DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXXVII No 4 2004

Egon Scheffold

VON INVERSEN OPERATOREN ERZEUGTE EINPARAMETER-HALBGRUPPEN

Abstract. Let E be a Banach space and let T be a singular bounded linear operator on E with $(-\infty, 0) \subseteq \varrho(T)$ and $\|R(\alpha, T)^n T^n\| \leq C$ for all $\alpha < 0$ and $n \in \mathbb{N}$.

We show that T is injective on $\overline{T(E)}$ and that the operator $-T^{-1}$ generates a C_0-semigroup on $\overline{T(E)}$.

The following examples are considered:

1. Normal operators T on Hilbert spaces with $\operatorname{Re}(\sigma(T)) \subseteq [0, \infty]$.
2. Positive multiplication operators and averaging Markov operators on $C(K)$.
3. Certain positive integral opertors on $C[a, b]$.

Die folgende Arbeit ist motiviert durch das offene Problem: Sei T ein positiver Reynoldsoperator auf $C(K)$. Ist dann T auf der abgeschlossenen Hülle seines Wertebereiches injektiv? Erzeugt dann dort die Abbildung $-T^{-1}$ eine Einparameter-Halbgruppe (s. Satz 9)?

1. Folgerungen aus gewissen Resolventeneigenschaften

Ist E ein Banachraum über $\mathbb{C}$, so bezeichnen wir mit $L(E)$ die Banachalgebra der beschränkten Endomorphismen von E. Für $S \in L(E)$ sei $\sigma(S)$ das Spektrum, $\varrho(S)$ die Resolventenmenge und $R(\lambda, S) := (\lambda I - S)^{-1}$ die Resolventenabbildung von S, wobei I die Identität auf E ist.

Für $T \in L(E)$ sei im folgenden $F := \overline{T(E)}$.

Die erste Aussage befaßt sich mit der Injektivität eines Operators auf dem Abschluß seines Wertebereiches.

SATZ 1. *Es sei E ein Banachraum und T ein singulärer, beschränkter Endomorphismus von E mit den beiden Eigenschaften:*

(i) *Es gibt ein $a > 0$ mit $(-a, 0) \subseteq \varrho(T)$ und*
(ii) $\|TR(\alpha, T)\| \leq C$ *für alle $\alpha \in (-a, 0)$.*

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47A10, 47D06.

Dann gilt:

1. *Die Einschränkung $T_{|F}$ von T auf den Unterraum F ist injektiv. Ihre Umkehrabbildung $T^{-1} : T(F) \to F$ läßt sich wie folgt darstellen:*
$$T^{-1}(y) = \lim_{\alpha \nearrow 0} -R(\alpha, T)y \qquad \textit{für alle } y \in T(F).$$
2. $\overline{T^2(E)} = \overline{T(E)}$ *und* $\overline{T(F)} = F$.

Beweis. Zu 1.): Sei $y \in T(E)$ und $y = Tx$ mit $x \in E$. Für alle $\alpha \in (-a, 0)$ gilt dann $(\alpha I - T)R(\alpha, T) = I$, $\alpha R(\alpha, T)(Tx) - TR(\alpha, T)(Tx) = Tx$.

Aus (ii) folgt $\lim_{\alpha \nearrow 0} \alpha R(\alpha, T)Tx = 0$.

Wir erhalten also
$$\lim_{\alpha \nearrow 0} -TR(\alpha, T)y = y \quad \text{für alle } y \in T(E).$$
Hieraus ergibt sich dann auch
$$(*) \qquad \lim_{\alpha \nearrow 0} -TR(\alpha, T)y = y \quad \text{für alle } y \in F.$$
Für $y \in F$ mit $Ty = 0$ bedeutet dies $y = 0$. Es ist also $T_{|F}$ injektiv. Aus $(*)$ folgt auch sofort die angegebene Darstellung von T^{-1}.

Zu 2.): Es gilt offensichtlich $\overline{T^2(E)} \subseteq \overline{T(E)}$. Sei $y \in T(E)$ mit $y = Tx$. Dann gilt nach $(*)$: $y = \lim_{\alpha \nearrow 0} T^2(-R(\alpha, T)x) \in \overline{T^2(E)}$.

Es ist also auch $\overline{T(E)} \subseteq \overline{T^2(E)}$ und somit $\overline{T^2(E)} = \overline{T(E)} = F$.

