DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXXVI No 3 2003

Oumar Békaye Fofana

LA REPRÉSENTATION NUMÉRIQUE DE LA PSEUDO-ALGÈBRE DE BOOLE

Introduction

Soit $\mathcal{A}$ une pseudo-algèbre de Boole. Soit $\Re(\mathcal{A})$ l'ensemble de tous les éléments réguliers de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\Re(\mathcal{A})$ n'est pas vide car il contient les éléments $V_{\mathcal{A}}$ et $\Lambda_{\mathcal{A}}$. On sait déjà que $\Re(\mathcal{A})$ est une pseudo-algèbre de Boole avec la somme $\cup^*$ qui est telle que quelques soient $a, b \in \Re(\mathcal{A})$ nous avons $a \cup^* b = -(a \cup b)$ voir [1]. La pseudo-algèbre de Boole $\Re(\mathcal{A})$ est aussi une algèbre de Boole qui peut être le centre de différentes pseudo-algèbres de Boole. Comme Maciej J. Mączyński dans son travail [2] a montré que l'on peut représenter chaque algèbre de Boole, donc $\Re(\mathcal{A})$ est représentable et la mesure sur l'algèbre $\Re(\mathcal{A})$ est toute application m de $\Re(\mathcal{A})$ dans l'intervalle fermé $[0,1]$ telle que :

1) $\forall a, b \in \Re(\mathcal{A})$ $(a \leq b) \Rightarrow (m(a) \leq m(b))$;
2) $m(a \cup^* b) = m(a) + m(b)$ pour $a \cap b = \Lambda_{\Re(\mathcal{A})}$;
3) $m(V_{\Re(\mathcal{A})}) = 1$, $m(\Lambda_{\Re(\mathcal{A})}) = 0$.

L'ensemble M des mesures sur $\Re(\mathcal{A})$ est plein si la condition 4) suivante est satisfaite :

4) $m(a) \leq m(b) \Rightarrow a \leq b$ $\forall m \in M$, pour $a, b \in \Re(\mathcal{A})$.

Le but principal ici est de trouver une extension de la mesure m sur $\Re(\mathcal{A})$ en une mesure $\underline{m}$ sur une pseudo-algèbre de Boole quelconque dans l'intervalle fermé $[0,1]$ telle que :

1') $\forall a, b \in A$, $a \leq b \Rightarrow \underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$;
2') $\underline{m} \setminus \Re(\mathcal{A}) = m$;
3') $\underline{m}(V_{\mathcal{A}}) = 1$, $\underline{m}(\Lambda_{\mathcal{A}}) = 0$.

Si $X \neq \emptyset$ est un ensemble alors $[0,1]^X$ signifie l'ensemble de toutes les fonctions de X dans l'intervalle fermé $[0,1]$. Quelques soient les éléments

$f, g \in [0,1]^X$, $f+g$ est la somme des fonctions f et g ; $f-g$ est leur différence. La fonction nulle sera représentée par zéro $\mathbf{0}$ et la fonction identiquement égale à l'unité sera représentée par $\mathbf{1}$, $\forall x \in X$. Pour $f, g \in [0,1]^X$, $f \leq g$ signifie que $f(x) \leq g(x)$ quelque soit $x \in X$.

DÉFINITION 1. (Sur la pseudo-algèbre numérique de Boole).

Soit $\mathcal{A} \subset [0,1]^X$ l'ensemble des fonctions de $X \neq \emptyset$ dans $[0,1]$. Nous disons que $\mathcal{A}$ est une pseudo-algèbre numérique de Boole si :

1) $\mathcal{A}$ est une pseudo-algèbre de Boole par rapport à l'ordre naturel $(a \subset b) \Leftrightarrow (a \leq b)$ avec l'opération d'implication «$\Rightarrow$» et le relatif pseudo complément élément $a' = (a \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}) = \neg a$;

2) $\forall a, b \in \mathcal{A}$; $a \cup b + a \cap b = a + b$; où $\cup$, $\cap$ sont les opérations de Boole et $+$ est l'opération arithmétique de l'addition.

