From: K.C.Rubin@newton.cam.ac.uk
Newsgroups: math.announce
Subject: sketch of Fermat
Date: 24 Jun 1993 09:19:10 -0400
Organization: The Ohio State University, Department of Mathematics
Lines: 103
Sender: daemon@math.ohio-state.edu
Message-ID: <mOo8rAP-00005sC@newton.newton.cam.ac.uk>
NNTP-Posting-Host: mathserv.mps.ohio-state.edu

Several people have asked for more details about Andrew's proof.
Here is a lengthy sketch. Enjoy.

Karl

Theorem. If E is a semistable elliptic curve defined over Q, then E is modular.

It has been known for some time, by work of Frey and Ribet, that Fermat follows from this. If u^q + v^q + w^q = 0, then Frey had the idea of looking at the (semistable) elliptic curve y^2 = x(x-a^q)(x+b^q). If this elliptic curve comes from a modular form, then the work of Ribet on Serre's conjecture shows that there would have to exist a modular form of weight 2 on Gamma_0(2). But there are no such forms.

To prove the Theorem, start with an elliptic curve E, a prime p and let

    rho_p : Gal(Q^bar/Q) -> GL_2(Z/pZ)

be the representation giving the action of Galois on the p-torsion E[p]. We wish to show that a _certain_ lift of this representation to GL_2(Z_p) (namely, the p-adic representation on the Tate module T_p(E)) is attached to a modular form. We will do this by using Mazur's theory of deformations, to show that _every_ lifting which 'looks modular' in a certain precise sense is attached to a modular form.

Fix certain 'lifting data', such as the allowed ramification, specified local behavior at p, etc. for the lift. This defines a lifting problem, and Mazur proves that there is a universal lift, i.e. a local ring R and a representation into GL_2(R) such that every lift of the appropriate type factors through this one.

Now suppose that rho_p is modular, i.e. there is _some_ lift of rho_p which is attached to a modular form. Then there is also a hecke ring T, which is the maximal quotient of R with the property that all _modular_ lifts factor through T. It is a conjecture of Mazur that R = T, and it would follow from this that _every_ lift of rho_p which 'looks modular' (in particular the one we are interested in) is attached to a modular form.

Thus we need to know 2 things:
  (a) rho_p is modular
  (b) R = T.

It was proved by Tunnell that rho_3 is modular for every elliptic curve. This is because PGL_2(Z/3Z) = S_4. So (a) will be satisfied if we take p=3. This is crucial.

Wiles uses (a) to prove (b) under some restrictions on rho_p. Using (a) and some commutative algebra (using the fact that T is Gorenstein, 'basically due to Mazur') Wiles reduces the statement T = R to checking an inequality between the sizes of 2 groups. One of these is related to the Selmer group of the symmetric sqaure of the given modular lifting of rho_p, and the other is related (by work of Hida) to an L-value. The required inequality, which everyone presumes is an instance of the Bloch-Kato conjecture, is what Wiles needs to verify.

He does this using a Kolyvagin-type Euler system argument. This is the most technically difficult part of the proof, and is responsible for most of the length of the manuscript. He uses modular units to construct what he calls a 'geometric Euler system' of cohomology classes. The inspiration for his construction comes from work of Flach, who came up with what is essentially the 'bottom level' of this Euler system. But Wiles needed to go much farther than Flach did. In the end, _under_certain_hypotheses_ on rho_p he gets a workable Euler system and proves the desired inequality. Among other things, it is necessary that rho_p is irreducible.

Suppose now that E is semistable.

Case 1. rho_3 is irreducible.
Take p=3. By Tunnell's theorem (a) above is true. Under these hypotheses the argument above works for rho_3, so we conclude that E is modular.

Case 2. rho_3 is reducible.
Take p=5. In this case rho_5 must be irreducible, or else E would correspond to a rational point on X_0(15). But X_0(15) has only 4 noncuspidal rational points, and these correspond to non-semistable curves. _If_ we knew that rho_5 were modular, then the computation above would apply and E would be modular.

We will find a new semistable elliptic curve E' such that rho_{E,5} = rho_{E',5} and rho_{E',3} is irreducible. Then by Case I, E' is modular. Therefore rho_{E,5} = rho_{E',5} does have a modular lifting and we will be done.