Aus $\overline{T(E)} \subseteq F$ folgt $\overline{T^2(E)} \subseteq \overline{T(F)}$, also $F \subseteq \overline{T(F)}$. Aus $T(F) \subseteq T(E)$ folgt $\overline{T(F)} \subseteq \overline{T(E)} = F$. Aus beiden Inklusionen ergibt sich $\overline{T(F)} = F$.

Ist S ein invertierbarer beschränkter Endomorphismus auf einem Banachraum E, so gilt in der Normtopologie von $L(E)$ offensichtlich
$$e^{t(-S^{-1})} = \lim_{\alpha \nearrow 0} e^{tR(\alpha, S)} \qquad \text{für alle } 0 \leq t \in \mathbb{R}.$$
Es ist nun interessant, daß die vorhergehende Gleichung unter gewissen Voraussetzungen auch in der starken Operatortopologie sinnvoll ist.

Satz 2. *Es sei E ein Banachraum und T ein singulärer Endomorphismus von E mit den Eigenschaften:*

(i) $(-\infty, 0) \subseteq \varrho(T)$ *und*
(ii) $\|R(\alpha, T)^m T^m\| \leq C$ *für alle* $\alpha < 0$ *und* $m \in \mathbb{N}$.

Dann erzeugt die lineare Abbildung $-T^{-1}$ aus Satz 1 eine beschränkte C_0-Einparameterhalbgruppe S_t auf dem Unterraum F, welche sich wie folgt darstellen läßt:
$$S_t y = \lim_{\alpha \nearrow 0} e^{tR(\alpha, T)} y \qquad \textit{für alle } y \in F.$$

Beweis. Nach Satz 1 ist der Operator $-T^{-1}$ auf F dicht definiert und, wie man leicht nachweist, auch abgeschlossen. Eine Routinerechnung ergibt die folgende Resolventenbeziehung:

$$R(\lambda, -T^{-1}) = \frac{1}{-\lambda} R(\frac{1}{-\lambda}, T)T \qquad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Die im Satz geforderte Beschränktheitsbedingung bedeutet daher

$$\lambda^m \| R(\lambda, -T^{-1})^m \| \leq C \qquad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und } m \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Satz von Hille-Yosida (s. [1], Th. 2.21) erzeugt daher $-T^{-1}$ eine beschränkte C_0-Einparameterhalbgruppe S_t auf F mit Normschranke C. Da die Familie $\{e^{tR(\alpha,T)} : \alpha < 0\}$ mit den Yosida-Approximationen übereinstimmt, ist auch die im Satz angegebene Darstellung klar.

Für die Anwendbarkeit der beiden vorhergehenden Sätze ist die Frage, ob die Resolvente des betrachteten Operators die geforderten Eigenschaften besitzt, von zentraler Bedeutung. Im allgemeinen dürfte die Antwort darauf nicht einfach sein.

Im folgenden studieren wir einige Beispiele für die in Satz 2 beschriebenen C_0-Einparameterhalbgruppen S_t.

In den Kapiteln 2 und 3 betrachten wir singuläre Operatoren. Wir wollen bemerken, daß die Ergebnisse auch für entsprechende reguläre Operatoren richtig bleiben. Aber diese Situation ist nicht so interessant.

2. Normale Operatoren auf Hilberträumen

Wir betrachten nun einen normalen stetigen Operator $T \neq 0$ auf einem Hilbertraum H (d.h. $TT^* = T^*T$) mit $\mathrm{Re}(\sigma(\mathrm{T})) \subseteq [0, \infty)$. Dann gilt bekanntlich für alle $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned} \|TR(\alpha, T)\| &= \max \left\{ \left| \frac{\lambda}{\alpha - \lambda} \right| : \lambda \in \sigma(T) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{|\lambda|}{\sqrt{\alpha^2 + |\lambda|^2 - \alpha|\lambda|(2\cos\varphi)}} : \lambda \in \sigma(T),\ \lambda = |\lambda| e^{i\varphi} \right\} \leq 1. \end{aligned}$$

Nach Satz 2 erzeugt also die Abbildung $-T^{-1}$ die C_0-Kontraktionshalbgruppe S_t auf dem Unteraum $F := \overline{T(H)}$ von H.

Es sei E die Spektralzerlegung von T. Dann gilt für die von T erzeugte Halbgruppe e^{tT} offensichtlich die Spektraldarstellung

$$e^{tT} = \int_{\sigma(T)} e^{\lambda \cdot t} dE(\lambda).$$

Interessant ist nun, daß die Halbgruppe S_t durch folgendes uneigentliche Integral dargestellt werden kann.