REMARQUE 1. Nous savons déjà que dans chaque pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, $a' \cup b \leq a \Rightarrow b$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$, donc dans la pseudo-algèbre numérique de Boole $\mathcal{A}$ nous avons $a' + b - a' \cap b \leq a \Rightarrow b \; \forall a, b \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une pseudo-algèbre numérique de Boole alors quelque soit l'élément $a \in \mathcal{A}$ nous avons $a' = a \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}$. Par conséquent pour $a = \Lambda_{\mathcal{A}}$ nous avons $\Lambda'_{\mathcal{A}} = (\Lambda_{\mathcal{A}} \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}})$. Pour $a = b = \Lambda_{\mathcal{A}}$ dans une pseudo-algèbre numérique de Boole nous avons $\Lambda'_{\mathcal{A}} + \Lambda_{\mathcal{A}} + \Lambda'_{\mathcal{A}} \cap \Lambda_{\mathcal{A}} \leq (\Lambda_{\mathcal{A}} \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}) = V_{\mathcal{A}}$. Puisque dans toute pseudo-algèbre de Boole $\Lambda'_{\mathcal{A}} = V_{\mathcal{A}}$ et $V'_{\mathcal{A}} = \Lambda_{\mathcal{A}}$ donc $\Lambda_{\mathcal{A}} \leq 0$ c'est-à-dire que $\Lambda_{\mathcal{A}} = 0$. Ainsi la fonction nulle appartient à $\mathcal{A}$ et est zéro $\mathbf{0}$. Puisque dans toute pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, les élément $V_{\mathcal{A}}$ et $\Lambda_{\mathcal{A}}$ sont complémentaires alors $\Lambda_{\mathcal{A}} = 1 - V_{\mathcal{A}}$ c'est-à-dire que $V_{\mathcal{A}} = 1$. Par conséquent la fonction égale à l'*unité* appartient à $\mathcal{A}$ et est $\mathbf{1}$.

Le théorème suivant est l'extension du théorème Maciej J. Mączyński [2] à la pseudo-algèbre numérique de Boole.

THEOREM 1. *Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble, soit $\mathcal{A} \subset [0,1]^X$ l'ensemble des fonctions de X vers $[0,1]$. Soit „$\Rightarrow$» une opération binaire dans $\mathcal{A}$ telle que $\forall ab \in \mathcal{A}$, il existe $(a \Rightarrow b)$ dans $\mathcal{A}$. Soit «$'$» une opération unaire dans $\mathcal{A}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{A}$ on associe l'élément $a' \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire, $a \rightarrow a'$, tel que $a + a' \in \mathcal{A}$.*

On dit que la suite (a_1, a_2, a_3) des éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ est un triangle si $a_i + a_j - a_i \cap a_j \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.

$\mathcal{A}$ est une pseudo-algèbre numérique de Boole si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) $\mathcal{A}$ est un treillis distributif ;

2) La fonction nulle $a \equiv 0$ appartient à $\mathcal{A}$;

3) Pour tout triangle (a_1, a_2, a_3), $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3$, nous avons :

$$a_1 + a_2 + a_3 - a_1 \cap a_2 - a_1 \cap a_3 - a_2 \cap a_3 + a_1 \cap a_2 \cap a_3 \in \mathcal{A};$$

