Demonstr. Math. 2017; 1: 2–27 **DE GRUYTER** OPEN

Demonstratio Mathematica **Open Access**

Research Article

Catherine de Maere* and Dominique Lambert

An introduction to the edition of two Lemaître's original manuscripts

DOI 10.1515/dema-2017-0002
Received February 16, 2016; accepted April 1, 2016.

Abstract: The aim of this paper is to explain the contributions of G. Lemaître to Spinor Theory. At the end of the paper, we edited also, for the first time two short manuscripts: *Spineurs et Quanta* and *Les spineurs et la physique quantique*, written by Lemaître in December 1955 and in January 1956. This edition is a way of honouring Professor Michael Heller because he was the first, with Professor Odon Godart, who discovered, classified and published unedited manuscripts of G. Lemaître.

Keywords: G.Lemaître, Dirac Equation, Clifford Algebras, Spinors, Majorana, Fermions

MSC: 15A66, 01A65, 01A70

1 Introduction

The contributions of Georges Lemaître in the field of cosmology are well-known [1]. It was he who explained the Hubble law in 1927. In 1931 he introduced his famous Primeval Atom Hypothesis and his cosmological model with a positive value of the cosmological constant, leading to a present acceleration of the universe. We know also that he introduced the idea of the existence of a fossil radiation (he believed that this radiation was in fact made of cosmic rays). Today, Georges Lemaître can without any doubt be considered as one of the fathers of Big Bang cosmology, along with Georg Gamow.

But few people have paid attention to his works using Clifford algebras and spinors. Of course those works have not the same importance as the cosmological ones. But nevertheless they shed some light on the interests of the Belgian cosmologist and priest [2]. It is worth noting that Dirac spoke about Lemaître's algebraic works in a paper entitled: "The scientific work of Georges Lemaître" [3] that is the text of an address given to the Pontifical Academy of Sciences.

Lemaître was a student of Eddington, in Cambridge (UK), during the academic year 1923-24, and many problems he solved during his scientific career, especially at the beginning, have some links with some suggestions made by this famous astronomer. With respect to Clifford algebras and spinors, we know the central role played by these algebras in the context of his project of *Fundamental Theory* [4] in which he tried to deduce the numerical values of the physical constants from an algebraic framework precisely built with a particular Clifford algebra. We know also that, in 1936, Lemaître read the proofs of Eddington's book in 1936 [5], which paves the way to his book *Fundamental Theory* [6]. Lemaître summarized Eddington's Fundamental Theory in a notebook and prepared an unpublished text entitled: "*L'idée maîtresse d'Eddington*" ("The Master Idea of Eddington"). Until the end of his life the Belgian cosmologist hoped the *Fundamental Theory* would lead him to a theoretical foundation for the cosmological constant. This can be seen in his conference paper entitled "*L'étrangeté de l'univers*" [7, 8]. Lemaître

***Corresponding Author: Catherine de Maere:** Université de Namur, Faculté des Sciences et NAXYS (Namur Center for Complex Systems), 61 rue de Bruxelles, 5000 Namur, Belgium, E-mail: mathscath@gmail.com
Dominique Lambert: Université de Namur, Faculté des Sciences et NAXYS (Namur Center for Complex Systems), 61 rue de Bruxelles, 5000 Namur, Belgium, E-mail: dominique.lambert@unamur.be

never worked on a unified theory (of gravitation and electromagnetism) based on extensions of general relativity. A notebook preserved at AL makes clear that Lemaître had studied at least one of the works of Einstein regarding his approach of a unified theory of gravitation and electricity [9]. But he was nevertheless an attempt of Eddington during his stay at M.I.T. The latter built a theory considering that the variation of a vector during its parallel transport does not only depend on the path followed, but also on the orientation that it takes along this way. Lemaître used this in order to obtain equations describing the electromagnetic field. He discussed some points of this formalism with Eddington [10], but he did not continue in this direction because these equations differ from the usual equations of Maxwell when the magnetic field was very intense. Lemaître probably hoped during his all life that somewhere in the works of his Master of Cambridge one could find something useful to build a unified theory for all physical phenomena.

There is in fact a deep link between Lemaître's cosmological model and the field of quaternions, which is a particular case of Clifford algebra. His "finite and without boundary universe" introduced in 1927 [11] and in 1933 [12] is based on a 3-dimensional sphere S^3 (or on the projective space S^3/Z_2). Yet we know that this sphere is the set of quaternions of unit norm. Lemaître dedicated a paper to the elliptic geometry built on this sphere [13, 14].

In 1931, shortly before he published his famous seminal paper about the "primeval Atom Hypothesis" [15], Lemaître wrote his first paper dedicated to spinors entitled "Sur l'interprétation de l'équation de Dirac",("about the interpretation of Dirac equation") [16]. Let us describe a little bit the content of this paper. But first of all let us recall what a Clifford algebra is [17–20]. For each (pseudo-Euclidean) space $\mathbb{R}^{p,q}$ with a pseudo-norm:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_q^2$$

One can naturally associate a Clifford algebra on the field of real numbers (We use $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ for the fields of real numbers, complex numbers and Hamilton quaternions,respectively. We also use $\mathbb{Z}$ denoting the rings of integers. If $\mathbb{K}$ is a field, $\mathbb{K}(n)$ denotes the algebra of matrices n x n whose elements are in $\mathbb{K}$). $\mathbb{R}$, denoted by Cl(p,q), with p+q generators γ_μ satisfying $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0$ (if μ is different of ν) and such that p generators have a square +1 and q generators have a square -1. The basis vectors of this space are then associated with the generators of the algebra and this association allows us to define vectors ($\underline{v} = v^\mu\gamma_\mu$) and to talk about the norms of the latter. Clifford algebras were discovered by William K. Clifford and generalized by Rudolf O. Lipschitz (who considered only the case where the generators have square equal to -1) and, in 1908, Elie Cartan gave a very general definition and classification (in arbitrary signature) of them in his famous paper "Nombres complexes" in the *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [21], which adapted for the French translation a paper of E. Study.

The spin group Spin(p,q) associated with the Clifford algebra Cl(p,q) is generated by exponentials having as their argument a sum of products of two generators of Cl(p,q). One can show that a map of the type $f(v) = uvu^{-1}$, induced by an element u of Spin(p,q), transforms a "vector" v of Cl(p,q) into another "vector" of Cl(p,q) of the same norm . If one takes into consideration the correspondence between Cl(p,q) and the pseudo-Euclidean space $\mathbb{R}^{p,q}$, which is associated with it, one can show that the transformation uvu^{-1} induces a pseudo-orthogonal group of transformations of $\mathbb{R}^{p,q}$, denoted by SO(p,q); the spin group is thus of dimension $n(n-1)/2, \quad n = p + q$. We have then $uvu^{-1} = (-u)v(-u)^{-1}$, thus two transformations of Spin(p,q) correspond to only one element of SO(p,q). This property had already been proved by Élie Cartan, in his paper of 1913. The spinors are elements of vector spaces that are transforming according to the spin group.

It is interesting to note that when $\mathbb{R}^{p,q}$ has an indefinite signature,Spin(p,q) has 2 connected components. The component connected to the identity of the spin group is denoted by Spin_0(p,q). If both p and q are greater or equal to 2, Spin_0(p,q) is not simply connected.

The paper of Lemaître of 1931, is based on the fact that the Dirac gamma matrices can be built from two Clifford algebras. A first Clifford algebra is generated by A_1, A_2, A_3 such that:

$$(A_i)^2 = 1 \quad \text{et} \quad A_iA_j = -A_jA_i \quad \text{if } i \text{ is different of } j.$$

Similarly let B_1, B_2, B_3 generating a second Clifford algebra, namely:

$$(B_i)^2 = 1 \quad \text{et} \quad B_iB_j = -B_jB_i \quad \text{if } i \text{ is different of } j.$$

Lemaître choose a purely imaginary and antisymmetric matrix representation such that:

$$A_iA_j = i\ \epsilon_{ijk} \quad \text{and} \quad B_iB_j = i\ \epsilon_{ijk}B_k.$$

These representations are the following:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

These algebras defined the Clifford algebra Cl(2,0). We know that the real Clifford algebra Cl(2,0) is isomorphic to $\mathbb{R}(2)$. If we multiply each (purely imaginary)A_i and B_i by i we get a pure real representation of Cl(0,2) which is isomorphic to the algebra $\mathbb{H}$ of Hamilton quaternions.

Now, let us suppose that the A_i and B_j are commuting. If we consider all possible products of A_i and B_j, we obtain an algebra which is the direct product of Cl(2,0) and Cl(2,0) which is nothing but $\mathbb{R}(2)$ x $\mathbb{R}(2)$ = $\mathbb{R}(4)$. And let us recall that $\mathbb{H}$ x $\mathbb{H}$ = $\mathbb{R}(4)$. We know that there is a purely real representation of Cl(3,1) which is isomorphic to $\mathbb{R}(4)$. We can generate directly Cl(3,1) choosing the matrices:

$$B_3A_1 \quad B_3A_2 \quad B_3A_3 \quad \text{of unit square, and}$$

$$B_3B_1 \quad (\text{or} \quad B_3B_2) \quad \text{of square minus one}$$

If we multiply these matrix by i we generate a pure imaginary representation of Cl(1,3) and we can write a Dirac equation for the Minkowski space of signature (+ - - -). Let:

$$H := (iB_3B_1)p_0 + (iB_3A_1)p_1 + (iB_3A_2)p_2 + (iB_3A_3)p_3 + mc$$

then the Dirac equation can be written:

$$H\Psi = 0$$

The matrices: B_3A_1, B_3A_2, B_3A_3, B_3B_1 and B_3B_2 generate a pure real representation of Clifford algebra Cl(3,2) which is isomorphic to $\mathbb{R}(4)$ + $\mathbb{R}(4)$. Let call $p_0 = q_1$ and let us introduce the generator B_3B_2 of square minus one multiplied by q_2. One gets the new operator:

$$H' := (iB_3B_1)q_1 + (iB_3B_2)q_2 + mc + (iB_3A_1)p_1 + (iB_3A_2)p_2 + (iB_3A_3)p_3$$

Starting from this operator we can define what we call the Eddington-Dirac equation (Eddington studied this five-dimensional theory in his *Fundamental Theory* in 1949):

$$H'\Psi = 0.$$

Let us now multiply H' by $-i$:

$$H'' := (B_3B_1)q_1 + (B_3B_2)q_2 - imc + (B_3A_1)p_1 + (B_3A_2)p_2 + (B_3A_3)p_3$$

We multiply H'' by B_3 on the left and set $q_3 = -imc$, we are lead to:

$$T := (B_1)q_1 + (B_2)q_2 + (B_3)q_3 + (A_1)p_1 + (A_2)p_2 + (A_3)p_3$$

and to a new equation (which is not Dirac-like): $T\Psi = 0$. Lemaître studied in his paper the invariance properties of this equation. In the matrix representation he used he found that:

$$\det(T) = ((p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 - (q_1)^2 - (q_2)^2 - (q_3)^2)^2$$

If we consider the transformation defined by: $T' = KTK^{-1}$ we immediately check that K is a matrix of the group SO(3,3) which is linked to SL(4,$\mathbb{R}$) because we have [20]: $\mathrm{Spin}_0(3,3)\ /\mathbb{Z}_2\ =$ SL(4,$\mathbb{R}$). The 6 matrices such as

$e^{A_i A_j \theta}$ and $e^{B_i B_j \theta}$ generate euclidean rotations (θ being a real number) and the 9 matrices $e^{A_i B_j \theta}$ generate Lorentz transformations. We have thus 15 transformations corresponding to the dimension of SO(3,3).