SATZ 3. *Sei H ein Hilbertraum und T ein singulärer normaler stetiger Operator auf H mit* $\mathrm{Re}\sigma(\mathrm{T}) \subseteq [0,\infty)$. *Ferner sei E die Spektralzerlegung von T. Dann besitzt die von $-T^{-1}$ auf dem Unterraum F erzeugte C_0-Kontraktionshalbgruppe S_t die Spektralzerlegung*

$$S_t = \int\limits_{\sigma(T)\setminus\{0\}} e^{-\frac{1}{\lambda}t}\, dE(\lambda) \quad \textit{für alle } t \geq 0.$$

Beweis. Es sei $\omega := \sigma(T)\setminus\{0\} (\neq \emptyset)$. Für $t \geq 0$ sei $h_t(\lambda) := e^{-\frac{1}{\lambda}t}$ für $\lambda \in \omega$. Dann sind die Funktionen h_t meßbar. Ferner gilt für $\lambda \in \omega$ mit $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$:

$$|h_t(\lambda)| = |e^{-\frac{t}{|\lambda|}\cdot\cos\varphi} \cdot e^{i\frac{t}{|\lambda|}\sin\varphi}| \leq 1.$$

Es existieren also die im Satz angegebenen Integrale. Nach Satz 2 gilt

$$S_t(y) = \lim_{\alpha \nearrow 0} e^{tR(\alpha,T)} y \quad \text{für alle } y \in F.$$

Nun ist $T^{-1}(\{0\}) = E(\{0\})(H)$ und $F = \overline{T(H)} = E(\omega)(H)$ (s. [4], 12.28 und [8], Kap. VI, Th. 3.6).

Hieraus folgt für $\alpha < 0$ und $y \in F$:

$$e^{tR(\alpha,T)} y = \left(\int\limits_{\sigma(T)} e^{\frac{t}{\alpha-\lambda}} dE(\lambda) \right) E(\omega)(y) = \left(\int\limits_{\omega} e^{\frac{t}{\alpha-\lambda}} dE(\lambda) \right)(y).$$

Für $\alpha < 0$ sei nun $h_\alpha(\lambda) := e^{\frac{t}{\alpha-\lambda}}$ für alle $\lambda \in \omega$. Dann gilt

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} h_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad \text{für alle } \lambda \in \omega.$$

Für $\alpha < 0$ und $\lambda \in \omega$ mit $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$ erhalten wir

$$|h_\alpha(\lambda)| = \left| e^{\frac{t\alpha - t|\lambda|\cos\varphi}{\alpha^2+|\lambda|^2-2\alpha|\lambda|\cos\varphi}} \cdot e^{i\frac{t|\lambda|\sin\varphi}{\alpha^2+|\lambda|^2-2\alpha|\lambda|\cos\varphi}} \right| \leq 1.$$

Hiermit folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue für alle $y \in F$:

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} \left\| \Big(\int\limits_\omega e^{\frac{t}{\alpha-\lambda}} dE(\lambda) \Big)(y) - \Big(\int\limits_\omega e^{\frac{t}{-\lambda}} dE(\lambda) \Big)(y) \right\|^2$$
$$= \lim_{\alpha \nearrow 0} \int\limits_\omega \left| e^{\frac{t}{\alpha-\lambda}} - e^{\frac{t}{-\lambda}} \right|^2 dE_{y,y} = 0.$$

Es gilt also

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} e^{tR(\alpha,T)} y = \Big(\int\limits_{\sigma(T)\setminus\{0\}} e^{\frac{-t}{\lambda}} dE(\lambda) \Big)(y) \quad \text{für alle } y \in F.$$

KOROLLAR 4. *Es sei $\varepsilon > 0$. Liegt das Spektrum von T in dem Keil $K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$, so gilt* $\lim\limits_{t\to\infty} \|S_t\| = 0$.

Beweis. Für $t > 0$ sei

$$g_t(\lambda) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{\lambda}t} & \text{für } 0 \neq \lambda \in \sigma(T) \\ 0 & \text{für } \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Dann sind die Funktionen g_t stetig auf $\sigma(T)$. Ferner gilt für $0 \neq \lambda = |\lambda| e^{i\varphi} \in \sigma(T)$:

$$|g_t(\lambda)| = e^{-\frac{t}{|\lambda|}\cos\varphi} \text{ und somit } \lim_{t\to\infty} |g_t(\lambda)| = 0 \text{ für alle } \quad \lambda \in \sigma(T).$$

Da die Familie $\{g_t : t > 0\}$ für $t \to \infty$ monoton fallend ist, folgt $\lim_{t\to\infty} \|g_t\| = 0$ nach dem Satz von Dini. Aus $\|S_t\| = \|g_t\|$ ergibt sich dann die Behauptung.