We need to construct such an E'. Let X denote the modular curve whose points correspond to pairs (A, C) where A is an elliptic curve and C is a subgroup of A isomorphic to the group scheme E[5]. (All such curves will have mod-5 representation equal to rho_E.) This X is genus 0, and has one rational point corresponding to E, so it has infinitely many. Now Wiles uses a Hilbert Irreducibility argument to show that not all rational points can be images of rational points on modular curves covering X, corresponding to degenerate level 3 structure (i.e. im(rho_3) not GL_2(Z/3)). In other words, an E' of the type we need exists. (To make sure E' is semistable, choose it 5-adically close to E. Then it is semistable at 5, and at other primes because rho_{E',5} = rho_{E,5}.)

==

Mathematik und Öffentlichkeit

Jeder Mathematiker wird immer wieder vor die Frage gestellt, wie er seine Arbeit jemandem erklären soll, der dieses Fach nicht ausgiebig gelernt hat. Das ist sehr schwierig und einer der Gründe, warum in Zeitungen so selten etwas von Mathematik zu lesen ist. Eine der erfreulichen Ausnahmen machte das FAZ Magazin in seiner Ausgabe vom 14. Mai 1993. Es veröffentlichte einen 7 Seiten langen Artikel von **Herbert Bieber** *mit dem Titel* **„Leben zwischen Apfelmännchen und Schmetterling: Heinz-Otto Peitgen ordnet die Welt"**. *Einige Abschnitte mit Aussagen zur Mathematik sollen hier zitiert werden:*

„... Der Professor rührt amüsiert in seiner Kaffeetasse. Er, der außer der Harley noch eine englische Limousine besitzt, mit Frau und zwei hübschen Töchtern ein elegantes Haus in einem parkähnlichen Garten bewohnt, moderne Musik liebt und seit Jahren erfolgreich Konzerte organisiert, ist erhaben über den Vorwurf der Weltferne. Unzutreffend wäre aber auch die Vermutung, daß hier ein kühler Rechner in seinem voluminösen Bürostuhl wippt und sein mathematisches Talent nur darauf verwendet, abstrakte Zahlen und harte Mark zu verbinden. Heinz-Otto Peitgen ist in erster Linie Wissenschaftler. Vom Gros seiner Kollegen unterscheidet er sich dadurch, daß er eine neuartige Mathematik begründet, mit immensem Engagement erforscht und publik gemacht hat. ...

Blitze zucken auch über Poster, Gebirge und Pflanzen wachsen über Plakate, dazwischen neigen sich im Fenster hohe Pappeln über die Silhouette der Bremer Altstadt. All das — die Bücher, Filme, Bilder und Bäume — ist sichtbarer Ausdruck dessen, was dieser Mann so brillant in Worte fassen kann. Wenn er von Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz und Iterationen spricht, wenn er Farnblätter beschreibt, Wirbelstürme erklärt und Euklid belächelt, glaubt man zu verstehen, welch revolutionäre Erkenntnisse sich hinter fraktaler Geometrie und Chaostheorie verbergen. ...

In jenen Jahren (Anm.der Red.: seiner Zeit bei der Bundeswehr) war der Zufall noch verpönt, nicht nur beim Militär. Auch die Mathematiker mieden ihn und zählten lieber auf die Wahrscheinlichkeit. Doch sie wußten nicht, daß weit weg von Bonn, wo sich Peitgen gerade mitten im Semester in Mathematik immatrikuliert hatte, ein amerikanischer Meteorologe namens Lorenz einen Schmetterling fand, besser: eine geometrische Figur, ein räumliches, schmetterlingsähnliches Diagramm, das die komplizierten Wechselbeziehungen der Atmosphäre auf einen einfachen Nenner brachte: Ordnung und Chaos. ...

Zentraler Gegenstand der mathematischen Forschung auf dem Computer ist seitdem auch die Mandelbrot-Menge. Wenn ihr Bild auf den Schirm gerufen wird, zeichnet der Zufall bunte Schlieren und diffuse Zonen, die grenzenlos zerfließen. Doch die Ordnung hält dagegen und malt mit kräftigen Farben scharf voneinander abgegrenzte Flächen. Und Hand in Hand formen Ordnung und Chaos einen auf der Seite liegenden Schneemann, der in scharfkantigen Blitzen und lodernden Flammen erstrahlt. Dieses Apfelmännchen, wie die Mathematiker das Bild der Mandelbrot-Menge auch bezeichnen, gilt als Grammatik der fraktalen Sprache. Denn jeder seiner Punkte repräsentiert eine eigenständige, unendlich komplexe Zahlenmenge — eine neue fraktale Struktur.

