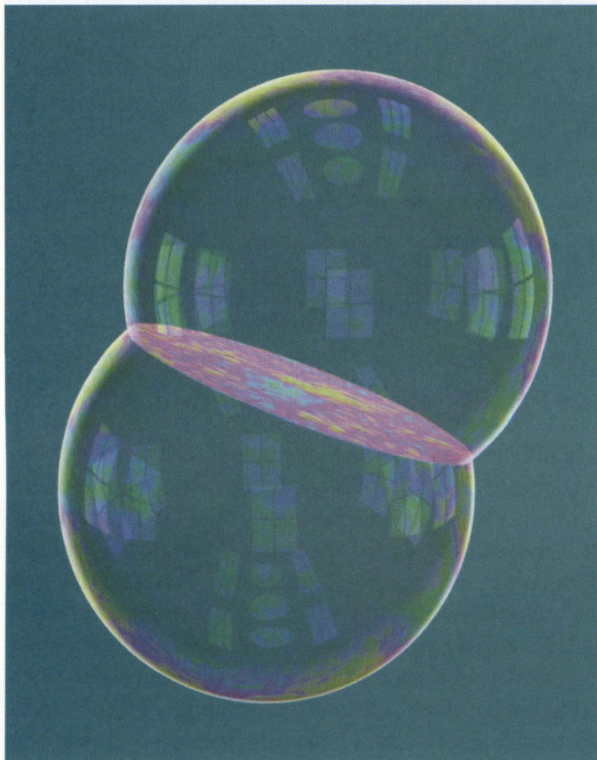


Abbildung 1^a

^aGraphik von John Sullivan, University of Minnesota.

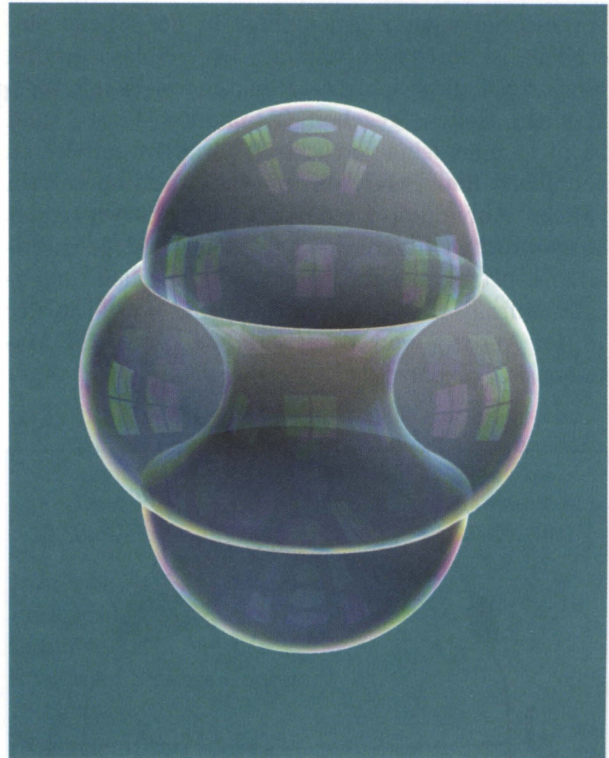


Abbildung 2^a

Eine Nichtstandard-Doppelblase

Abbildung 2 zeigt eine Computersimulation einer Doppelseifenblase konkurrierenden Typs, die aus einer „erdnußförmigen“ Seifenblase besteht mit einer schlauchförmigen zweiten Blase um die Taille. Man kann leicht nachrechnen, daß diese spezielle Nonstandard-Doppelseifenblase größere Fläche hat als die Standardseifenblase mit denselben Volumina. Aber man beginnt sich vorzustellen, daß es viele weitere Möglichkeiten geben kann. Wenn man zuläßt, daß sich die zwei Regionen des vorgeschriebenen Volumens auf verschiedene Komponenten verteilen, dann kann man Ketten von Torusblasen auf/um Torusblasen erhalten wie in Abbildung 3. Und unglücklicherweise muß man auch noch Bereiche mit mehreren Komponenten zulassen, weil sie als Grenzfälle von Regionen auftreten, die durch dünne

Schläuche von vernachlässigbar kleiner Fläche verbunden sind. Genauso muß man zulassen, daß der Außenraum zusätzliche beschränkte Komponenten hat, also „leere Kammern“, die zu keinem der vorgeschriebenen Volumina gehören.