KOROLLAR 5. *Ist T sogar positiv, so gelten für T die Aussagen von Satz* 3 *und Korollar* 4.

Beweis. Es gilt offensichtlich $\mathrm{Re}(\sigma(T)) = \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$.

3. Positive Multiplikatoren und Mittelwert bildende Markov-Operatoren auf den Banachverbänden $C(K)$

Es sei K ein kompakter Hausdorffraum und $C(K)$ der Banachverband der stetigen reellwertigen Funktionen auf K. Ferner sei g eine stetige nichtnegative reellwertige Funktion auf K, und die Abbildung $M_g : C(K) \to C(K)$ sei definiert durch

$$M_g f := g \cdot f \quad \text{für alle } f \in C(K).$$

Man nennt dann die Abbildung M_g den von g induzierten Multiplikator. Bekanntlich gilt

$$\sigma(M_g) = g(K) \subseteq [0, \infty] \quad \text{und } \|M_g^m R(\alpha, M_g)^m\|$$

$$= \max\left\{\left|\frac{g(t)^m}{(\alpha - g(t))^m}\right| : t \in K\right\} \leq 1 \quad \text{für alle } \alpha < 0 \text{ und } m \in \mathbb{N},$$

d.h. M_g erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1 und Satz 2. Es sei nun $J := \{t \in K : g(t) = 0\} \neq \emptyset, J \neq K$. Dann folgt aus der Stone-Weierstrass-Theorie:

$$F = \overline{M_g(C(K))} = \{f \in C(K) : f \equiv 0 \text{ auf } J\}.$$

Nach Satz 2 ist die Abbildung $-M_g^{-1}$ infinitesimaler Erzeuger der C_0-Kontraktionshalbgruppe S_t auf F mit der Darstellung:

$$S_t f(x) = \lim_{\alpha \nearrow 0} e^{tR(\alpha, M_g)} f(x) = \lim_{\alpha \nearrow 0} e^{\frac{t}{\alpha - g(x)}} \cdot f(x) \quad \text{für alle } f \in F \text{ und } x \in K.$$

Hieraus folgt

$$S_t f(x) = \begin{cases} e^{\frac{t}{-g(x)}} \cdot f(x) & \text{für } x \notin J \\ 0 & \text{für } x \in J \end{cases}$$

und $S_t \geq 0$. Für $t \geq 0$ definieren wir nun Funktionen $g_t : K \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für $t = 0$ sei

$$g_0(x) \equiv 1 \quad \text{und für } t > 0 \text{ sei} \quad g_t(x) = \begin{cases} e^{\frac{-t}{g(x)}} & \text{für } x \notin J \\ 0 & \text{für } x \in J. \end{cases}$$

Eine Routinerechnung ergibt, daß für $t > 0$ die Funktionen g_t auf K stetig sind.

Für $t \to \infty$ ist die Familie $\{g_t : t > 0\}$ monoton fallend und punktweise gegen 0 konvergent. Nach dem Satz von Dini gilt daher $\lim_{t\to\infty} \|g_t\| = 0$. Aus $\|S_t\| = \|g_t\|$ folgt dann $\lim_{t\to\infty} \|S_t\| = 0$.

Zusammenfassend können wir nun sagen:

SATZ 6. *Die von $-M_g^{-1}$ erzeugte C_0-Kontraktionshalbgruppe S_t kann mit Hilfe der Funktionen-Einparameterhalbgruppe g_t kurz so dargestellt werden:*

$$S_t f = g_t \cdot f \qquad \textit{für alle } f \in F \textit{ und } t \geq 0.$$

Ferner gilt $\lim_{t\to\infty} \|S_t\| = 0$.

Ein positiver Endomorphismus T von $C(K)$ heißt Markov-Operator, falls $Te = e$ ist, wobei e die Einsfunktion auf K ist.

In der Arbeit [7] habe ich für einen positiven Operator T auf einem Banachverband E das Negative Prinzip (NP) wie folgt erklärt:

$\lambda \in \mathbb{R}_- := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < 0\}, x \in E$ und $Tx \leq \lambda x$ impliziert $Tx \leq 0$.