Der Professor beendet das Programm. Die unendlichen Tiefen der Zahlenräume verschwinden hinter dem platten Befehlsmenu. Peitgen steht auf, blickt kopfschüttelnd über die Betonlandschaft der Universität, die klar im Nachmittagslicht verharrt, und wundert sich über die Explosion, die damals hochgegangen ist, die noch anhält und wie ein Sturm die stillen Wissenschaften aufwühlt. Obwohl er ein baumlanger Mann mit dem Emblem eines Motorrades auf der Brust ist, hält er sich nur für einen Schmetterling, der ein bißchen viel Wind ausgelöst hat. In Wahrheit aber ist er das Auge eines Orkans, um das sich alles dreht: turbulent, dynamisch, manchmal chaotisch und sehr oft streng nach Plan.

Wie Ordnung und Chaos harmonieren können und gemeinsam eine dynamische Entwicklung ins Rollen bringen, zeigte in den folgenden Jahren der Erfolg der Bremer Mathematiker. 1984 waren sie in Deutschland die ersten, die ihre Theorien auf eigenen Computern erforschen konnten. Das Ergebnis war eine neue Geometrie, eine neue Sprache, mit der die Forscher begannen, die Struktur des Universums neu zu formulieren. Zwar bleibt diese Sprache für den Laien weitgehend unverständlich, doch da ihre Wörter als faszinierende Bilder sichtbar sind, ist die fraktale Geometrie von ihrer Wirkung her nur mit Einsteins Relativitätstheorie zu vergleichen.

Für die Bilder, die im Institut für dynamische Systeme entstanden, interessierte sich zuerst die Bremer Sparkasse und verblüffte ihre ordnungsgewohnten Kunden mit einer Ausstellung über das Chaos. ...

Was Chaosforschung und fraktale Geometrie über ihren optischen Eindruck hinaus bedeuten, hat Peitgen zusammen mit verschiedenen Kollegen, vor allem mit Dietmar Saupe und Hartmut Jürgens, bisher in ungezählten Veröffentlichungen und fünfzehn Büchern beschrieben. Es geht dabei nicht nur darum, natürliche Formen, wie Pflanzen, Berge, Blutgefäße, vor denen die alte Geometrie kapitulieren mußte, mit einer neuen Geometrie zu begreifen. Vielmehr kann das Chaos, das außer den Meteorologen auch alle anderen Wissenschaftler der verschiedensten Disziplinen regelmäßig zur Verzweiflung bringt, mit Hilfe des Computers erkannt und Schritt für Schritt erforscht werden.

Ein motorradfahrender Computerfreak, ein Professor gleichwohl, der mit seinen grellen Bildern die Laien fasziniert und den wissenschaftlichen Nachwuchs inspiriert, paßt aber nicht ins Konzept einiger altgedienter Ordinarien. Manche, die trotz Einsteinscher Relativität und Heisenbergscher Unschärfe noch immer dem Laplaceschen Determinismus anhängen, fürchten in dem rheinländischen Emporkömmling einen Rebellen, der ihre intellektuelle Autorität untergräbt. Denn Zufall und Chaos vertragen sich nicht mit der Unfehlbarkeit, gleichgültig, ob sie in einem weißen Kittel oder im schwarzen Talar zur Schau getragen wird.

Heinz-Otto Peitgen trägt ein schwarzes T-Shirt mit einem silbernen Adler. Er zuckt mit den Schultern und stöhnt über die Arbeit, die ihm keine Zeit läßt, den Eifersüchteleien indignierter Kapazitäten entgegenzutreten. Sie werden ohnehin immer weniger; denn bisher wurde Peitgen bei zweiundzwanzig Jahrestagungen wissenschaftlicher Vereinigungen im In- und Ausland zum Hauptvortrag gebeten, darunter je zweimal bei der deutschen und, was ebenso ungewöhnlich ist, bei der amerikanischen Mathematiker-Vereinigung. Schließlich wurde er in die Europäische Akademie der Wissenschaft und Künste gewählt, was wieder einen Festvortrag mit sich brachte.

Früher fand Peitgen noch die Muße, unterhalb der Loreley die Fenster eines Ausflugsdampfers verdunkeln zu lassen, um den laienhaften, aber interessierten Vertretern eines pharmazeutischen Konzerns das Chaos mit Lichtbildern nahezubringen. Doch heute, wo er sich vorgenommen hat, die Aufklärung auf einer viel breiteren Basis zu betreiben, sagt er eine Einladung zu einem Vortrag vor ausgewiesenen Experten auf Hawaii ebenso bedauernd wie entschieden ab und trifft sich statt dessen mit Mathematiklehrern aus dem Bundesgebiet. Als Ziel dieser Akademien, die im vergangenen Herbst begannen und in diesem Jahr noch zweimal veranstaltet werden, sieht er eine Belebung des Schulunterrichts: Chaostheorie und fraktale Geometrie sollen Querverbindungen zwischen mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern aufbauen und isolierte Lernstoffe verbinden.