4) Pout toute paire $a, b \in \mathcal{A}$, il existe un triangle (c_1, c_2, c_3), $c_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3$, tel que, $a \cap (b + b') \leq c_1 + c_2$ et aussi $b \cap (a + a') \leq c_2 + c_3$.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une pseudo-algèbre numérique de Boole. Il résulte de la définition que $\mathcal{A}$ satisfait les conditions 1) et 2). Soit (a_1, a_2, a_3), $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3$ un triangle donc $a_1 \cup a_2 \leq 1$. Supposons que $d = a_1 \cup a_2$, ainsi $(a_1 \cup a_2) \cup a_3 = d \cup a_3 = d + a_3 - d \cap a_3 = a_1 \cup a_2 + a_3 - (a_1 \cup a_2) \cap a_3 = a_1 + a_2 + a_3 - a_1 \cap a_3 - a_2 \cap a_3 + (a_1 \cap a_2) \cap a_3 \leq 1$ et il en résulte que $a_1 + a_2 + a_3 - a_1 \cap a_2 - a_1 \cap a_3 - a_2 \cap a_3 + (a_1 \cap a_2) \cap a_3 \in \mathcal{A}$ c'est-à-dire que la condition 3) en résulte. Pour $a, b \in \mathcal{A}$ soit $c_2 = a \cap b$; $c_1 = a \cap c_2'$; $c_3 = b \cap c_2'$. Nous avons $c_1 \cup c_2 = (a \cap b) \cup (a \cap c_2') = (a \cap (a \cap b)') \cup (a \cap b)$. Puisque dans une pseudo-algèbre de Bolle $\mathcal{A}$ on sait que $\forall x, y \in \mathcal{A}$ on a $x' \cup y' \leq (x \cap y)'$, par conséquent $c_1 \cup c_2 = (a \cap b) \cup (a \cap c_2') = (a \cap (a \cap b)') \cup (a \cap b) \geq (a \cap (a' \cup b')) \cup (a \cap b)$ c'est-à-dire $c_1 \cup c_2 \geq (a \cap b') \cup (a \cap b)$. De la règle de distributivité nous avons $(a \cap b') \cup (a \cap b) = a \cap (b \cup b')$, donc $c_1 \cup c_2 \geq a \cap (b \cup b')$. Comme $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ et $b \cap b' = \emptyset$ alors $c_1 \cup c_2 = c_1 + c_2 \geq a \cap (b + b')$. De la même manière nous obtenons aussi que, $c_2 \cup c_3 = c_2 + c_3 \geq b \cap (a + a')$ et la condition 4) en résulte, et d'où la démonstration du théorème 1.

REMARQUE 2. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole l'inégalité $a' \cup b' \leq (a \cap b)'$ devient une égalité et par conséquent les inégalités $c_1 + c_2 \geq a \cap (b + b')$ et $c_2 + c_3 \geq b \cap (a + a')$ deviennent aussi des égalités.

Maintenant supposons que $\mathcal{A} \subset [0, 1]^X$ satisfasse les conditions 1)–4) du théorème 1. Considérons dans $\mathcal{A}$ l'ordre naturel $(a \leq b) \Rightarrow (a(x) \leq b(x))$ pour $x \in \mathcal{A}$, et l'opération binaite «$\Leftrightarrow$» d'implication dans $\mathcal{A}$, telle que $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $(a, b) \mapsto a \Rightarrow b$, nous monterons que $(a \Rightarrow b) \in \mathcal{A}$. Soit «$'$» une opération unaire dans $\mathcal{A}$ qui associe à tout élément $a \in \mathcal{A}$ l'élément $a' \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $a \mapsto a'$ où $a' = a \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}$. La fonction a' depend de la fonction a. A l'aide des conditions 1 et 4 de notre théorème, l'algèbre $(a, \leq)$ est un treillis distributif qui contient l'élément nul zéro. Nous devons montrer que $\forall x, y \in \mathcal{A}$ il existe $(x \Rightarrow y)$ dans $\mathcal{A}$.