SATZ 7. *Auf dem Banachverband $C(K)$ sei T ein singulärer Markov-Operator, welcher das negative Prinzip (NP) erfüllt. Dann ist T auf dem Unterraum $F := \overline{T(C(K))}$ injektiv, und der Operator $-T^{-1}$ erzeugt auf F eine positive Kontraktionshalbgruppe S_t.*

Beweis. Da T das negative Prinzip erfüllt, gilt nach [7], Satz 2: $\mathbb{R}_- \subseteq \varrho(T)$ und $TR(\lambda, T) \leq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Es ist also $\lambda TR(\lambda, T) \geq 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}_-$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Aus $R(\lambda, T)(\lambda I - T) = I$ und $Te = e$ folgt $R(\lambda, T)(\lambda e - e) = e, R(\lambda, T)e = \frac{1}{\lambda - 1} e$, $\lambda TR(\lambda, T)e = \frac{\lambda}{\lambda - 1} e$, $\|\lambda TR(\lambda, T)\| = \|\lambda TR(\lambda, T)e\| = \frac{|\lambda|}{|\lambda - 1|}$. Es ist also $\|TR(\lambda, T)\| = \frac{1}{|\lambda - 1|} < 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_-$.

Da nun die Voraussetzungen (i) und (ii) von Satz 2 erfüllt sind, erzeugt $-T^{-1}$ auf F die in Satz 2 angegebene C_0-Einparameterhalbgruppe S_t.

Für alle $\lambda > 0$ gilt

$$R(\lambda, -T^{-1}) = \frac{1}{-\lambda} R\left(\frac{1}{-\lambda}, T\right) T \geq 0$$

und $\|\lambda R(\lambda, -T^{-1})\| \leq 1$. Bekanntlich ist daher die erzeugte Halbgruppe S_t eine positive C_0-Kontraktionshalbgruppe, q.e.d.

Ein Operator T auf $C(K)$ heißt Reynoldsoperator, falls er die folgende Reynoldsidentität erfüllt:

$$T(f \cdot Tg + g \cdot Tf) = Tf \cdot Tg + T(Tf \cdot Tg) \quad \text{für alle } f, g \in C(K).$$

Ein Endomorphismus S von $C(K)$ heißt "Mittelwert bildender" Operator (engl.: averaging operator), falls er die folgende Bedingung erfüllt:

$$S(f \cdot Sg) = (Sf) \cdot (Sg) \quad \text{für alle } f, g \in C(K)\,.$$

SATZ 8. *Auf dem Banachverband $C(K)$ sei S ein singulärer, Mittelwert bildender Markov-Operator. Dann ist S auf dem Unterraum $F := \overline{S(C(K))}$ injektiv, und $-S^{-1}$ erzeugt dort eine positive C_0-Kontraktionshalbgruppe S_t.*

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz genügt es zu zeigen, daß der Operator S das negative Prinzip erfüllt.

Wir benutzen nun das bekannte Darstellungstheorem für Mittelwert bildende Operatoren von G. Birkhoff, welches ich kurz so beschreiben möchte:

Es gibt eine Partition $\{K_\alpha\}$ von K, bestehend aus abgeschlossenen Mengen, und positive Radonmaße $\mu^{(\alpha)}$ auf K_α, so daß gilt:

$$Sf \equiv \int_{K_\alpha} f \, d\mu^{(\alpha)} \quad \text{auf} \quad K_\alpha \quad \text{für alle } f \in C(K).$$

Sei $f \in C(K)$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$ und $Sf \leq \lambda f$. Dann gilt auf $K_\alpha : \mu^{(\alpha)}(f) \cdot e \leq \lambda f$ und somit $\mu^{(\alpha)}(f) \cdot \mu^{(\alpha)}(e) \leq \lambda \mu^{(\alpha)}(f)$.

Angenommen, es wäre $\mu^{(\alpha)}(f) > 0$.

Dann würde aus der vorhergehenden Ungleichung $1 = \mu^{(\alpha)}(e) \leq \lambda < 0$ folgen, was einen Widerspruch ergibt. Es ist also $\mu^{(\alpha)}(f) \leq 0$, $Sf \leq 0$ auf allen K_α und somit $Sf \leq 0$. Der Operator S erfüllt also das negative Prinzip, q.e.d.

Wie schon eingangs erwähnt, ist es eine offene Frage, ob die Aussage von Satz 8 auch für positive Reynoldsoperatoren Gültigkeit hat. Wenn der Wertebereich dicht ist, ist dies der Fall, wie A. Neeb in [3], Theorem 4.6, gezeigt hat.