It is important to note that the invariance group of the Dirac equation $H\Psi = 0$ is Spin_0(3,1) = SL(2,C) which is isomorphic to the Lorentz group. The invariance group of the Eddington - Dirac equation $H'\Psi = 0$ is Spin_0(3,2) = Sp(4,$\mathbb{R}$). The Lemaître equation has in fact the same invariance group as the one of the Majorana spinor of the pseudo-euclidean space of signature (+++- - -) [22]. It is nice to realize that Lemaître was in fact implicitly working on Majorana spinor which were introduced only in 1937.

In 1937, Lemaître wrote a new paper with the same title as in 1931: "Sur l'interprétation de l'équation de Dirac" [23]. Changing his notations, he introduces the two commuting sets of operators that are no more given by any matrix representation:

$$(A_i)^2 = -1 \quad \text{et} \quad A_i A_j = -A_j A_i \quad \text{if } i \text{ is different of } j$$

$$A_i A_j = \epsilon_{ijk} A_k$$

and:

$$(B_i)^2 = -1 \quad \text{et} \quad B_i B_j = -B_j B_i \quad \text{if } i \text{ is different of } j$$

$$B_i B_j = \epsilon_{ijk} B_k$$

This means that Lemaître is working directly with two commuting Hamilton quaternion algebras. His aim is to study the algebra. He uses then what was known at the time: a quaternion algebra can be generated by two Klein four-group groups (the Dihedral group D_2 which is isomorphic to the direct product $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ x $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ generated by $S_i\,(i = 1, 2, 3)$ and $D_j\,(j = 1, 2, 3)$:

$$D_i = A_i B_i \qquad S_i = A_k B_j$$

We have:

$$S_1 = S_2 S_3 = S_3 S_2 \quad S_2 = S_3 S_1 = S_1 S_3 \quad S_3 = S_1 S_2 = S_2 S_1$$

$$(S_i)^2 = 1$$

$$D_1 = D_2 D_3 = D_3 D_2 \quad D_2 = D_3 D_1 = D_1 D_3 \quad D_3 = D_1 D_2 = D_2 D_1$$

$$(D_i)^2 = 1$$

We assume furthermore that $S_i D_i = D_i S_i$ but $S_i D_j = -D_j S_i$ (for i different of j). It is now easy to check that the quaternion generators can be built using the generators of the two Klein four-group:

$$A_1 = S_1 D_2 \quad ; \quad A_2 = S_2 D_3 \quad ; \quad A_3 = S_3 D_1$$

$$B_1 = D_3 S_1 \quad ; \quad B_2 = D_1 S_2 \quad ; \quad B_3 = D_2 S_3$$

If we consider all the operators $1, A_i, B_j$ and their products $A_i A_j$, $B_i B_j$ and $A_i B_j$, we generate an algebra of dimension 16 which is isomorphic to the Clifford algebra Cl(3,1) = $\mathbb{R}(4)$. This algebra was named by Eddington the algebra of "quadriquaternions" or algebra of "E-numbers"(Edington gives in his book *Fundamental Theory* an explicit Matrix representation of the E- numbers. In the chapter entitle "wave vector" he used explicitely the idempotents of the E- numbers algebras).

The generators of the quadriquaternions are nothing but the ones defined above:

$$E_1 = B_3 A_1 \quad ; \quad E_2 = B_3 A_2 \quad ; \quad E_3 = B_3 A_3 \qquad \text{such that :} \quad (E_i)^2 = +1$$

$$E_4 = B_1 = -B_3 B_1 \qquad (\text{or } E_5 = B_2 = B_3 B_1) \qquad \text{such that : } (E_i)^2 = -1$$

We check that $E_5 = E_1 E_2 E_3 E_4$ and that $E_5 E_i = -E_i E_5 \;\; (i = 1, 2, 3, 4)$. It means that these 5 operators (the so-called "pentad") can be used themselves to generate a new Clifford algebra that is nothing but Cl(3,2)= $\mathbb{R}(4) + \mathbb{R}(4)$.

Lemaître considers now what we call a primitive idempotent C of the algebra Cl(3,1) namely: an element C such that $C^2 = C$. This idempotent is:

$$C = \frac{1}{4}(1 + D_1 + D_2 + D_3)$$

This element satisfies also: $CD_j = D_j C = C$. It absorbs the D_j. An arbitrary quadriquaternion T (i.e. an arbitrary element of Cl(3,1)) can be written using only the operators S_i and D_j. Because of the absorbing property of C, we immediately check that TC can be expressed like:

$$\Psi := TC = (\Psi_0 1 + \Psi_1 S_1 + \Psi_2 S_2 + \Psi_3 S_3)C$$

If we multiply at the left by another quadriquaternion T', $T'TC$ is still of the same form, namely an object depending on 4 numbers Ψ_j. The quadriquaternions of the form TC are thus defining a left ideal of the algebra Cl(3,1). If we multiply by (-i) the matrix representation given above for the A_i and B_j in order to get $(A_i)^2 = (B_j)^2 = -1$, we find the following matrix representation:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Then we can compute:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

And we get:

$$TC = \begin{pmatrix} \Psi_0 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

which is in fact equivalent to a spinor. It shows us that Lemaître is using in 1937 the definition of the spinor as an element of a left ideal of a Clifford algebra [24]. If we define:

$$X^* = C(\xi_0 1 + \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \xi_3 S_3)$$

we check that:

$$X^* = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

This provides us the possibility to build some "interior product": $X^*\Psi = CX^*\Psi C$ and "exterior product": $\Psi X^* = \Psi C X^*$. In his 1937 paper, the cosmologist translates in this language important quantities considered in the framework of the Eddington-Dirac equation (It is worth noting that at that time physicists were very interested by Dirac equation and its generalisations. For example in Belgium, Jules Géhéniau, a student of Théophile De Donder, the founder of the famous school of theoretical physics at the Université Libre de Bruxelles, published in 1938 a book about wave mechanics using Dirac equation [25]).

After the Second World War, Lemaître began to study the Cartan's theory of spinors [26] in order to understand the link between the latter and the above quoted works of Eddington. On 8 June 1948, in a notebook he wrote: "I have studied the Cartan spinors and see more clearly the relationship between his theory and Eddington's". Lemaître wrote to Elie Cartan a letter concerning what he thought to be a mistake. Elie Cartan answered him that there was not and he kindly invited him in his house in Paris on June 1948. Afterwards, Lemaître continued to study carefully Elie Cartan's papers.

In December 1955 Lemaître wrote a first manuscript entitled "*Spineurs et Quanta" ("Spinors and Quanta")*. This manuscript continues the main themes of the 1937 paper but using the "Jordan-Wigner" formalism. The latter uses the creation and annihilation operators of the second quantification to build the generator of a Clifford algebra. Let us consider, for example, a Clifford algebra on the complex field defined by:

$$E_i E_j + E_j E_i = 2\delta_{ij} 1 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 2n)$$

If we define the following operators:

$$H_1 = \frac{1}{2}(E_1 + iE_2), \quad H_1^* = \frac{1}{2}(E_1 - iE_2), \cdots$$

$$H_n = \frac{1}{2}(E_{2n-1} + iE_{2n}), \quad H_n^* = \frac{1}{2}(E_{2n-1} - iE_{2n})$$

We can check the following relations:

$$H_i H_j + H_j H_i = 0 \quad ; \quad H_i^* H_j^* + H_j^* H_i^* = 0 \quad ; \quad H_i H_j^* + H_j^* H_i = \delta_{ij} 1$$

These are the well-known relations defining the Fermions annihilation and creation operators of the quantum field theory [27]. Lemaître uses a definition of the H_i and H_j^* which does not involved the imaginary unit i (because he considers in fact Clifford algebras defined from quadratic forms of pseudo-Euclidean neutral signature).

It is interesting to note that today the Jordan-Wigner representation of a Clifford algebra used by Lemaître is back in fashion. Indeed it is used to described pairs of "Majorana fermions" namely fermions that are equivalent to their anti-particle. <u>One</u> usual fermion can be described by a creation and an annihilation operator H_i^* and H_i. But we have seen that with these operators we can define <u>two</u> Clifford unit vectors: E_i and E_{i+1} these represent the two Majorana fermions if we suppose that $E_j^* = E_j$ (in matrix notations E_j^* is nothing but the hermitian conjugate E_j^+) and if we write: $H_j^* = i(E_j - E_j^*)$ and $H_j = (E_j + E_j^*)$. The interesting point, which in fact explains the wonderful applications in solid states physics and also in quantum computing, is the fact that physical (or computational) information contained in one fermion can be stored non-locally because the two Majorana fermions can be located at two different points [28, 29].

The same year 1955, André Deprit, who was an assistant and afterwards one of the successors of Lemaître, wrote a paper entitled, "A.S. Eddington's E-Numbers" where he gave a "Bourbaki-like" formulation of Eddington's works on Clifford algebras [30]. It seems that Lemaître succeeded in sharing his passion for spinor theory amongst his collaborators!

In January 1956, Lemaître wrote a second manuscript entitled: "*Les spineurs et la physique quantique" ("Spinors and Quantum Physics")*. The aim of this writing is to give a unified framework from which it is possible to understand the several presentation of spinor theory. He said at the beginning of the manuscript:

> "Eddington in the last chapter of RTPW (*Relativity Theory of Protons and Electrons*,this last chapter throws much light on the beginning) highlights the tight connection between the theory of spinors and the Jordan-Wigner functions used in second quantization. This aspect of the theory I place in the foreground of this exposition so we might try to unify the three main works that have in common the fact that they are difficult to understand; they will be referenced by their initials of their authors: A .E. for Arthur Eddington, E .C. for Élie Cartan, C .C. for Claude Chevalley."

In fact this manuscript is directly influenced by a careful reading of the book of Claude Chevalley, *The Algebraic Theory of Spinors* published in 1954 [31]. The titles of both manuscripts are misleading because the reader (but of course it was not prepare to be published!) cannot find any real quantum physics. The latter is a far motivation because the core of the texts is in fact algebra. It does not mean that Lemaître had no interest for quantum mechanics. In 1931, the year when he published his paper on Dirac equation he published also a paper about an application of the Heisenberg relations to the electric field [32]. But afterwards, essentially due to his first training, he dedicated all his time to general relativity, classical mechanics and numerical analysis.

In 1957, one of his student, Roger Broucke, who would later become professor in aerospace engineering at the University of Texas Austin, wrote a master thesis entitled: "L'invention des spineurs" (This master thesis is preserved in Lemaître's Archives UCL, Louvain-la-Neuve). Broucke said that the idea of writing this master thesis came during one of Lemaître's lectures (Letter 15-01-1998,translation from the original in French):

> I know that he [Lemaître] often told me about spinors. I think he launched into spinors because he dreamt about a unified theory. He said that tensors were insufficient as tools [...] and at one point, he said in class: "This Van der Waerden invented spinors in 1928. Strangely, Cartan also invented them in 1913. I would like for someone to try to elucidate that. That would make a nice thesis!"