Pour $a, b \in \mathcal{A}$, il existe $a', b' \in \mathcal{A}$. Pour $a' \in \mathcal{A}$ il existe aussi $(a')' \in \mathcal{A}$ tel que $a' + (a')' \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est un treillis alors $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $x \cup y \in \mathcal{A}$ et $x \cap y \in \mathcal{A}$. Par conséquent pour $a, b \in \mathcal{A}$, il existe $a', a'', b' \in \mathcal{A}$, et $a'' \cup b' \in \mathcal{A}$. On sait que $\forall x, y \in \mathcal{A}$ il existe $(x \Rightarrow y) \in \mathcal{A}$ et que $\forall a, b \in \mathcal{A}$ on a; $b \leq a \Rightarrow b$, donc $(a \Rightarrow b)' \leq b'$ et $a' = a \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}} \leq a \Rightarrow b$, par conséquent $(a \Rightarrow b)' \leq a''$. Comme $(a \Rightarrow b)' \leq b'$ et $(a \Rightarrow b)' \leq a''$ alors $(a \Rightarrow b)' \leq a'' \cap b'$.

Dans la suite, nous designerons par $\underline{M}$ l'ensemble des mesures sur la pseudo-algèbre de Boole et par $\underline{m}$ une mesure sur une pseudo-algèbre de Boole.

D'autre part, $(a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow b) = (a'' \cap b') \cap (a \cap b' \Rightarrow b \cap b') = a'' \cap b' \cap (a \cap b' \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}) = (a'' \cap b') \cap (a \cap b' \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}} \cap b') = (a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}) = (a'' \cap b') \cap a' = \Lambda_{\mathcal{A}}$ c'est-à-dire $(a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow b) = (a'' \cap b') \cap a' = \Lambda_{\mathcal{A}}$ ou encore $(a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow b) = \Lambda_{\mathcal{A}}$, c'est-à-dire $(a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow b) = (a'' \cap b') \cap a' = \Lambda_{\mathcal{A}}$ ou encore $(a'' \cap b') \cap (a \Rightarrow b) = \Lambda_{\mathcal{A}}$, ce qui est équivalent à $a'' \cap b' \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{A}}$ ou encore $a'' \cap b \leq (a \Rightarrow b)'$.

$(a \Rightarrow b)' \leq a'' \cap b'$ et $a'' \cap b' \leq (a \Rightarrow b)'$ donc $a'' \cap b' = (a \Rightarrow b)'$.

Puisque $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $a'' \cap b' \in \mathcal{A}$, donc $(a \Rightarrow b)' \in \mathcal{A}$ c'est-à-dire que $(a \Rightarrow b)$ existe dans $\mathcal{A}$ et par conséquent $(\mathcal{A}, \leq, \Lambda_{\mathcal{A}}, ', \Rightarrow)$ est une pseudo-algèbre de Boole.

Soit $\mathcal{A}$ une pseudo-algèbre de Boole. Nous définissons l'opération d'implication „$\Rightarrow$» dans $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

Pour $a, b \in \mathcal{A}$

1) $a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}$ quand $a \leq b$;

2) $a \Rightarrow b = a_0 \in \mathcal{A}$ autrement, où $a_0 \neq V_{\mathcal{A}}$ et a_0 remplit les conditions suivantes :

a) $a_0 \Rightarrow a_0 = V_{\mathcal{A}}$,
b) Si $b, c \in \mathcal{A}$, $a_0 \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}$ et $b \Rightarrow c = V_{\mathcal{A}}$ alors $a_0 \Rightarrow c = V_{\mathcal{A}}$
c) Si pour $b \in \mathcal{A}$, $a_0 \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}$ et $b \Rightarrow a_0 = V_{\mathcal{A}}$ alors $a_0 = b$
d) $a_0 \Rightarrow V_{\mathcal{A}} = V_{\mathcal{A}}$.

DÉFINITION 2. (La mesure sur une pseudo-algèbre de Boole : voir [3]).

La mesure sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est l'application (que nous notons $\underline{m}$) de l'algèbre dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ telle que :

1') $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $a \leq b \Rightarrow \underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$;
2') $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\underline{m}(a \cup b) = \underline{m}(a) + \underline{m}(b) - \underline{m}(a \cap b)$;
3') $\underline{m}(V_{\mathcal{A}}) = 1$, $\underline{m}(\Lambda_{\mathcal{A}}) = 0$.