SATZ 9. *Sei T ein positiver Reynoldsoperator auf $C(K)$, welcher das negative Prinzip (NP) erfüllt. Dann ist T auf dem Unterraum F injektiv, und $-T^{-1}$ erzeugt dort eine positive Kontraktionshalbgruppe S_t.*

Beweis. Es ist $\mathbb{R}_- \subseteq \varrho(T)$ (gilt auch ohne (NP), s. [3], Theorem 3.1).

Nach Miller [2], Theorem 6, Korollar, gilt: Für $\lambda \neq 0, \neq 1$ mit $\frac{1}{1-\lambda} \in \varrho(T)$ ist der Operator $\lambda T(I-(1-\lambda)T)^{-1}$ wieder ein Reynoldsoperator. Hieraus folgt durch eine kurze Rechnung, daß für alle $\alpha \in \mathbb{R}_-$ der Operator $(\alpha - 1)R(\alpha, T)T$ wieder ein Reynoldsoperator ist.

Aufgrund von (NP) gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_-$:

$$R(\lambda, T)T \leq 0, \quad \text{also } (\lambda - 1)R(\lambda, T)T \geq 0.$$

Nach [6], Korollar 4, sind positive Reynoldsoperatoren auf $C(K)$ stets Kontraktionen. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}_-$ ist somit $\|R(\lambda, T)T\| \leq \frac{1}{1+|\lambda|} < 1$.

Nach Satz 2 erzeugt also die Abbildung $-T^{-1}$ auf F die Kontraktionshalbgruppe S_t.

Es ist wieder $R(\lambda, -T^{-1}) = \frac{1}{-\lambda} R(\frac{1}{-\lambda}, T)T \geq 0$ für alle $\lambda > 0$. Die Halbgruppe S_t ist daher positiv, q.e.d.

Es bleibt also die interessante Frage, ob jeder positive Reynoldsoperator das negative Prinzip erfüllt, so wie es die Mittelwert bildenden Operatoren tun.

4. Positive Integraloperatoren auf $C[a, b]$

In diesem Kapitel betrachten wir die folgenden Integraloperatoren auf $C[a, b]$:

Für $0 \leq \mu \in \mathbb{R}$ und $0 \leq q \in C[a, b]$ sei $T : C[a, b] \to C[a, b]$ definiert durch

$$Tf(x) = \mu \cdot f(a) + \int_a^x f(t)q(t)dt$$

für alle $f \in C[a, b]$ und $x \in [a, b]$. Dann ist T ein positiver Endomorphismus von $C[a, b]$. Für $\lambda \neq 0$ sei $H_\lambda(x) := e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)dt}$ für alle $x \in [a, b]$.

Der folgende Satz beschreibt das Spektrum und die Resolvente eines solchen Operators T.

SATZ 10. *Es gilt:*

(i) $\sigma(T) = \{0, \mu\}$ *und*

(ii) *Für* $\lambda \neq 0, \neq \mu$ *kann die Resolvente* $R(\lambda, T)$ *wie folgt dargestellt werden:*

$$R(\lambda, T)f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + H_\lambda(x) \left\{ \frac{\mu}{\lambda(\lambda - \mu)} f(a) + \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x f(t)q(t)H_\lambda(t)^{-1} dt \right\}$$

für alle $f \in C[a, b]$ *und* $x \in [a, b]$.

Beweis. Zu (i): Der Operator T ist die Summe eines kompakten Volterra-Operators und eines Operators vom Rang 1. Es ist daher T kompakt und $0 \in \sigma(T)$.

Da $(\mu I - T)f(a) = 0$ für alle $f \in C[a,b]$ ist, ist der Operator $\mu I - T$ nicht surjektiv, also auch $\mu \in \sigma(T)$. Wir erhalten also $\{0, \mu\} \subset \sigma(T)$.

Im Beweis zu (ii) zeigen wir, daß jedes $\lambda \neq 0, \neq \mu$ ein Resolventenwert ist. Es ist daher $\sigma(T) = \{0, \mu\}$.

Zu (ii): Sei $\lambda \neq 0$ und $\neq \mu$. Es genügt zu zeigen, daß der in (ii) angegebene Operator $R(\lambda, T)$ die Gleichungen $(*)(\lambda I - T)R(\lambda, T) = I$ und $R(\lambda, T)(\lambda I - T) = I$ erfüllt.