The master thesis studies spinor representations in the context of the classification of Lie groups and algebras. More precisely, Broucke analyses the families of Lie algebras D_n (Lie algebras of the group SO(2n; $\mathbb{C}$)) and B_n (Lie algebras of the group SO(2n+1;$\mathbb{C}$)) and the spinor representations of these groups as they appeared in the seminal works of Cartan [33]. Lemaître sent Broucke to Jacques Tits at the ULB (Free University of Brussels) who later became professor at the *Collège de France* in Paris, in order to understand more deeply the link between Lie algebras and groups and spinor. Jacques Tits gave him important informations concerning the exceptional groups G_2 and F_4. The previous year Tits has published an important paper: "Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique" [34]. Jacques Tits remained in contact with Lemaître, and when he was in Berkeley, at the beginning of the sixties, he welcomed the cosmologist who was there for a meeting of the *International Astronomical Union* and also for a visit at the *Space Science Laboratories*.

At the end of the fifties and until 1964, the Cartan's spinor theory was a part of Lemaître's lectures in Relativity Theory (master class) in Louvain. Two students, Jean-Pierre Antoine and Jacques Weyers, who became professors of theoretical physics at the UCL (Catholic University of Louvain) contributed to write carefully Lemaître's lecture notes on spinor (academic year 1960-61). Those notes reveal the way Lemaître integrated his readings and his studies in his daily lectures(These lectures notes involved in the course « Théorie de la relativité » (1960-61) will be published).

It is interesting to notice that spinor theory " à la Cartan " has a relatively important place inside Lemaître's lectures of Relativity at the end of the fifties. Lemaître followed the two volumes book of Cartan "*Leçons sur la théorie des spineurs*" (1937). Following Cartan's ideas, Lemaître studies spinors in spaces of even and odd dimensions and introduces the famous notion of pure spinor ("spineur simple"). Let us illustrate this notion by an example giving some intuitions of the general theory of Cartan [35].

Let us consider an isotropic vector (x,y,z) in a 3-dimensional Euclidean complex space $\mathbb{C}^3$ i.e. a vector such that $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Let us associate this isotropic vector with the element X of the Clifford algebra: Cl(3,0) = $\mathbb{C}$(2). Using the well-known Pauli matrices (σ_i) as a basis for such algebra, we can represent X as follows:

$$X = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$$

we immediately check that $X^2 = (x^2 + y^2 + z^2)1 = 0$.

Now let us search for some object Ξ such that: $X\Xi = 0$. This defines what we call a "pure" spinor. We find:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ such that } \begin{cases} \xi^2 = -x + iy \\ \eta^2 = x + iy \\ \xi\eta = z \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = (\eta^2 - \xi^2)/2 \\ y = (\eta^2 + \xi^2)/2 \\ z = \xi\eta \end{cases}$$

If you perform a rotation in the (x,y) plane, for example, leading to:

$$\begin{cases} x' = x\ cos\theta + y\ sin\theta \\ y' = -x\ sin\theta + y\ cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

we check that Ξ is transforming like : $\Xi' = \mathrm{U}\ \Xi$ where:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{-i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

This matrix belongs to SU(2) which is nothing but Spin(3,0). And we know that: SU(2)$/Z_2$ = SO(3) linking the spin group to the orthogonal group in 3 dimensions. Ξ is thus a spinor (but a special one: a "pure" one). Let us develop the X matrix as follows:

$$X = x^0 H_0 + x^1 H_1 + x^{1^*} H_1^* \quad \text{and} \quad x^0 = z, \quad x^1 = x + iy, \quad x^{1^*} = x - iy$$

Then it is straightforward to get:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$H_0 = H_1^* H_1 - H_1 H_1^* = (H_1 + H_1^*)(H_1 - H_1^*)$$

And we check the following properties that characterize the creation and annihilation operators defined above:

$$(H_1)^2 = (H_1^*)^2 = 0 \quad \text{and} \quad H_1 H_1^* + H_1^* H_1 = 1$$

Following Cartan we consider the matrix $C = (H_1 - H_1^*)$ that has not to be confused with the C used above to define idempotents. We get:

$$C^T = C^{-1} = -C; \quad C^2 = -1 \quad \text{and} \quad X^T = (-1)CXC^{-1}$$

This enables to introduce an inner product in the spinor space: $\Xi_1^T C \Xi_2$ which remains invariant under the following transformation: $\Xi_1' = U \Xi_1$ and $\Xi_2' = U \Xi_2$ where U belongs to the spin group (generated from products of an even numbers of unit vectors of the Clifford algebra Cl(3,0): $A^2 = B^2 = 1$). For example, let $U = AB$ (where A and B are unit vector in the Clifford algebra). Using the above equations we can easily compute that:

$$\Xi_1^T B^T A^T CAB \Xi_2 = \Xi_1^T (-1)CBC^{-1}(-1)CAC^{-1}CAB \Xi_2 = \Xi_1^T C \Xi_2$$

The generalizations of this formalism to spaces of arbitrary even and odd dimensions lead to Cartan's approach of the spinor theory that was studied and taught by Lemaître. Lemaître's manuscripts following Cartan's book about the theory of spinors show the deep connection between the equations defining the isotropic planes (serving to define pure spinors), the Jordan-Wigner fermions creation and annihilation operators and the Clifford (Lipschitz) algebras. The products of these operators can be used to generate Lie algebras isomorphic to the real forms of the Lie algebras D_n or B_n that were considered by Broucke following the advice of Lemaître.

Lemaître's manuscripts are also witnesses of the work of the cosmologist searching to connect these formalisms to the one of Chevalley (and before Eddington) introducing the spinors starting with the concept of left ideal of Clifford algebras.

All this shows that Lemaître was still very active in pure mathematics at the end of his life (We know for example that he still studied carefully algebraic topology during the year 1957 [36]). The manuscripts edited in the present work are a clue amongst many others that show the wonderful and constant scientific dynamism of the Big Bang's father.

Let us now discover what exactly contain both original manuscripts of Lemaître: *"Spineurs et Quanta" ("Spinors and Quanta")* and *"Les spineurs et la physique quantique" (Spinors and Quantum Physics")*. We have preserved the original language in which the manuscripts were written (French). The notes of the Editors (NOE) are in English as well as the appendices containing some computation details and clarifications. We have made some minors changes in order to get a coherent sets of conventions and definitions, respecting faithfully Msgr Lemaître's thought.

We are very happy to contribute to this issue honouring Professor Michael Heller. He was the first, with Professor Odon Godart (Université Catholique de Louvain), who discovered, classified and published unedited manuscripts of Msgr Lemaître. Therefore, it is a real pleasure to publish here, for the first time, with the permission of Georges Lemaître's Archives (U.C.L., Louvain-la-Neuve), these two short manuscripts shedding some light on Lemaître's interests on Spinor Theory. For one of us (D.Lambert), This paper is also a way to express to Professor Heller his deep gratitude.

2 The two original manuscripts of Georges Lemaître

2.1 "Spineurs et Quanta" (Décembre 1955)

2.1.1 Définition d'une algèbre $\mathcal{T}$

Considérons une algèbre $\mathcal{T}$ sur le Corps des Réels dont les unités sont formées à partir de 1 (unité du Corps des réels) et de $H_i, H_i^\times (i = 1, 2, ...\nu)$ suivant les lois:

$$H_i H_j + H_j H_i = 0 \qquad H_i^\times H_j^\times + H_j^\times H_i^\times = 0 \qquad H_i H_j^\times + H_j^\times H_i = \delta_{ij}$$

Remarque: cette algèbre a été utilisée en théorie des quanta en rapport avec la seconde quantification, à la Fermi. Elle peut être considérée comme une algèbre extérieure sur les $H_i \;\; H_i^\times$. On a les règles de calcul (NOE: see appendix A):

$$\begin{aligned} H_i H_i^\times H_i &= H_i \\ H_i^\times H_i H_i^\times &= H_i^\times \end{aligned}$$

En écrivant:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= H_i H_i^\times - H_i^\times H_i \\ \Gamma &= \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_\nu = H_0 \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} H_i \Gamma_i &= -\Gamma_i H_i = -H_i \\ H_i^\times \Gamma_i &= -\Gamma_i H_i^\times = H_i^\times \\ \Gamma_i^2 &= H_i H_i^\times + H_i^\times H_i = 1 \end{aligned}$$

Ceci montre que l'algèbre $\mathcal{T}$ est aussi une algèbre extérieure construite sur H_i, $H_i^\times$ et Γ. Ces notations sont inspirées et presque identiques aux notations H_i et H_i' pour $H_i^\times$ de Cartan (Théorie des spineurs, 2°vol.). La connexion avec les nombres E d'Eddington est fournie par les notations ($\nu = 2$ pour Eddington):

$$\begin{aligned} E_{2i} &= H_i + H_i^\times \\ E_{2i-1} &= H_i - H_i^\times \\ E_{2i+1} &= \Gamma \end{aligned}$$

$$E_\lambda^2 = (-1)^\lambda \qquad E_\lambda E_\mu = -E_\mu E_\lambda \quad \lambda \neq \mu \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots 2\nu + 1$$

2.1.2 Spineurs

Désignons par α des indices composés extraits sans répétition de la suite $1, 2 \cdots \nu$.

Si $\alpha = ijk$, nous définissons $i \neq j \neq k$:

$$\begin{aligned} H_\alpha &= H_i H_j H_k \qquad\qquad (H_\varnothing = 1) \\ H_\alpha^\times &= H_k^\times H_j^\times H_i^\times \end{aligned}$$

Si $\alpha' = jik$ on a :

$$H_\alpha = -H_{\alpha'} \qquad H_\alpha^\times = -H_{\alpha'}^\times$$

En particulier pour $\alpha = 12 \cdots \nu$ nous écrivons sans indice:

$$H = H_1 H_2 \cdots H_\nu \qquad H^\times = H_\nu^\times H_{\nu-1}^\times \cdots H_1^\times$$

Remarquons que :

$$H^\times H = H_1^\times H_1 H_2^\times H_2 \cdots H_\nu^\times H_\nu$$

car H_i et $H_i^\times$ commutent avec $H_j H_j^\times$ pour $i \neq j$. Nous appelons spineur contravariant le produit à droite d'un T ($T \in \mathcal{T}$) par $H^\times$:

$$\xi = \sum_\alpha \xi_\alpha H_\alpha H^\times$$

En effet, les T sont la somme d'expressions $H_\alpha H_\beta^\times$ mais $H_\beta^\times H^\times = 0$. Les ξ forment un idéal à gauche. Nous considérons aussi des spineurs covariants:

$$\xi' = HT = H\left(\sum_\alpha \xi'_\alpha H_\alpha^\times\right)$$

formant un idéal à droite.

La relation

$$\eta = T\xi$$

fait correspondre à tout T ($T \in \mathcal{T}$) une transformation linéaire des ξ spineurs (contravariants).

On peut aussi définir des matrices à 2^ν lignes et à 2^ν colonnes (nombre des α) qui représentent l'algèbre $\mathcal{T}$.