Im Sommer 1990 hat meine Studenten-Forschungsgruppe am Williams College, bestehend aus Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Joel Foisy, Nickalous Hodges und Jason Zimba, die ebene Version der „Double Bubble Conjecture“ bewiesen: Die Figur von kleinster Kurvenlänge, welche zwei Bereiche mit vorgeschriebenem Flächeninhalt in der Ebene einschließt, ist durch eine Standard-Doppelblase aus drei Kreisbögen, die sich in zwei Punkten jeweils mit 120° -Winkeln treffen, gegeben (Abbildung 4 a,b), und ist nicht irgendeine verrückte Alternative mit leeren Kammern und Bereichen mit vielen Komponenten (wie in Abbildung 4 c,d,e). Der Beweis verwendet ausgesprochen trickreiche Argumente und geometrische Konstruktionen. Das Resultat erschien im *Pacific Journal of Mathematics* [F] und wurde in der 1994er Ausgabe von *What's Happening in the Mathematical Sciences* der AMS dargestellt.

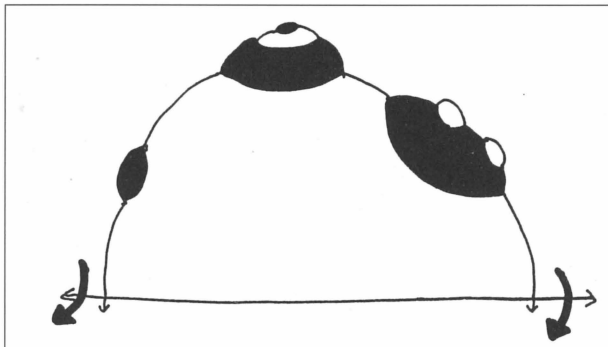


Abbildung 3: Man muß Regionen mit vielen Komponenten zulassen. [Hu]

Michael Hutchings, ein Mitglied der 1992er Forschungsgruppe [CHK] und jetzt Doktorand in Harvard, konnte dann Symmetrie, Konvexität und Umordnungsargumente verwenden und damit beweisen, daß jede Nonstandard-Doppelseifenblase von minimalem Flächeninhalt aussehen muß wie in Abbildung 3 und im Falle gleicher Volumina wie in Abbildung 2. Der „Hüfttring“ muß dabei nicht symmetrisch um die Mitte liegen: es gibt einen großen, zweidimensionalen Parameterraum von Möglichkeiten. John Sullivan, Rob Kusner und Michael Hutchings erzielten einige Fortschritte mit numerischen Berechnungen, aber es galt da einen großen Parameterraum genau zu prüfen.

Letztes Jahr, auf einem ruhigen Abschnitt zwischen zwei Wasserfällen, im Kayak auf dem

Südarms des American River in Northern California, hatten Hass und Schlafly eine Idee für die Durchführung eines Computerbeweises. Sie konnten die Möglichkeiten einschränken und das Problem auf die Berechnung von 200260 Integralen reduzieren, die ein normaler PC unter DOS mit einem Cyrix Prozessor und Koprozessor, programmiert in C++ und etwas Assembler, dann in etwa zwanzig Minuten erledigte. Alle Resultate wurden auf einem Intel 486 DX2-66 Prozessor dupliziert. Die Rechnungen zeigen, daß jede Konkurrenzmöglichkeit entweder Teile hat, die nicht zusammenpassen, die Stabilitätsbedingungen verletzt oder ungleiche Volumina ergibt. In Fällen, in denen das Resultat knapp ausfiel, wurde der Parameterraum feiner unterteilt, um die Genauigkeit zu erhöhen. Für jeden Schritt wurden genaue Fehlerabschätzungen mitgeführt. Hass gab das Resultat am 6. August 1995 auf dem Burlington Mathfest im Rahmen meiner Sektion über die Geometrie von Seifenblasen bekannt.