Die Art, wie Peitgens Gymnasiallehrer und sein Professor Friedrich Hirzebruch gelehrt haben, ihre pädagogische Intuition, gibt ihr Schüler nun an die nächste Generation weiter. Während der vergangenen Jahre hörten schon fünfundzwanzigtausend amerikanische Lehrkräfte auf Symposien und Veranstaltungen die neue Lehre des Bremer Mathematikers, der als erster Deutscher vor dem Präsidenten in Washington die Festrede der „Presidential Awards Ceremonies 1988“ hielt. Da vor allem die amerikanischen Wissenschaftler, die für neue Ideen aufgeschlossener sind als ihre europäischen Kollegen, der neuen Mathematik ein Forum bieten, nimmt Peitgen mehrmals im Jahr Urlaub von der Bremer Universität , um auch an der Florida Atlantic University in Boca Raton unterrichten zu können.

Mit der Ehre häufen sich aber auch die Pflichten. An das „Institut für dynamische Systeme“, das von zehn auf vierzig Mitarbeiter angewachsen ist und seit kurzem zusätzlich ein „Centrum für Complexe Systeme und Visualisierung“ mit superschnellen Computern unterhält, wenden sich immer häufiger Wissenschaftler sehr verschiedener Fakultäten: Ingenieure, Biologen, Werkstoffwissenschaftler, Geologen und Informatiker sind längst dabei, ihre fachspezifischen Probleme mit den Methoden der fraktalen Geometrie zu lösen. Da auch die Mediziner erkannt haben, daß der menschliche Körper nichts anderes als eine fraktale, mithin chaotische Figur ist, kommt für Peitgen zu Forschung und Lehre noch die Praxis hinzu. So analysiert eine seiner Arbeitsgruppen computertomographische Bilder, um die medizinische Diagnose zu erleichtern. ...“

Es scheint mir angebracht, Meinungen zu Chaostheorie, zu fraktaler Geometrie und der oben zitierten Form der Darstellung für Nicht-Mathematiker zur Diskussion zu stellen. Daher möchte ich die Leser ermuntern, an die „Mitteilungen“ zu schreiben.

Gerd Fischer

Mathematik ohne Berührungsängste

von Heinz-Otto Peitgen

Herr Kollege Fischer aus Düsseldorf hat mich gebeten, zum Problem „Mathematik und Öffentlichkeit“ anläßlich des hier in Auszügen abgedruckten Artikels, der im FAZ-Magazin erschien, Stellung zu nehmen. Zwar begrüße ich es sehr, wenn Probleme des öffentlichen Bewußtseins über Mathematik in den DMV-Mitteilungen in Zukunft erörtert werden, und damit unser Verhältnis zu gesellschaftlichen Fehleinschätzungen versachlicht wird. Ich lehne es allerdings ab, zu dem Artikel im FAZ-Magazin Stellung zu nehmen. Der Artikel ist nicht von mir, sondern über mich. Er basiert auf Gesprächen mit dem Autor, auf Vorträgen von mir, die der Autor gehört hat, auf Berichten in den Medien sowie meinem Lebenslauf als schriftliche Unterlage. Ich bin weiterhin der Auffassung, daß die Idee, die Auszüge zur Diskussion zu stellen, wenig hilfreich für eine Analyse unseres Öffentlichkeitsproblems ist. Ich hoffe aber, daß der Artikel Anlaß sein könnte, eine Diskussion über dieses Problem in Gang zu bringen.

In der Darlegung meiner Position will ich mich hier auf die zentrale Frage beschränken: Wodurch wird das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit bestimmt, und wie können wir es beinflussen?

Ich gehe also ohne weitere Begründung davon aus, daß wir das Bild aktiv beeinflussen sollten. Sicher ist dieser Imperativ an sich auch schon problematisch und verdient eine gesonderte kritische Erörterung.

Ich will zunächst mit einer exemplarischen Frage zum Kern des Problems kommen. Wodurch unterscheidet sich z.B. das mentale Bild der Mathematik von dem des Maschinenbauwesens? Wohl besonders