2.1.3 Produit de spineurs

On peut définir un produit intérieur et un produit extérieur de spineurs d'espèces différentes:
Le produit intérieur s'écrit:

$$\begin{aligned}\xi'\xi &= \sum_\alpha \sum_\beta \xi'_\alpha \xi_\beta H H_\alpha^\times H_\beta H^\times \\ &= \sum_\alpha \xi'_\alpha \xi_\alpha H H^\times\end{aligned}$$

Le produit extérieur est :

$$J = \xi\xi' = \sum_\alpha \sum_\beta \xi_\alpha \xi'_\beta H_\alpha H^\times H H_\beta^\times$$

$$J \in \mathcal{T}$$

On a :

$$J\xi = \xi\xi'\xi = \sum_\alpha \xi'_\alpha \xi_\alpha \xi H H^\times = \sum \xi'_\alpha \xi_\alpha \xi$$

ξ est donc un vecteur caractéristique de J, la valeur caractéristique étant

$$\sum \xi'_\alpha \xi_\alpha$$

Si $\sum \xi'_\alpha \xi_\alpha = 1$, on dit que J est normé. On a encore :

$$J\check{s} = \xi\xi'\xi\xi' = \sum \xi_\alpha \xi'_\alpha J$$

J est idempotent lorsqu'il est normé .

2.1.4 Transformation des spineurs

Soit q, q $\in \mathcal{T}$, inversible d'inverse q^{-1}. A partir des spineurs contravariants et covariants ξ ξ', on définit des spineurs transformés par les relations:

$$\begin{aligned}\eta &= q\xi \\ \eta' &= \eta q^{-1}\end{aligned}$$

et on tranforme les T par :

$$T' = qTq^{-1}$$

On voit que pour ces transformations, T est un tenseur mixte 1 indice matriciel contravariant, second covariant. Comme on peut écrire :

$$T = \sum\sum t_{\alpha\alpha'} H_\alpha H_{\alpha'}^\times$$
$$T' = \sum\sum t'_{\alpha\alpha'} H_\alpha H_{\alpha'}^\times$$

la transformation q des spineurs induit une transformation $t_{\alpha\alpha'}$ en $t'_{\alpha\alpha'}$ dans l'algèbre $\mathcal{T}$ et en particulier si q est un vecteur (c'est-à-dire s'il est formé de termes du premier degré en H_i $H_i^\times$ et éventuellement en H_0), par exemple:

$$q = H_1 \pm H_1^\times \qquad q^{-1} = \pm H_1 + H_1^\times$$

Alors si:

$$X = \sum x_i H_i + \sum x_i' H_i^\times + x_0 H_0$$

est un autre vecteur, l'opération

$$Y = -qXq^{-1} = \sum y_i H_i + \sum y_i' H_i^\times + y_0 H_0$$

donne:

$$y_0 = x_0 \qquad y_i = x_i \qquad y_i' = x_i' \qquad (i \neq 1)$$

mais:

$$y_1 H_1 + y_1' H_1^\times = -(H_1 \pm H_1^\times)(x_1 H_1 + x_1' H_1^\times)(\pm H_1 + H_1^\times) = \mp x_1' H_1 \mp x_1 H_1^\times$$

$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_1')(H_1 + H_1^\times) = \mp\tfrac{1}{2}(x_1' + x_1)(H_1 + H_1^\times)$$
$$\tfrac{1}{2}(y_1 - y_1')(H_1 - H_1^\times) = \mp\tfrac{1}{2}(x_1' - x_1)(H_1 - H_1^\times)$$

On en déduit:

$$y_1 + y_1' = \mp(x_1 + x_1') \qquad \text{mais} \quad y_1 - y_1' = \pm(x_1 - x_1')$$

C'est une symétrie par rapport au plan perpendiculaire à la direction $H_1 \pm H_1^\times$. Ce n'est pas la transformation considérée plus haut (à cause du signe moins) mais deux telles transformations effectuées successivement rétablissent le signe et définissent une rotation.

Il est établi que toute rotation est obtenue par des symétries par rapport à un plan perpendiculaire à un vecteur non nul. On obtient donc les rotations. En particulier $Y = qXq^{-1}$ pour $q = H_1 + H_1^\times$ est la rotation simple conservant la composante $x_1 + x_1'$ et changeant toutes les composantes perpendiculaires à celle-là. Avec la notation des nombres E d'Eddington, si :

$$X = \sum_{\lambda=1}^{2\nu+1} x_\lambda E_\lambda = x_0\Gamma + \sum_i (x_i H_i + x_i' H_i^\times)$$

On a:

$$X\check{s} = \sum_\lambda (-1)^\lambda x_\lambda^2 = x_0^2 + \sum_i x_i x_i'$$

Les transformations q peuvent ne pas être les plus générales mais former un sous-groupe. Par exemple le sous-groupe qui laisse invariant x_0. Alors les transformations ainsi réduites transforment entre elles les H_i et $H_i^\times$. On peut considérer des sous-groupes plus restreints. Ceux qui conservent H_ν et $H_\nu^\times$ par exemple. La réduction du tenseur T pour la transformation q dépendra naturellement du groupe de transformations envisagé. Si ce groupe produit seulement une transformation orthogonale des H_i $H_i^\times$ (espace à 2ν dimensions) de forme fondamentale:

$$\sum x_i x_i'$$

on utilisera la réduction des T en algèbre alternée des H_i $H_i^\times$ et pour la transformation orthogonale des $H_i + H_i^\times$, $H_i - H_i^\times$ le tenseur T se décomposera en tenseurs irréductibles suivant leurs degrés dans la réduction. C'est ce qu'on appelle les spineurs de l'espace à 2ν dimensions.

Si on admet aussi les symétries Γ on devra considérer la réduction en algèbre alternée des

$$H_i \quad H_i^\times \quad \text{et} \quad \Gamma$$

et pour une transformation orthogonale de l'espace euclidien correspondant de forme fondamentale:

$$x_0^2 + \sum x_i x_i'$$

on aura une autre réduction suivant le degré.

On pourrait naturellement considérer des transformations plus restreintes par exemple extraites des spineurs à $2\nu - 1$ ou $2(\nu - 1)$ dimensions des spineurs à 2ν ou $2\nu + 1$ en restreignant le groupe et donc aussi les éléments envisagés pour définir l'algèbre alternée qui forme par son degré la décomposition.

2.1.5 Etude de $J = \xi\xi'$ produit extérieur de deux spineurs

Edddington a obtenu pour $\nu = 2$ deux théorèmes que nous allons généraliser pour ν quelconque. Utilisons les spineurs à 2ν dimensions, c'est à dire que nous réduisons les transformations à celles qui conservent un vecteur de direction Γ . La réduction fait intervenir un vecteur formé de termes de J de la forme :

$$\sum_i (j_i H_i + j_i' H_i^\times)$$

et un $(2\nu - 1)$-vecteur de la forme

$$(g_1 H_1 + g_1' H_1^\times)\Gamma_2\Gamma_3 \cdots \Gamma_\nu + \text{termes analogues}$$

Nous pouvons évidemment, par une rotation des axes dans l'espace à 2ν dimensions, faire en sorte que ces deux vecteurs (ou plutôt vecteur et densité vectorielle) soient dans le plan H_1 $H_1^\times$. Cela pourra être réalisé en choisissant

$$\xi = (\xi_0 + \xi_1 H_1)H^\times$$

$$\xi' = H(\xi_0' + \xi_1' H_1^\times)$$

Ecrivant:

$$H_2^\times H_2 H_3^\times H_3 \cdots H_\nu^\times H_\nu = \Xi$$

nous avons (NOE: see appendix B):

$$\begin{aligned}\xi\xi' &= (\xi_0 + \xi_1 H_1)H_1^\times H_1(\xi_0' + \xi_1' H_1^\times)\Xi \\ &= (\xi_0\xi_0' H_1^\times H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times + \xi_1\xi_0' H_1 + \xi_1\xi_1' H_1 H_1^\times)\Xi\end{aligned}$$

et comme:

$$\begin{aligned}H_1 H_1^\times &= \frac{1}{2}(1 + \Gamma_1) \\ H_1^\times H_1 &= \frac{1}{2}(1 - \Gamma_1)\end{aligned}$$

On a :

$$\xi\xi' = \left(\frac{1}{2}(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1') + \frac{1}{2}(-\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')\Gamma_1 + \xi_1\xi_0' H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times\right)\Xi$$

On a d'ailleurs:

$$\Xi = \frac{1 - \Gamma_2}{2}\frac{1 - \Gamma_3}{2}\cdots\frac{1 - \Gamma_\nu}{2}$$

Le scalaire est donc:

$$\frac{1}{2^\nu}\left(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1'\right)$$

le 2ν vecteur est:

$$\frac{1}{2^\nu}(-1)^\nu\left(\xi_0\xi_0' - \xi_1\xi_1'\right)\Gamma$$

le vecteur a pour composantes (avec les notations du paragraphe précédent):

$$j_1 = \frac{1}{2^{\nu-1}}\xi_1\xi_0' \qquad j_1' = \frac{1}{2^{\nu-1}}\xi_0\xi_1'$$

tandis que le $(2\nu-1)$ - vecteur a pour composantes:

$$g_1 = -j_1 \qquad g_1' = -j_1'$$

Le produit scalaire de ces vecteurs est nul (NOE:see appendix C). C'est là le premier des deux théorèmes d'Eddington: le vecteur et le $(2\nu-1)$ - vecteur sont perpendiculaires entre eux.

Pour en achever la démonstration, il faut montrer que toute modification des vecteurs ξ ξ' entraînerait des composantes de l'un ou l'autre vecteur en dehors du plan des H_1 $H_1^\times$.

Par exemple pour(NOE: see appendix D):

$$\xi = (\xi_0 + \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2 + \xi_{12} H_{12})H^\times$$

$$\xi' = H(\xi_0' + \xi_1' H_1^\times + \xi_2' H_2^\times + \xi_{12}' H_{12}^\times)$$

on trouve pour les composantes du vecteur selon H_2 et $H_2^\times$ respectivement :

$$\Xi' = H_3^\times H_3 \cdots H_\nu^\times H_\nu$$

$$\frac{1}{2}\left((\xi_2\xi_0' - \xi_{12}\xi_1')H_2 + (\xi_0\xi_2' - \xi_1\xi_{12}')H_2^\times\right)\Xi'$$
$$+\frac{1}{2}\left((-\xi_2\xi_0' - \xi_{12}\xi_1')H_2 + (-\xi_0\xi_2' - \xi_1\xi_{12}')H_2^\times\right)\Gamma_1\Xi'$$

Pour que ces deux expressions s'annulent identiquement, il faut que tous les termes s'annulent et il en résulte que les termes ajouts ξ_2 ξ_2', ξ_{12}, ξ_{12}' sont inadmissibles.