All diese Arbeit beruht auf grundlegenden Untersuchungen, beginnend 1960, von De Giorgi, Riesenberger, Federer und Fleming über allgemeine Theorien für Flächen mit Singularitäten. Die (schwierige) Existenz und Regularität von flächenminimierenden „Blasenhäufen“ wurden 1976 von Fred Almgren und Jean Taylor bewiesen [AT] [M2, Chap. 13].

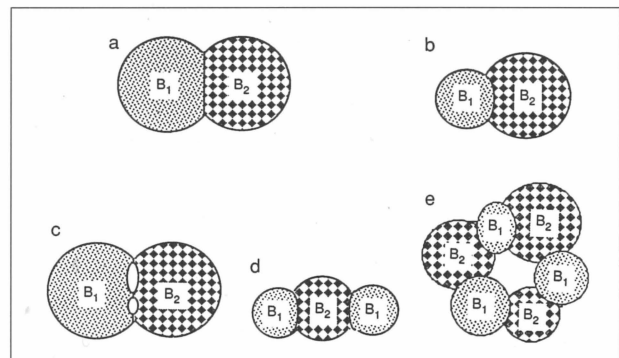


Abbildung 4

Schließlich wollen wir hier in vier Sätzen eine Beweissskizze dafür geben, daß die Doppelseifenblase mit dem kleinsten Flächeninhalt eine Rotationsfläche ist. Sie beginnt mit der Existenz zweier orthogonaler Ebenen (z. B. der xz - und der yz -Ebene), die beide Volumina halbieren. Dann darf man annehmen, daß die Konfiguration bezüglich beider Ebenen spiegelsymmetrisch ist und damit auch unter einer 180° -Drehung um die z -Achse erhalten bleibt. Deshalb halbieren alle senkrechten Ebenen durch die z -Achse beide Volumina. Daraus folgt, daß die Doppelseifenblase all diese Ebenen senkrecht schneidet, und daher eine Rotationsfläche sein muß.

Hutchings konnte dieses Symmetrieargument verallgemeinern und damit die überraschend schwierige Tatsache beweisen, daß der Flächeninhalt einer minimalen Doppelseifenblase als Funktion mit den vorgegebenen Volumina ansteigt. Daraus folgt sofort, daß es keine leeren Kammern geben kann, da das Auffüllen solcher Kammern eines der Volumina erhöhen und gleichzeitig Oberfläche verkleinern würde. Mit einem zusätzlichen Zerlegungsargument konnte Hutchings zeigen, daß im Falle gleicher Volumina beide Bereiche zusammenhängend sein müssen. Dies reduzierte das Problem auf die in Abbildung 2 dargestellten Alternativ-Konfigurationen, die dann Hass und Schlafly durch ihre Berechnungen eliminieren konnten.

Für den allgemeineren Hintergrund und weitere Literaturangaben verweise ich auf [M3] und auf das neue Kapitel über Seifenblasen in [M2]. Die allgemeine "Double Bubble Conjecture" für ungleiche Volumina ist weiterhin offen.

Über Studentenforschung. In den USA arbeiten viele Undergraduate-Studenten (etwa: Studenten vor dem Vordiplom) an Forschungsproblemen von aktuellem Interesse, beweisen Sätze, geben Vorträge und publizieren Aufsätze. Oft arbeiten sie in kleinen Gruppen an Problemen, die ein faculty advisor (Professor) gestellt hat und betreut. Die meisten Studenten sind im "junior" oder "senior year" (dem vorletzten und letzten Studienjahr am College) und haben zumindest schon Kurse in reeller Analysis und Algebra gehört. Einige sind auch jünger und haben nur Analysis gehört. Die NSF und andere Quellen unterstützen diese Projekte. Die mathematischen Gesellschaften AMS, MAA und SIAM haben 1995 den ersten "Frank and Brennie Morgan Prize for Outstanding Research in Mathematics by an Undergraduate

Student" in der Höhe von \$1000 an Kannan Sundararajan vergeben: für wesentliche Untersuchungen über die Riemannsche Zetafunktion.