REMARQUE 3. Dans toute pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, on sait que $\forall a, b \in \mathcal{A}$ $a' \cup b \leq a \Rightarrow b$ donc $\underline{m}(a' \cup b) \leq \underline{m}(a \Rightarrow b)$ pour toute mesure $\underline{m}$, par conséquent $\underline{m}(a) + \underline{m}(b) - \underline{m}(a \cap b) \leq \underline{m}(a \Rightarrow b)$, et aussi $\underline{m}(a) + \underline{m}(a') \leq 1$. Dans $\mathcal{A}$ nous avons $(a \leq b) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}})$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$.

Notamment $(a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow (V_{\mathcal{A}} \leq a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \cap V_{\mathcal{A}} \leq b) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$. De la définition de la mesure sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, si $a \leq b$ alors $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$ et $\forall m \in \mathcal{A}$. Puisque dans $\mathcal{A}$ $(a \leq b) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}})$ donc pour toute mesure $\underline{m}$ sur $\mathcal{A}$ si $a \leq b$ alors $\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$ pour $a, b \in \mathcal{A}$. Par conséquent si $a \leq b$ alors $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$ aussi $\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$ pour $a, b \in \mathcal{A}$ et $\forall \underline{m} \in \mathcal{A}$. Nous concluons que $\forall a, b \in \mathcal{A}$ et pour toute mesure $\underline{m}$ sur $\mathcal{A}$, l'expression ($a \leq b$ entraîne $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$) est équivalente à l'expression ($a \leq b$ entraîne $\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$).

DÉFINITION 3. (Sur l'ensemble plein des mesures sur la pseudo-algèbre de Boole).

L'ensemble des mesures sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ (que nous désignons par $\underline{M}$) est plein lorsque $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$ $\forall \underline{m} \in \underline{M}$ implique $a \leq b$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$.

DÉFINITION 4. (Sur l'ensemble $*$-plein des mesures sur la pseudo-algèbre de Boole.)

L'ensemble $\underline{M}$ des mesures sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est $*$-plein si $\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$ $\forall \underline{m} \in \underline{M}$ implique $a \leq b$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$.

DÉFINITION 5. (Sur la mesure pleine sur la pseudo-algèbre de Boole.)

Soit $\underline{M}$ un ensemble plein de mesures sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$. La mesure $\underline{m} \in \underline{M}$ est pleine lorsque $\forall a, b \in \mathcal{A}$ si $\underline{m}(a) = 1$ et $m(a \Rightarrow b) = 1$ alors $\underline{m}(b) = 1$ $\forall \underline{m} \in \underline{M}$.

COROLLAIRE 1. *Tout ensemble plein de mesures $\underline{M}$ sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est $\underline{M}$ $*$-plein.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une pseudo-algèbre de Boole et soit $\underline{M}$ un ensemble plein de mesures sur $\mathcal{A}$. [$\forall m \in \underline{M}$ $m(a \Rightarrow b) = 1$] alors [$\forall m \in \underline{M}$, $m(a \Rightarrow b) = m(V_{\mathcal{A}})$] donc ($a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}$) car $\underline{M}$ est plein; ($a \Rightarrow b = V_{\mathcal{A}}$) $\Leftrightarrow$ ($a \leq b$) et par conséquent $\underline{M}$ est $*$-plein.