Il est clair que ceci conduit à une démonstration générale puisqu'il suffit de l'établir pour des transformations infinitésimales. Notons encore, pour achever le théorème d'Eddington, que les deux vecteurs perpendiculaires sont de même longueur en valeur absolue(NOE: in fact the square of the length):

$$j_1 j_1' \text{ pour le vecteur et } - j_1 j_1' \text{ pour la densité vectorielle.}$$

Le carré de la longueur du vecteur est la différence des carrés de l'invariant et de la densité (NOE: not to be confused with the vector density) car:

$$\left(\frac{1}{2}(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')\right)\check{s} - \left(\frac{1}{2}(-\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')\right)\check{s} = \xi_0\xi_0'\xi_1\xi_1'$$

Le second théorème d'Eddington concerne l'équation que doit satisfaire un produit extérieur de deux spineurs $\xi\xi'$ dont on connait une partie pentadique et l'invariant j_0. Nous généraliserons cette notion en définissant une partie $(2\nu+1)$ - adique comme étant la somme du vecteur et de la densité tensorielle dans la réduction considérée comme un spineur à 2ν dimensions. Nous avons donc ici (supprimant le facteur commun $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ le résultat sera homogène) :

$$j_0 = \frac{1}{2}(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1') \text{ pour l'un}$$

et pour la partie $(2\nu+1)$ - adique :

$$\Pi = \left(\xi_1\xi_0' H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times + \frac{1}{2}(-\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')\Gamma_1\right)\Xi$$

Le théorème d'Eddington est :

$$(\Pi - j_0)\,\xi = 0$$

La vérification est un simple calcul pour $\xi = (\xi_0 + \xi_1 H_1) H_1^{\times}\,\Xi$ (Ξ commute avec H_1 et $\Xi \check{s} = \Xi$, il disparaît ainsi dans le développement)

$$\begin{aligned}(\Pi - j_0)\xi &= (\xi_1 \xi_0' H_1 + \xi_0 \xi_1' H_1^{\times} - \xi_0 \xi_0' H_1 H_1^{\times} - \xi_1 \xi_1' H_1^{\times} H_1)(\xi_0 + \xi_1 H_1) H_1^{\times}\,\Xi \\ &= (\xi_1 \xi_0' \xi_0 - \xi_0 \xi_0' \xi_1) H_1 H_1^{\times} - \xi_1 \xi_1' \xi_0 H_1^{\times} + \xi_0 \xi_1' \xi_1 H_1^{\times} = 0\end{aligned}$$

Si nous utilisons les spineurs à $2\nu + 1$ dimensions (en admettant une transformation quelconque des q), le théorème est plus simple puisqu'alors Π est simplement le vecteur et on a:

$$\Pi \xi = j_0 \xi$$

ou encore

$$J \xi = \Pi \xi$$

En revanche, dans le premier théorème, il était essentiel de considérer les spineurs à 2ν dimensions et non $2\nu + 1$, de façon à avoir deux tenseurs irréductibles, l'un vecteur et l'autre densité vectorielle. Ce qui est invariant dans cette considération, c'est qu'il est essentiel que le groupe des transformations admissibles soit limité de telle façon qu'il y ait un vecteur, ici choisi comme Γ, qui soit maintenu invariant. La projection du vecteur spineur suivant Γ demeure constante et produit le second invariant ou densité (selon le nombre de dimensions), et il y a de même un second vecteur.

2.2 "Les spineurs et la physique quantique" (Janvier 1956)

2.2.1 Introdution

Depuis Dirac 1928, les ψ de la mécanique ondulatoire ne sont plus des scalaires mais appartiennent à un espace vectoriel qui est distinct de l'espace ou espace-temps physique et, après avoir été appelé "wave-vector" par Eddington, sont finalement désignés comme vecteurs de l'espace de spin ou plus simplement spineurs. Les ψ et l'autre spineur φ (souvent conjugué du premier) sont multipliés par des opérateurs α, dits observables, qui sont représentables par des matrices opérant sur les ψ ou les φ.

Alternativement, les ψ et les φ sont considérés (c'est à dire transformés) comme contravariants et covariants. Les α sont des tenseurs mixtes. La valeur moyenne d'un observable s'obtient par contraction des indices (ou en langage de matrices en prenant la trace (spur) de la matrice). La probabilité de passage d'un état φ (respectivement ψ') à un état ψ' (respectivement φ) s'obtient par produit contracté $\psi' \alpha \varphi$ ou $\varphi \alpha \psi'$.

Ce nouvel aspect de la mécanique quantique se combine naturellement avec l'espace de Hilbert, déjà utilisé par la mécanique quantique. En particulier, les opérateurs doivent y avoir un caractère hermitien. C'est donc particulièrement pour les spineurs qu'a été développé (van der Waerden) le mécanisme des tenseurs hermitiens ou quantités hybrides, auxquelles depuis quelque temps on attache plutôt le nom de Kähler (Schouten).

Plus récemment, A.S.Eddington [5, 6] E. Cartan [26] et C.Chevalley [31] ont séparé cet aspect hermitien en développant d'abord la théorie indépendamment soit dans le corps des Complexes (Cartan) soit dans un corps quelconque (Chevalley) quitte à introduire ensuite, sous la forme de condition de réalité (Eddington), les conditions hermitiennes.

On évite ainsi l'introduction du formalisme Kählerien qui était présent dans les premiers travaux des physiciens, quitte bien entendu à traiter les questions (essentielles au point de vue physique) à la fin, à titre d'application. En particulier, les deux sortes de spineurs φ et ψ ne sont pas originellement supposés conjugués l'un de l'autre.

Eddington, dans le dernier chapitre de RTPE, signale l'étroite connexion existant entre la théorie des spineurs et les fonctions de Jordan-Wigner utilisées en seconde quantification. C'est cet aspect de la théorie que nous allons mettre à l'avant plan de notre exposé et en fonction duquel nous nous efforcerons d'éclaircir et d'unifier les trois travaux principaux, qui ont en commun la réputation d'être de compréhension difficile. Nous les désignerons par les initiales de leurs auteurs AE pour AS Eddington, EC pour Elie Cartan, CC pour Claude Chevalley. Les citations seront introduites par le symbole ∈ qui se lit "*appartient à*". Par exemple "∈ *NB Elém I §1-7*" est la référence de la définition de ∈ par NB pour Nicolas Bourbaki [37].

Il nous parait essentiel d'aider les physiciens à utiliser avec aisance la théorie des spineurs. [Il est en effet évident que la multiplication de l'espace de Hilbert de la théorie des quanta...de vecteurs à quatre composantes aux composantes scalaires a un caractère hybride qu'on peut espérer n'être que provisoire](NOE: this sentence involves unreadable words). Comme les spineurs peuvent avoir un nombre quelconque de composantes, il ne serait pas absurde de considérer l'espace de Hilbert de la théorie quantique comme faisant partie d'un espace de spineurs. On pourrait même peut-être éviter de faire tendre le nombre de dimensions à l'infini si, comme le suggère Eddington, on pouvait se contenter pour la dimension de l'univers de $\frac{3}{2}\,2^{256} \times 136$ dimensions [4]. Si cela était possible, on éviterait bien des difficultés de convergence. Peut-être serait-ce là l'aboutissement normal du programme et du courant d'idée amorcés par la *Fundamental Theory* d'Eddington.

2.2.2 L'algèbre de Clifford et Jordan-Wigner

Considérons les opérateurs :

$$H_i \quad \text{et} \quad H^i = H_i^\times \qquad i \in 1, 2 \cdots \nu \quad \text{de Jordan Wigner} \tag{1}$$

avec les règles de commutation :

$$H_i H_j + H_j H_i = 0 \quad H_i^\times H_j^\times + H_j^\times H_i^\times = 0 \quad H_i H_j^\times + H_j^\times H_i = \delta_{ij} \tag{2}$$

On en déduit les règles de calcul:

$$H_i H_i^\times H_i = H_i \qquad H_i^\times H_i H_i^\times = H_i^\times \tag{3}$$

Notons que la plupart des symboles anticommutent :

$$H_i H_j = -H_j H_i = \frac{1}{2}(H_i H_j - H_j H_i) = H_i \wedge H_j \quad \text{etc.} \tag{4}$$

Mais il est nécessaire d'introduire une notation spéciale pour:

$$\Gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} H_i^\times H_i - H_i H_i^\times = 2H_i^\times \wedge H_i = H_i^\times \wedge H_i - H_i \wedge H_i^\times \tag{5}$$

et nous aurons les relations d'antisymétrisation :

$$H_i^\times H_i = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_i) \tag{6}$$

$$H_i H_i^\times = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_i) \tag{7}$$

Ces relations suffisent pour réduire l'algèbre des opérateurs de Jordan-Wigner à une algèbre extérieure, c'est-à-dire une algèbre dont les termes ne contiennent plus deux facteurs tels que $H_i, H_i^\times$ qui ne sont pas antisymétriques (∈ NB VII-II-III § 5-2 def 4), sauf naturellement dans l'expression Γ_i où ils sont antisymétriques:

$$H_i \Gamma_i = -\Gamma_i H_i = H_i \qquad \Gamma_i H_i^\times = -H_i^\times \Gamma_i = H_i^\times$$

Dans cette algèbre, nous pouvons considérer un espace vectoriel (NOE: G. Lemaître uses Einstein's convention and x is the generic vector of this vector space):

$$x = x^i H_i + x_i H^i + x^0 H_0 \qquad H_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_\nu \tag{8}$$

Nous aurons alors:

$$x^2 = x_i x^i + (x^0)^2 \tag{9}$$

et donc pour deux vecteurs x et y:

$$xy + yx = x_i y^i + y_i x^i + 2x^0 y^0 \tag{10}$$

On peut dire que la réduction à une algèbre extérieure se fait en appliquant autant de fois qu'il est nécessaire la relation (10).

2.2.3 Comparaison entre l'algèbre de Jordan-Wigner et l'algèbre de Clifford

Il importe de nous rendre compte que l'algèbre de Jordan-Wigner ne diffère pas essentiellement de l'algèbre de Clifford, telle qu'elle est définie par Chevalley, en signalant pourtant la généralité que cet auteur a en vu Tout d'abord les scalaires, que nous avons pris tout bonnement comme des nombres (réels et complexes), sont spécifiés comme faisant partie d'un corps K qui pourra même être de caractéristique 1, c'est à dire tel que $x + x = 0$. Nous avons le plus grand respect pour ces finesses que l'auteur souligne particulièrement dans sa préface mais, au point de vue des physiciens pour qui nous écrivons, c'est un aspect qu'ils nous pardonneront de passer sous silence. En second lieu, la forme quadratique $Q(x)$ n'est pas nécessairement réduite à sa forme canonique:

$$Q(x) = x_i x^i + (x^0)^2$$

comme nous l'avons supposé, et ceci peut être important lorsque les restrictions apportées au corps K ne permettent pas cette réduction. Si le nombre de dimensions (2ν) était pair, on ignorerait simplement x^0 .

Notons aussi que la réduction impose la signature de la forme si K est réduit aux nombres réels. Mais, comme nous l'avons dit dans l'introduction, ce sont là des détails que nous laissons pour la fin, lorsque nous examinerons les conditions de réalité.

Chevalley distingue une algèbre tensorielle T d'un espace vectoriel M, $C = T/I$, une algèbre (NOE: the Clifford Algebra built from the quadratic form Q), C' une algèbre sur K et E algèbre extérieure, pour montrer à la fin du paragraphe que pratiquement ces distinctions peuvent être négligées. Ses formules (NOE: CC Chapter II p.39) (1) et (2) sont d'ailleurs nos formules (9) et (10) . En effet, si nous introduisons un point de vue un peu plus général, nous pouvons écrire au lieu de (8):

$$x = x^i e_i \quad i \in 1, 2..., 2\nu + 1 \quad \text{et les expressions} \quad x \otimes y \otimes z = x^i y^j z^k e_i e_j e_k .$$

A ce point de vue et écrivant:

$$Q(x) = g_{ij} x^i x^j$$

l'équation (9) s'écrit sous forme tensorielle ($\in$ NB VII-II-III - § 4 - 1. [37]):

$$x^i x^j = Q(x)\delta^{ij}$$

ou:

$$x \otimes x = Q(x).1$$

Lorsque dans une algèbre on peut simplifier les équations en utilisant une relation admise indépendemment, on dit qu'on obtient l'algèbre quotient par l'idéal engendré par cette relation. Par exemple, si on considère l'algèbre tensorielle T d'un espace vectoriel M à une dimension sur le corps K des réels et qu'on désigne par I l'idéal engendré par la relation $i\check{s} + 1 = 0 \quad i \in M$ c'est à dire toutes les équations obtenues en sommant les expressions :

$$y(i\check{s} + 1)z = 0 \quad y, z \in T$$

l'algèbre obtenue en supprimant tous les termes de l'idéal s'appelle le quotient $C = T/I$, analogue à un reste dans une division par I. C'est là une manière particulièrement simple de définir le corps des complexes, qui illustre bien la définition de $C = T/I$ l'algèbre de Clifford. A chaque élément $x \in T$ correspond un élément $y \in C$, qui est le même élément peut-être simplifié par (9). Ceci définit le "natural mapping" π tel que $\pi(x) = y$.