- [AT] F. J. Almgren, Jr., and J. E. Taylor, Geometry of soap films, *Sci. Am.* 235 (1976), 82-93.
- [CHK] Christopher Cox, Lisa Harrison, Michael Hutchings, Susan Kim, Janette Light, Andrew Mauer, and Meg Tilton, The shortest enclosure of three connected areas in $\mathbb{R}^2$, *Real Analysis Exchange* 20 (1994/95), 313-335.
- [F] Joel Foisy, Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Nickolous Hodges, and Jason Zimba, The standard double soap bubble in $\mathbb{R}^2$ uniquely minimizes perimeter, *Pacific J. Math.* 159 (1993), 47-59.
- [HHS] Joel Hass, Michael Hutchings, and Roger Schlafly, The double bubble conjecture, *Elec. Research Ann. AMS* 1 (1995), 98-102.
- [HS] Joel Hass and Roger Schlafly, Double bubbles minimize, preprint (1995).
- [Hu] Michael Hutchings, The structure of area-minimizing double bubbles, *J. Geom. Anal.*, to appear.
- [M1] Frank Morgan, The double soap bubble conjecture, *MAA FOCUS*, Dec. 1995, 6-7.
- [M2] Frank Morgan, *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*, Academic Press, 2nd ed., 1995.
- [M3] Frank Morgan, Mathematicians, including undergraduates, look at soap bubbles, *Amer. Math. Monthly* 101 (1994), 343-351.
- [P] Ivars Peterson, Toil and trouble over double bubbles, *Science News* 148 (August 12, 1995), 101.

Adresse des Autors:

Prof. Frank Morgan
 Department of Mathematics
 Bronfman Science Center
 18 Hoxsey Street
 Williamstown, MA 01267, USA
 (Übersetzung: G. M. Ziegler.)

„Nachhilfestunde im Rechnen“

Anmerkungen zur *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS)

von Günter Törner

In den letzten Wochen ist Mathematik wieder einmal in die Schlagzeilen geraten. Solche Publizität hat im allgemeinen zwei Seiten, eine erfreuliche und eine weniger rühmliche. Fangen wir mit der guten Nachricht an: Man sorgt sich hierzulande um die Mathematikausbildung, zumindest um die Rechenfähigkeiten unserer Schüler. Das muß wieder besser werden, klingt es aus Ministerien und Schulverwaltungen und die Wirtschaftsverbände pflichten bei. Kopfrechnen gehört neben dem Selbstgeschriebenen, bei allem

Wohlwollen dem Taschenrechner und Computer gegenüber, so ein Kolumnist, einfach zum Leben. Ein wenig schmeicheln uns solche Töne, wir wußten es ja schon im Vorfeld. Und in diesem Sinne will die Politik nun der sorgenden Allgemeinheit ein Zeichen, eine Stunde Rechnen mehr in den Grundschulen von Nordrhein-Westfalen soll bald per Erlaß verordnet werden. Aber ist das wirklich alles?

Was hat denn diese Aufregung verursacht? Auslöser ist eine international vergleichende Studie der TIMSS-Gruppe, deren Ergebnisse von der OECD im Rahmen eines internationalen Vergleichs integriert wurde, in der unter anderem die mathematischen Qualifikationen der Schüler in den Jahrgangsstufen 5 - 8 zur Diskussion standen. Und um es vorweg zu sagen, die Bundesrepublik Deutschland nimmt unter den dort aufgeführten 26 Nationen nur