Zunächst möchten wir bemerken, daß man die angegebene Darstellung von $R(\lambda, T)$ vermutet, wenn man, was methodisch nicht neu ist, in der Theorie der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu der Integralgleichung

$$\lambda f(x) - \mu \cdot f(a) - \int_a^x f(t)q(t)dt = g(x)$$

die Lösung des folgenden Anfangswertproblems betrachtet:

$$\lambda f'(x) - f(x)q(x) = g'(x) \quad \text{und} \quad f(a) = \frac{g(a)}{\lambda - \mu} \quad (g \in C[a,b]) .$$

Und nun zur rechnerischen Verifizierung der Gleichungen $(*)$:

$$(\alpha) \qquad (\lambda I - T)R(\lambda, T) = I \Leftrightarrow TR(\lambda, T) = \lambda R(\lambda, T) - I.$$

Für $f \in C[a,b]$ und $x \in [a,b]$ setzen wir

$$\begin{aligned} S(x) &:= (\lambda R(\lambda, T) - I)f(x) \\ &= H_\lambda(x)\left\{\frac{\mu}{\lambda - \mu} f(a) + \frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)q(t)H_\lambda(t)^{-1}dt\right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R(x) &:= (TR(\lambda, T))f(x) \\ &= \mu\left\{\frac{1}{\lambda}f(a) + \frac{\mu}{\lambda(\lambda - \mu)}f(a)\right\} \\ &\quad + \int_a^x q(t)\left\{\frac{1}{\lambda}f(t) + H_\lambda(t)\left\{\frac{\mu}{\lambda(\lambda - \mu)}f(a)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^t f(\tau)q(\tau)H_\lambda(\tau)^{-1}d\tau\right\}\right\} dt . \end{aligned}$$

Differentiation dieser Funktionen ergibt $S'(x) = R'(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Da ferner $S(a) = \frac{\mu}{\lambda - \mu} f(a) = R(a)$ gilt, ist also $R(x) = S(x)$ für alle $x \in [a,b]$, was zu zeigen war.

$$(\beta) \qquad R(\lambda,T)(\lambda I - T) = I \Leftrightarrow R(\lambda,T)T = \lambda R(\lambda,T) - I.$$

Für $f \in C[a,b]$ und $x \in [a,b]$ setzen wir

$$\widetilde{S}(x) := \frac{(\lambda R(\lambda,T) - I)f(x)}{H_\lambda(x)}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda-\mu} f(a) + \frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)q(t)H_\lambda(t)^{-1}dt$$

und

$$\widetilde{R}(x) := \frac{(R(\lambda,T)T)f(x)}{H_\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda} H_\lambda(x)^{-1} \cdot Tf(x)$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda(\lambda-\mu)} Tf(a) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x Tf(t)q(t)H_\lambda(t)^{-1}dt\,.$$

Differentiation ergibt auch hier $\widetilde{S}'(x) = \widetilde{R}'(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Aus $\widetilde{S}(a) = \frac{\mu}{\lambda-\mu} f(a) = \widetilde{R}(a)$ folgt dann wieder $\widetilde{S}(x) = \widetilde{R}(x)$ für alle $x \in [a,b]$, q.e.d.

SATZ 11. *Der Operator T ist injektiv auf dem Unterraum $F := \overline{T(C[a,b])}$, und $-T^{-1}$ erzeugt dort eine positive C_0- Kontraktionshalbgruppe S_t.*

Beweis. Aus Satz 10, (i), folgt $\mathbb{R}_- \subseteq \varrho(T)$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Aus der Gleichung $R(\lambda,T)T = \lambda R(\lambda,T) - I$ erhalten wir mit Hilfe der Resolventendarstellung in Satz 10, (ii): Für $0 \le f \in C[a,b]$ und $x \in [a,b]$ ist

$$R(\lambda,T)Tf(x) = H_\lambda(x)\left\{\frac{\mu}{\lambda-\mu} f(a) + \frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)q(t)H_\lambda(t)^{-1}dt\right\} \le 0\,.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}_-$ ist also $R(\lambda,T)T \le 0$ und $\|R(\lambda,T)T\| = \|-R(\lambda,T)T\| = \|-R(\lambda,T)Te\|$.