D'ailleurs si $y \in C$ est simplifié de telle façon qu'il soit réduit à $z \in E$, antisymétrique et faisant donc partie d'une algèbre extérieure E, on dit qu'il y a un "linear mapping" φ de $M \subset C$ dans $M' \subset E$ tel que pour $y \in Mz \in M'$ et on écrit $\varphi(y) = z$ qui peut d'ailleurs être étendu à un "linear mapping" Φ de T dans $E \quad \Phi(x) = z \quad x \in T, z \in E$. Tout cela n'est pas si compliqué pourvu qu'on ne perde pas de vue la définition de $K, Q, M, T, C, E, M', \psi, \varphi, \Phi$.

Il nous faut maintenant expliquer comment la réduction de l'algèbre de Clifford à l'algèbre extérieure donne lieu à une antidérivation de cette algèbre:

$$\delta_x y = B_o(x, y).1 \qquad x, y \in M$$

Cartan a jadis introduit la dérivée dans une algèbre extérieure en supposant que chaque facteur était successivement mis au premier rang pour être dérivé. On appelle maintenant cette opération, avec les changements de signe qu'elle comporte, une anti-dérivation. De plus l'expression dérivation est étendue à d'autres opérations comme la dérivée totale ou partielle de l'analyse. Ceci dit, si nous considérons l'identité:

$$xy = \frac{1}{2}(xy - yx) + \frac{1}{2}(xy + yx)$$

nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{2}(xy - yx) = x \wedge y \overset{\text{déf}}{=} L_x y$$

et d'après (10) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(xy + yx) &= B_o(x, y) = \frac{1}{2}B(x, y)\\ &= \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)\\ &= \frac{1}{2}g_{ik}x^i y^k\end{aligned}$$

Cette opération est une application de y sur K dépendant de x on peut donc l'écrire $\delta_x y = B_o(x, y)$, et on a:

$$xy = (L_x + \delta_x)y$$

Ceci permet d'écrire:

$$x = L_x + \delta_x$$

et si y n'est pas un vecteur de M mais un produit de tels vecteurs (produit antisymétrique), alors en interprétant δ_x comme une anti-dérivation la forme reste valable; elle est donc valable pour $y \in E$. Ceci achève de justifier d'ignorer les distinctions introduites dans les définitions.

2.2.4 Spineurs

Dans l'algèbre de Clifford (Jordan-Wigner) les expressions:

$$\psi^\alpha H_\alpha H^\times$$

où les ψ^i, $i \in 1...\nu$, sont des scalaires dits composantes du spineur et

$$H^\times = H_\nu^\times H_{\nu-1}^\times \cdots H_1^\times$$

jouissent de la propriété que pour T de l'algèbre:

$$\psi' = T\psi$$

est un spineur. α est un indice composé d'indices simples, pris sans répétition dans la suite $1, 2 \cdots \nu$ et si $\alpha = ijk$ on a:

$$H_\alpha = H_i H_j H_k$$

et

$$H_\alpha^\times = H_k^\times H_j^\times H_i^\times$$

En particulier pour $\alpha = 12 \cdots \nu$ on a:

$$H_\alpha^\times = H^\times$$

La sommation en α est prise sans répétition, ou si on préfère pour α une suite strictement croissante.

Pour $T = H_i$ et $\psi = (\psi^{i\alpha} H_{i\alpha} + \psi^{\alpha} H_{\alpha}) H^{\times} \quad i \notin \alpha$, on a:

$$\psi' = \psi^{\alpha'} H_{\alpha'} H^{\times} = \psi^{\alpha} H_{i\alpha} H^{\times}$$

transformation qui supprime $\psi^{i\alpha}$ et conserve ψ^{α} en ajoutant i à sa notation $\psi'^{i\alpha} = \psi^{\alpha}$. De même pour $T = H_i^{\times}$:

$$\psi' = \psi^{\alpha'} H_{\alpha'} H^{\times} = \psi^{i\alpha} H_{\alpha} H^{\times}$$

supprime ψ^{α} et conserve $\psi^{i\alpha}$ en supprimant dans sa notation le i : $\psi'^{\alpha} = \psi^{i\alpha}$. Les H_i, $H_i^{\times}$ peuvent donc être considérés comme des matrices de transformation dont les lignes et colonnes, au nombre de 2^{ν}, sont désignées par les indices composés α écrits sans répétition dans un ordre quelconque ($\in$ EC n°93-95). De même les Γ_i changent le signe des α qui contiennent i et conservent les autres soit:

$$\psi'^{i\alpha} = -\psi^{i\alpha}, \psi'^{\alpha} = \psi^{\alpha}$$

$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{\nu}$ change le signe des α de "longueur" impaire, c'est à dire contenant un nombre impair d'indices simples. Enfin, $H^{\times}$ supprime tous les ψ^{α} sauf $\psi^{\varnothing}$ pour α dans la suite vide $\varnothing$. On voit donc que si on calcule la matrice $T^0 = T \psi^{\alpha} H_{\alpha}$ (sans $H^{\times}$) alors les ψ^{α} sont les éléments de la ligne $\alpha = \varnothing$ dans cette matrice. Les ψ sont donc des matrices où une seule ligne est différente de zéro. C'est une représentation qui convient bien à des vecteurs.

Remarquons que si T^{α}_{β} est la matrice représentant T de telle façon que:

$$\psi^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta},$$

alors les matrices T^{α}_{β} pour $T = H_i$ et celles T^* pour H_i^* sont des matrices transposées. En effet (NOE:there is no summation on α and $H^* = H^{\times}$):

$$T^{\alpha}_{\beta} \quad \text{est nul sauf} \quad T^{i\alpha}_{\alpha} = 1$$

et:

$$T^{*\alpha}_{\beta} \quad \text{est nul sauf} \quad T^{*\alpha}_{i\alpha} = 1$$

Comme tout T est engendré par les H_i, H_i^*, on peut définir avec naturel $H_i = (H_i^*)^*$. On peut transposer toutes les relations. Le transposé d'un spineur $\psi = \psi^{\alpha}$ s'appelle un spineur φ. On aura donc pour les φ:

$$\varphi = \varphi_{\alpha} H H^{\alpha} \quad \text{(rappel} \quad H^i = H_i^*)$$

Les ψ sont des matrices $\psi = T$ où les T^{α}_{β} sont nuls sauf les $T^{\alpha}_{\varnothing}$. C'est-à-dire que l'indice significatif est le premier indice de la matrice. On aura $\varphi_{\alpha} = T^{\varnothing}_{\alpha}$. Il s'en suit que dans l'ordre $\varphi\psi$ le produit est:

$$\varphi\psi = \varphi_{\alpha} \psi^{\alpha} H H^{\alpha} H_{\alpha} H^{\times} = \varphi_{\alpha} \psi^{\alpha} H H^{\times}$$

matrice n'ayant qu'une seule composante $T^{\varnothing}_{\varnothing}$ (on utilise les règles de calcul (3)). Il est inutile de passer par la représentation en indices différents car:

$$\varphi_{\alpha} \psi^{\beta} H H^{\alpha} H_{\beta} H^{\times} = \varphi_{\alpha} \psi^{\alpha} H H^{\times}$$

par les règles de calcul. Il convient d'appeler ce produit un produit intérieur .

Dans l'ordre opposé, on a un produit extérieur:

$$\psi\varphi = \psi^{\alpha} \varphi_{\beta} H_{\alpha} H^{\times} H H^{\beta} = T^{\alpha}_{\beta}$$

qui est une matrice à deux indices libres. Autrement dit c'est le tenseur mixte :

$$\psi^{\alpha} \varphi_{\beta}$$

tandis que $\varphi\psi$ est l'invariant:

$$\varphi_{\alpha} \psi^{\alpha}$$

ou plutôt le tenseur de notation $T^{\varnothing}_{\varnothing}$ qui n'est pas la matrice unité.

Notons qu'ici l'introduction de contravariant et covariant est assez arbitraire puisque, contrairement à ce qui se passe en relativité, nous n'avons pas à considérer une différentielle des coordonnées que nous prenons traditionnellement comme contravariantes. Ici, les matrices étant définies par la multiplication à gauche des ψ (contravariants), elle veut dire que nous considérons le premier indice comme contravariant. Le contraire peut être fait tout aussi légitimement ($\in$ AE chapter 1 and also $\in$ EC 94).

Nous pouvons maintenant introduire des transformations linéaires de spineurs. Si $q = q^{\alpha}_{\beta}$ est une matrice inversible nous pouvons définir une transformation $\psi \to \psi'$ par:

$$\psi^{\alpha'} = q^{\alpha'}_{\alpha} \psi^{\alpha} \qquad \psi^{\alpha} = q^{\alpha}_{\alpha'} \psi^{\alpha'} \qquad q^{\alpha}_{\alpha'} q^{\alpha'}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$
$$\varphi_{\alpha'} = \varphi_{\alpha} q^{\alpha}_{\alpha'}$$

ou en notation matricielle :

$$\psi' = q\psi$$
$$\varphi' = \varphi q^{-1} \qquad qq^{-1} = 1$$

pour les T on aura:

$$T^{\alpha'}_{\beta'} = q^{\alpha'}_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta} q^{\beta}_{\beta'}$$

ou :

$$T' = qTq^{-1}$$

2.2.5 Symétries et rotations

Parmi les transformations, il en est qui jouent un rôle spécial: ce sont les symétries et les rotations (2 symétries). Soit:

$$a = a^j H_j + a_j H^j \quad \text{un vecteur particulier}$$
$$\text{et} \qquad x = x^j H_j + x_j H^j \quad \text{un vecteur quelconque.}$$

Utilisant les relations (NOE: see formulae (2) with $H^j = H^{\times}_j$):

$$H^j H_k = -H_k H^j + \delta^j_k$$
$$H_k H^j = -H^j H_k + \delta^j_k,$$

nous obtenons:

$$xa = -ax + x_j a^j + x^j a_j$$

avec en particulier pour $x = a$:

$$a\check{s} = -a\check{s} + 2a_j a^j \qquad a\check{s} = a_j a^j$$

que nous supposons différent de zéro. Ensuite:

$$axa = -a\check{s}x + (x_j a^j + x^j a_j)a$$

qui est un vecteur soit $-a^2 y$. Explicitement on a: $y = -axa^{-1}$

$$y = y^i H_i + y_i H^i = \left[x^i - \frac{(x_j a^j + x^j a_j)}{a_h a^h} a^i \right] H_i + \left[x_i - \frac{x_j a^j + x^j a_j}{a_h a^h} a_i \right] H^i.$$

$$\text{Pour} \quad x = a \quad \text{on a} \quad y = -a$$

$$\text{Pour} \quad xa = 0 \quad \text{on a} \quad y = x$$

C'est la symétrie associée à a conservant les vecteurs de l'hyperplan xa conjugué ou perpendiculaire à a et changeant le signe de a.