COROLLAIRE 2. *Si la mesure $\underline{m}$ est pleine alors $\underline{m}$ ($a \Rightarrow b$) $= 1$ implique $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$.*

Preuve. Soit $\underline{m}$ une mesure pleine sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, et soit $\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$ et $\underline{m}(a) = 1$ pour $a, b \in \mathcal{A}$. Puisque $\underline{m}$ est ume mesure pleine alors $\underline{m}(b) = 1$, c'est-à-dire $\underline{m}(a) = \underline{m}(a \Rightarrow b) = \underline{m}(b) = 1$; $\underline{m}(a) = \underline{m}(b) \Rightarrow \underline{m}(a) \leq \underline{m}(b) \leq \underline{m}(a)$. Par conéquent l'expression ($\underline{m}(a \Rightarrow b) = 1$ et $\underline{m}(a) = 1$) implique, que $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$ pour la mesure pleine $\underline{m}$.

COROLLAIRE 3. *Dans la généralité l'ensemble $\underline{M}$ $*$-plein de mesures ne doit pas être $\underline{M}$-plein.*

COROLLAIRE 4. *Si $\underline{M}$ est un ensemble de mesures $*$-plein sur une pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ et si chaque mesure $\underline{m} \in \underline{M}$ est pleine alors l'ensemble $\underline{M}$ est plein.*

Preuve. Soit $\underline{M}$ un ensemble de mesure $*$-plein sur la pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$, soit $\underline{m} \in \underline{M}$ une mesure pleine quelconque. Quelques soient les éléments $a, b \in \mathcal{A}$ soit $\underline{m}(a) \leq \underline{m}(b)$ pour la mesure pleine $\underline{m} \in \underline{M}$ pour l'ensemble $*$-plein de mesure $\underline{M}$. On sait que $m(a) \leq m(b)$ implique $m(a \Rightarrow b) = 1$, donc $m(a) \leq m(b) \Rightarrow m(a \Rightarrow b) = 1$, $\forall m \in \underline{M}$.

Puisque $\underline{M}$ est $*$-plein, alors $m(a \Rightarrow b) = 1 \Rightarrow a \leq b$, c'est-à-dire que $m(a) \leq m(b) \Rightarrow m(a \Rightarrow b) = 1 \Rightarrow a \leq b$, d'où $m(a) \leq m(b) \Rightarrow a \leq b$ $\forall m \in \underline{M}$ et par conséquent $\underline{M}$ est plein.

THÉORÈME 2. *Toute pseudo-algèbre de Boole $\mathcal{A}$ admet un ensemble plein de mesures et par conséquent peut être représentée numériquement.*

Preuve. Soit Δ un filtre dans $\mathcal{A}$, et soient a, b éléments de $\mathcal{A}$, soit Δ^* un filtre principal engendré par Δ at a. La fonction caractéristique m_{Δ^*} du filtre principal Δ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$ et l'ensemble $\underline{M}$ des fonctions caractéristiques de Δ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$ et l'ensemble $\underline{M}$ des fonctions caractéristiques de l'ensemble Δ^* est plein. En effet, soit $m_{\Delta^*}(a) \leq m_{\Delta^*}(b)$; $\forall m_{\Delta^*} \in \underline{M}$. Supposons que la condition $a \leq b$ ne soit pas réalisée et que $b \notin \Delta$. Par conséquent $b \notin \Delta^*$ et donc $m_{\Delta^*}(b) = 0$. Puisque $a \in \Delta^*$, alors $m_{\Delta^*}(a) = 1$ et nous tombons dans la contradiction que $m_{\Delta^*}(b) \leq m_{\Delta^*}(a)$. Par conséquent si $m_{\Delta^*}(a) \leq m_{\Delta^*}(b)$ alors $a \leq b$ et donc l'ensemble $\underline{M}$ est plein.

References

[1] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa, PWN 1962.

[2] M. Mączyński, *On some numerical characterization of Boolean algebras*, Colloq. Math. 27 (1973), 207–210.

[3] W. Zarębski, *A numerical representation of the coproduct of distributive lattices*, Demonstratio Math. 3 (1986), 775–784.

D.E.R. MATHÉMATIQUES
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DU MALI
B.P. 19
BAMAKO, RÉPUBLIQUE DU MALI

Received January 3, 1997; revised version September 26, 2002.