Für $x \in [a,b]$ ist

$$0 \le -R(\lambda,T)Te(x) = -H_\lambda(x)\left\{\frac{\mu}{\lambda-\mu} + \frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)H_\lambda(t)^{-1}dt\right\}$$

$$= -e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)dt}\left\{\frac{\mu}{\lambda-\mu} + \frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)\cdot e^{-\frac{1}{\lambda}\int_a^t q(\tau)d\tau}dt\right\}$$

$$= -e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)dt}\left\{\frac{\mu}{\lambda-\mu} + \left[-e^{-\frac{1}{\lambda}\int_a^t q(\tau)d\tau}\right]_a^x\right\}$$

$$= -e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)dt}\left\{\frac{\mu}{\lambda-\mu} - e^{-\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(\tau)d\tau} + 1\right\}$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda-\mu}e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x q(t)dt} + 1 \leq 1\,.$$

Es ist somit $\|R(\lambda,T)T\| \leq 1$ für $\lambda \in \mathbb{R}_-$. T erfüllt also die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2. Da $R(\lambda,-T^{-1}) = \frac{1}{-\lambda}R\left(\frac{1}{-\lambda},T\right)T \geq 0$ und

$$\|\lambda R(\lambda,-T^{-1})\| = \|R\left(\frac{1}{-\lambda},T\right)T\| \leq 1$$

für alle $\lambda > 0$, ist die erzeugte Halbgruppe S_t wieder eine positive C_0-Kontraktionshalbgruppe.

Aus der Gleichung

$$Tf(x) = \mu\cdot f(a) + \int_a^x f(t)q(t)dt = g(x)$$

folgt durch Differentiation

$$f(x)\cdot q(x) = g'(x)\,.$$

Dies bedeutet, die Abbildung $-T^{-1}$ stimmt auf der Menge $\{x \in [a,b] : q(x) \neq 0\}$ mit der Derivation $Df(x) = -\frac{1}{q(x)}f'(x)$ überein.

Zu $\alpha \in \mathbb{R}_-$ sei γ_α eine im positiven Sinn orientierte Kreislinie, so dass α im Aussengebiet und die Spektralwerte 0 und μ im Innengebiet von γ_α liegen.

Nach dem Funktionenkalkül in der Spektraltheorie gilt dann für $t \geq 0$: $e^{tR(\alpha,T)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} e^{\frac{t}{\alpha-z}}R(z,T)dz$.

Mit Hilfe der Darstellung der Resolvente $R(z,T)$ aus Satz 10, (ii), erhalten wir dann die folgende konkretere Darstellung der Halbgruppe S_t.

FORMEL (12): Es gilt

$$S_tf(x) = \lim_{\alpha\nearrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} e^{\frac{t}{\alpha-z}}\left[\frac{1}{z}f(x)\right.$$
$$\left. + e^{\frac{1}{z}\int_a^x q(\tau)d\tau}\left\{\frac{\mu}{z(z-\mu)}f(a) + \frac{1}{z^2}\int_a^x f(s)q(s)\cdot e^{-\frac{1}{z}\int_a^s q(\tau)d\tau}ds\right\}\right]dz$$

für alle $f \in F$ und $x \in [a,b]$.

Zum Schluss noch ein ganz einfaches Beispiel, welches die Theorie veranschaulicht. Es sei $\mu > 0$ und $q(t) \equiv 0$. Dann ist $Tf(x) \equiv \mu\cdot f(a)$ und $F = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Auf dem Unterraum F gilt $T = \mu I, -T^{-1} = -\frac{1}{\mu}I$ und somit $S_t = e^{t(-\frac{1}{\mu}I)}$. Dies bedeutet $S_tf = e^{-\frac{t}{\mu}}f$ für alle $f \in F$, was man auch leicht mit der vorhergehenden Formel (12) und dem Residuenkalkül berechnen kann.

Literatur

[1] E. B. Davies, *One-Parameter Semigroups.* Academic Press London, New York, San Francisco 1980.

[2] J. B. Miller, *Averaging and Reynolds operators on Banach algebras I*, J. Math. Anal. Appl. 14 (1966), 527–548.

[3] A. Neeb, *Positive Reynolds operators and generating derivations*, Math. Nachr. 203 (1999), 131–146.

[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company 1973.

[5] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

[6] E. Scheffold, *Über Reynoldsoperatoren und "Mittelwert bildende" Operatoren auf halbeinfachen F-Banachverbandsalgebren*, Math. Nachr. 162 (1993), 329–337.

[7] E. Scheffold, *Über positive Resolventenwerte positiver Operatoren*, erscheint in Positivity.

[8] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, second edition. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1980.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FACHBEREICH MATHEMATIK
Schloßgartenstr. 7
D-64289 DARMSTADT, GERMANY
E-mail: scheffold@mathematik.tu-darmstadt.de

Received October 10, 2003.