Lorsqu'on admet pour transformation celles qui correspondent à :

$$q = abc \qquad q^{-1} = c^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

produit de vecteurs abc, on obtient les spineurs à 2ν dimensions. Remarquons que pour ces transformations $x_0 H_0$ est invariant car $qH_0 = -H_0 q$ et donc:

$$-qH_0 q^{-1} = H_0$$

En levant cette restriction on obtient les symétries à $2\nu + 1$ dimensions . On écrit maintenant:

$$\begin{aligned} a &= a^j H_j + a_j H^j + a_0 H_0 \qquad j \in 1, 2, \cdots, \nu \\ x &= x^j H_j + x_j H^j + x_0 H_0 \end{aligned}$$

et on a:

$$xa = -ax + x_j a^j + x^j a_j + 2x_0 a_0$$

soit:

$$xa = -ax + x_j a^j + x^j a_j \quad j \in 0, 1, 2 \cdots, \nu \quad x^0 = x_0 \quad a^0 = a_0$$

La suite du calcul n'est modifiée que parce que la sommation admet maintenant la valeur $j = 0$. On a finalement:

$$y = -axa^{-1} = x - \frac{x_j a^j + x^j a_j}{a_j a^j} a$$

Ou plus explicitement, rétablissant les indices zéro, càd: $j \in 1, 2, \cdots, \nu$

$$y_0 H_0 + y^i H_i + y_i H^i = x^i H_i + x_i H^i + x_0 H_0 - \frac{x_j a^j + x^j a_j + 2x_0 a_0}{a_h a^h + a_0^2} (a^i H_i + a_i H^i + a_0 H_0)$$

2.2.6 Spineurs associés

Nous avons défini deux sortes de spineurs, distingués par la position des indices :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^\alpha H_\alpha H^\times \qquad \text{(contravariant)} \\ \varphi &= \varphi_\alpha H H^\alpha \qquad \text{(covariant)} \end{aligned}$$

Nous avons remarqué que le transposé ψ^* d'un spineur contravariant est un spineur covariant. Nous nous proposons de définir une relation entre spineurs d'espèces opposées, analogue à celle des tenseurs associés qui dérivent l'un de l'autre par multiplication contractée par une forme fondamentale. Cette association doit être définie de manière à être compatible avec la transformation que subissent les spineurs pour une symétrie, c'est à dire:

$$\begin{aligned} \psi' &= \pm a\psi \qquad (a\check{s} = 1) \\ \varphi' &= \pm \varphi a \end{aligned}$$

les signes $\pm$ ne devant pas nécessairement se correspondre. On ne peut donc pas employer:

$$\varphi = \psi^*$$

car on aurait:

$$\varphi' = \pm \psi^* a$$

tandis que:

$$\psi'^* \quad \text{est} \quad \psi^* a^*.$$

Il faut donc poser:

$$\varphi = \psi^* C$$

avec des propriétés convenables de C. Nous avons:

$$\varphi' = \pm\psi^* Ca$$
$$\psi'^* C = \psi^* a^* C$$

C doit être tel que (∈EC 101 formula 13):

$$Ca = \pm a^* C$$

Pour nous orienter, traitons d'abord la question à une dimension ($\nu = 1$). Un vecteur peut s'écrire avec $\Gamma = (H^\times H - HH^\times)$:

$$V = uH + vH^\times + w\Gamma$$

on a:

$$H\Gamma = -\Gamma H = H$$
$$H\Gamma^\times = -H^\times\Gamma = H^\times$$

donc (NOE: using also the formulae (7) and (6)):

$$\begin{cases} HV = vHH^\times + wH\Gamma = \frac{v}{2}(1-\Gamma) + wH \\ VH = vH^\times H + w\Gamma H = \frac{v}{2}(1+\Gamma) - wH \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^\times V = uH^\times H + wH^\times\Gamma = \frac{u}{2}(1+\Gamma) - wH^\times \\ VH^\times = uHH^\times + w\Gamma H^\times = \frac{u}{2}(1-\Gamma) + wH^\times \end{cases}$$

D'où:

$$(H - H^\times)V = \frac{v-u}{2} - \frac{v+u}{2}\Gamma + wH + wH^\times$$
$$V(H - H^\times) = \frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2}\Gamma - wH - wH^\times$$

Mais:

$$V^* = vH + uH^* + w\Gamma \qquad \Gamma^* = \Gamma$$
$$V^*(H - H^*) = \frac{u-v}{2} + \frac{v+u}{2}\Gamma - wH - wH^\times = -(H - H^\times)V = (H^\times - H)V$$

Pour ν quelconque nous poserons:

$$C = (H_1 - H_1^\times)(H_2 - H_2^\times)\cdots(H_\nu - H_\nu^\times)$$

et nous remarquons que les facteurs anticommutent:

$$V = x^i H_i + x_i H^i + x_o\Gamma \qquad i \in 1, 2\cdots\nu$$
$$V^* = \sum_i (x^i H^i + x_i H_i) + x_o\Gamma$$

Et nous avons:

$$CV = (-1)^\nu V^* C$$

Par exemple pour $V = V_1$:

$$CV_1 = (H_1 - H_1^\times)V_1(H_2 - H_2^\times)\cdots(H_\nu - H_\nu^\times)(-1)^{\nu-1}$$
$$= V_1(H_1 - H_1^\times)(H_2 - H_2^\times)\cdots(H_\nu - H_\nu^\times)(-1)^\nu$$

Moyennant un changement de signe, on peut arranger comme on veut les facteurs de C (dans les deux membres). Enfin, $H_0 = \Gamma = \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\nu$, les Γ_i commutent entre eux et avec les $H_i - H_i^\times$ d'indices différents, mais

$$(H_i - H^i)\Gamma_i = -\Gamma_i(H_i - H_i^\times)$$

d'où le $(-1)^\nu$.

2.2.7 Présentation de Chevalley

Chevalley ($\in$ CC 2.2 *Structure of the Clifford Algebra*) introduit dans l'espace vectoriel M deux sous-espaces totalement singuliers complémentaires l'un de l'autre. Nous pouvons les identifier (NOE: assumption M is of dimension $2r$ where $r = \nu$):

$$N \to \quad x = x^i H_i$$
$$P \to \quad x = x_i H^i$$

avec correspondance des bases comme pour nos H_i, H^i.

On pose (NOE: f is the product of base elements of P and $\wedge$ is the notation of the product in E, the exterior algebra on M): $f = y_1 y_2 \cdots y_r = y_1 \wedge y_2 \cdots \wedge y_r$. Cela donne ici:

$$f = H^{\times} = H^{\times}_{\nu} H^{\times}_{\nu-1} \cdots H^{\times}_1 = H^{\nu} H^{\nu-1} \cdots H^1$$

Chevalley considère l'idéal à gauche Cf de C et montre que:

$$Cf = E^N f = C^N f$$

où E^N est la sous-algèbre extérieure de E générée par N et C^N la sous-algèbre de C générée par N. Avec les H_i on a:

$$TH^* = \psi^{\alpha} H_{\alpha} H^{\times}.$$

E^N est donc $\psi^{\alpha} H_{\alpha}$ et C^N, l'algèbre de Clifford correspondante.

Chevalley considère aussi $fC = fC^N$ idéal à droite. Il calcule ($\in$ CC 2.2) $x(uf)$ $u \in C^N$ et $x \in N$ ou $x \in P$. Posant Q la forme quadratique associée à C, et G le groupe orthogonal de Q. Chevalley définit ($\in$ CC 2.3) Γ, le groupe de Clifford de G ou groupe des éléments inversibles s de C tels que si $x \in M$ (vecteur), $y = sxs^{-1}$ est un vecteur ($y \in M$). Les $s \in \Gamma$ sont donc les vecteurs par rapport auxquels on définit des symétries (avec aussi $y = -sxs^{-1}$) ou des produits de symétries et rotations. Pour $n = 2\nu + 1$, les s seront toutes les matrices inversibles, mais non pour $n = 2\nu$ où il faut se contenter des vecteurs au sens restreint:

$$V = x^i H_i + x_i H^i \quad \text{et non} \quad x^i H_i + x_i H^i + x_o H_o$$

L'automorphisme linéaire $\chi(s)$: $x \to sxs^{-1}$, forme la représentation vectorielle de Γ. Naturellement on a:

$$(sxs^{-1})\check{s} = sx\check{s}s^{-1} = Q(x).1$$

χ " *maps* Γ *into the orthogonal group* G *of* Q ". Pour le changement de signe, on définit ζ l'appliquation $x \to -x \quad x \in M$ et ζ' l'automorphisme de C qui étend ζ($\in$ CC p. 50).

La représentation du groupe de Clifford au moyen de matrices est expliquée de la façon suivante ($\in$ CC 2.2). Une matrice définit une transformation linéaire ou endomorphisme d'un certain espace, ici:

$$E^N \to \psi^{\alpha} H_{\alpha} \qquad (\text{sans} \quad H^{\times}).$$

Cet endomorphisme est appelé ρ. Il correspond à un élément quelconque $w \in C$ de l'algèbre de Clifford. On l'écrit donc $\rho(w)$. Agissant sur un $u \in E^N$, il le transforme en un $v \in E^N$:

$$v = \rho(w).u \quad \text{soit} \qquad \psi^{\alpha'} = w^{\alpha'}_{\alpha} \psi^{\alpha}$$

Donc

$$\rho(w) = w^{\alpha'}_{\alpha}$$

et cela de telle façon que:

$$wuf = (\rho(w).u)f = vf$$

Ce que nous écrivons:

$$w\psi^{\alpha} H_{\alpha} H^{\times} = \psi^{\alpha'} H_{\alpha'} H^{\times} \quad \text{ou} \quad \psi'^{\alpha} H_{\alpha} H^{\times}$$

C'est bien ainsi que nous avons introduit les matrices représentant les w (appelées T^{α}_{β}).

Naturellement, au lieu de l'emploi de règles de calcul, on peut avoir recours à l'antidérivation δ_x comme nous l'avons expliqué plus haut.

3 Appendix (NOE)

Appendix A. Computation rules on $\mathcal{T}$

From the first and second identities defining $\mathcal{T}$ we get:

$$H_i H_j + H_j H_i = 0 \qquad H_i^{\times} H_j^{\times} + H_j^{\times} H_i^{\times} = 0$$

asuming that $i = j$, we deduce:

$$H_i^2 = 0 \qquad H_i^{\times 2} = 0$$

Setting $i = j$, the third identity gives:

$$H_i H_i^{\times} + H_i^{\times} H_i = 1$$

Multiplying from the left both sides by $H_i^{\times}$ we get :

$$H_i^{\times} H_i H_i^{\times} = H_i^{\times}$$

In a similar way, multiplying by H_i leads to :

$$H_i H_i^{\times} H_i = H_i$$

Appendix B. Expansion of the product $\xi\xi'$

1) In the Manuscript, Msgr Lemaître writes first:

$$\xi\xi' = (\xi_0 + \xi_1 H_1) H^{\times} H (\xi_0' + \xi_1' H_1^{\times}) \Xi$$

But afterwards, the text shows clearly that the second factor of the product should be written:

$$H_1^{\times} H_1$$

2)Definition of Γ_i: One of the difficulties we faced trying to understand Msgrs Lemaître's notes was that he clearly changed his definition of the Γ_i between 1955 ans 1956 (the handwritten text exhibits many erasures on the first page). Yet, all the text is coherent only if:

$$\Gamma_i = H_i H_i^{\times} - H_i^{\times} H_i$$

In that case, because of the following equations:

$$H_1 H_1^{\times} + H_1^{\times} H_1 = 1$$
$$H_1 H_1^{\times} - H_1^{\times} H_1 = \Gamma_1$$

and summing these equations, we get :

$$H_1 H_1^{\times} = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_1)$$

Substracting the same equations, we obtain :

$$H_1^{\times} H_1 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_1)$$

This corresponds to what is found in Lemaître's original text (p.7 in his hand-written manuscript). From this we also deduce the formula giving the expansion of Ξ. This is the reason why we have chosen, from the beginning, this definition of Γ_i.

Appendix C. Orthogonality between the vector and the $(2\nu - 1)$ - vector

In order to get some insight, let us trackle the case $\nu = 2$

$$\xi\xi' = \left(\frac{1}{2}(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1') + \frac{1}{2}(-\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')\Gamma_1 + \xi_1\xi_0' H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times\right)\frac{1}{2}(1-\Gamma_2)$$

The scalar is:

$$\frac{1}{2^2}(\xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1')$$

The density can be written:

$$\frac{(-1)^2}{2^2}(\xi_0\xi_0' - \xi_1\xi_1')\Gamma_1\Gamma_2 \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$$

The vector is expressed by:

$$\frac{1}{2}(\xi_1\xi_0' H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times) = j_1 H_1 + j_1' H_1^\times$$

and the 3-vector:

$$\frac{1}{2}(-1)(\xi_1\xi_0' H_1 + \xi_0\xi_1' H_1^\times)\Gamma_2 = (g_1 H_1 + g_1' H_1^\times)\Gamma_2$$

The scalar product of the vector and the 3-vector is:

$$\frac{1}{2}\left((j_1 H_1 + j_1' H_1^\times)(g_1 H_1 + g_1' H_1^\times)\Gamma_2 + \Gamma_2(g_1 H_1 + g_1' H_1^\times)(j_1 H_1 + j_1' H_1^\times)\right)$$

which is equal to:

$$j_1 g_1' H_1 H_1^\times \Gamma_2 + j_1' g_1 H_1^\times H_1 \Gamma_2 + g_1 j_1' H_1 \Gamma_2 H_1^\times + g_1' j_1 H_1^\times \Gamma_2 H_1$$

or:

$$(j_1 g_1' - j_1' g_1)\Gamma_1\Gamma_2$$

which is zero because of the following equations:

$$j_1 = -g_1 = \frac{1}{2}\xi_1\xi_0' \qquad j_1' = -g_1' = \frac{1}{2}\xi_0\xi_1'$$

Appendix D. Components of $\xi\xi'$ along H_2 et $H_2^\times$

To remain coherent with the definitions used by Lemaître at the beginning of his handwritten notes (page 2), we were obliged to modify the definitions of ξ et ξ' (page 8 of the original handwritten text). Starting from:

$$H_{12} = H_1 H_2 \qquad H_{12}^\times = H_2^\times H_1^\times$$

we get:

$$\xi\xi' = (\xi_0 + \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2 + \xi_{12} H_1 H_2) H_1^\times H_1 \Xi' (\xi_0' + \xi_1' H_1^\times + \xi_2' H_2^\times + \xi_{12}' H_2^\times H_1^\times)$$

The terms in H_2 and $H_2^\times$ come from :

$$(\xi_2\xi_0' H_2 H_1^\times H_1 + \xi_{12}\xi_1' H_1 H_2 H_1^\times + \xi_0\xi_2' H_1^\times H_1 H_2^\times + \xi_1\xi_{12}' H_1 H_2^\times H_1^\times)\Xi'$$

Knowing that:

$$\begin{aligned} H_1 H_2^\times H_1^\times &= -H_1 H_1^\times H_2^\times \\ H_2 H_1^\times H_1 &= H_1^\times H_1 H_2 \end{aligned}$$

$$H_1 H_2 H_1^{\times} = -H_1 H_1^{\times} H_2$$

we get:

$$(\xi_2 \xi_0' H_1^{\times} H_1 H_2 - \xi_{12} \xi_1' H_1 H_1^{\times} H_2 + \xi_0 \xi_2' H_1^{\times} H_1 H_2^{\times} - \xi_1 \xi_{12}' H_1 H_1^{\times} H_2^{\times}) \Xi'$$

But:

$$H_1^{\times} H_1 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_1)$$
$$H_1 H_1^{\times} = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_1)$$

This allows us to find the components along H_2 and $H_2^{\times}$:

$$\frac{1}{2}\left((\xi_2 \xi_0' - \xi_{12} \xi_1') H_2 + (\xi_0 \xi_2' - \xi_1 \xi_{12}') H_2^{\times}\right) \Xi' + \frac{1}{2}\left((-\xi_2 \xi_0' - \xi_{12} \xi_1') H_2 + (-\xi_0 \xi_2' - \xi_1 \xi_{12}') H_2^{\times}\right) \Gamma_1 \Xi'$$

In order to cancel the term involving H_2, it is necessary to have :

$$\begin{aligned} \xi_2 \xi_0' &= \xi_{12} \xi_1' \\ &= -\xi_{12} \xi_1' \end{aligned}$$

This is only possible if ξ_{12} and ξ_2 are zero (for ξ_1' and ξ_0' are not zero). Similarly the terms involving $H_2^{\times}$ are only zero if ξ_{12}' and ξ_2' are also zero.

References

[1] Lambert D., The Atom of the Universe. The Life and Work of Georges Lemaître, Cracow, Copernicus Center Press, 2015

[2] Lambert D., Droga Duchowa Georgesa Lemaître'a, (W. Zaluski, K. Mrowka), Tarnów, Biblos, 2012. (translated from the French: L'itinéraire spiritual de Georges Lemaître suivi de Univers et Atome (inédit de G. Lemaître), Bruxelles, Lessius, 2008

[3] Dirac P. A. M., The Scientific Work of Georges Lemaître, Pontificiae Academiae Scientiarum Commentarii, t.II, n°11, 1968

[4] Kilmister C. K., Eddington's Search for a Fundamental Theory: A Key to the Universe, Cambridge University Press, 1994

[5] Eddington A. S., Relativity Theory of Protons and Electrons, Cambridge University Press, 1936

[6] Eddington A. S., Fundamental Theory, Cambridge University Press, 1949

[7] Lemaître G., L'étrangeté de l'Univers, (conférence du 8 avril), La scuola in Azione, Varesse, Multa Paucis, Notiziario per gli allievi, 1960, 15, 3-22

[8] Lemaître G., Un nouveau systeme de chiffres et autres essais, Varese, Multa Paucis, Quaderni, 1961, 10, 27-41

[9] Vizgin V. P., Unified Field Theories in the first third of the 20th century, Basel, Birkhäuser, 1994, 204-218

[10] Lemaître G., Letter addressed to Eddington, Lemaître's Archives, UCL, Louvain-la-Neuve, 29 November 1925

[11] Lemaître G., Un univers homogene de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques, (séance du 25 avril 1927), Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, série A: Sciences Mathématiques, 1re partie: Compte rendu des Séances, 1927, 47, 49-59

[12] Lemaître G., L'univers en expansion, (séance du 3 mai 1933, 1re section), Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, serie A Sciences Mathématiques, 1933, 53(2), 51-85 (English translation: M. A. H. Mac Callum, The expanding universe, Gen. Relativity Gravitation, 1997, 29 (5), 637-640)

[13] Lemaître G., Quaternions et espace elliptique, (note présentée lors de la séance du 8 février 1948), Acta Pontificiae Academiae Scientiarum, 1948, 12 (8), 57-78

[14] Lemaître G., Quaternions et espace elliptique (L'Accadémie pontificale des sciences en mémoire de son président G.Lemaître a l'occasion du cinquantieme anniversaire de sa mort), In Civiate Vaticana, Pontifia Academia Scientiarum, scripta varia, 1972, 36, 183-206

[15] Lemaître G., The beginning of the world from the point of view of quantum theory, Nature 127 (3210), 9 May 1931, 706

[16] Lemaître G., Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac, (séance du 22 avril 1931, 2e section), Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Série B: Sciences Physiques et Naturelles, 1re partie, 1931, 51, 83-93

[17] Budinich P., Trautman A., The Spinorial Chessboard, Berlin, Springer-Verlag, 1988

[18] Dabrowski L., Group Action on Spinors, Napoli, Bibliopolis, 1988. Georges Lemaître's fascination for spinors 55

[19] Lawson H. B., Michelson M.-L., Spin Geometry, Princeton University Press, 1989

[20] Harvey F. R., Spinors and Calibrations, New York, Academic Press, 1990, 251-272

[21] Cartan E., Nombres complexes, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, I, 1908, 5 (38), 463-465

[22] Gibbons G. W., The Kummer Configuration and the Geometry of Majorana Spinors (in Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformation), Dordrecht, Kluwer, 1993, 39-52
[23] Lemaître G., Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac, (séance du 28 octobre 1937, 1e section), Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Série I: Sciences Mathématiques et Physiques, 1937, 57 (3), 165-172
[24] Lounesto P., Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, 1997
[25] De Donder T., Mécanique ondulatoire de l'électron et du photon, Paris, Gauthier-Villars, 1938
[26] Cartan E., Leçons sur la théorie des spineurs, (English translation: The Theory of Spinors, New York, 1966), Paris, Hermann, 1937
[27] Huang K., Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals, New York, 1998, 10-13
[28] Leijnse M., Flensberg K., Introduction to Topological Superconductivity and Majorana Fermions, arXiv:1206.1736v2 [cond-mat.mes-hall], 16 November 2012
[29] Kauffman L. H., Knot Logic and Topological Quantum Computing with Majorana Fermions, arXiv:1301.6214v1 [quant-ph], 26 January 2013
[30] Deprit A., A. S. Eddington's E-Numbers', Annales de la Société Scientifique de Bruxelles Serie Ire série, December 1955, 69 (2), 50-78
[31] Chevalley C., The Algebraic Theory of Spinors, New York, Columbia University Press, 1954
[32] Lemaître G., L'indétermination de la loi de Coulomb, (séance du 29 janvier 1931, 2e section), Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, série B: 1re partie, 1931, 51, 12-16
[33] Sattinger D. H., Weaver O. L., Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics, Berlin, Springer, 1986, 147-152 and 181-186
[34] Tits J., Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique, Bull. Soc. Math. Belg., 1956, 8, 46-81
[35] Mercier A., Analytical and Canonical Formalism in Physics, New York, Dover, 1963, 61-67
[36] Lemaître G., Carnet d'étude, Archives Lemaître (UCL, Louvain-la-Neuve), 1957
[37] Bourbaki N., Elements. I Théorie des ensembles, Paris, Hermann, 1939-1957