DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXXVI No 3 2003

Oumar Békaye Fofana

CLASSIFICATION DES ANNEAUX DE HEYTING

Introduction

Soit un ensemble $X \neq \emptyset$ ayant n éléments. Il existe des familles de sous-ensembles de l'ensemble 2^X (2^X est l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble X). Certaines de ces familles sont des anneaux de Heyting sur l'ensemble X. Certains de ces anneaux de Heyting sont des algèbres de Boole. Nous avons fait une classification de ces anneaux de Heyting et fait une représentation de la pseudo-algèbre de Boole dans la théorie des ensembles.

1. Anneaux de Heyting

1.1. DEFINITION. On appelle anneau de Heyting sur un ensemble non vide X toute famille $H \subseteq 2^X$ (où 2^X est l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble X) qui satisfait les conditions suivantes :

1. $X \in H$,

Quelques soient les éléments $A, B \in 2^X$

2. Si $A, B \in H$ alors

a) $A \cup B \in H$, $A \cap B \in H$,

b) $A \Rightarrow B \in H$, où $A \Rightarrow B = \max\{y \in H : A \cap y \subseteq B\}$ est le relatif pseudo complément élément de l'ensemble A à B.

De plus, si H satisfait la condition 3 suivante :

3. $\bigcup H \in H$,

alors H est dit anneau de Heyting avec l'élément nul zero.

1.2. REMARQUES

1. Tout anneau de Heyting contenant l'élément nul zéro est une pseudo-algèbre de Boole. Les éléments de cette pseudo-algèbre sont des ensembles.

2. Si X est un ensemble fini, alors toute famille $H \subseteq 2^X$ est finie. Toute famille finie $H \subseteq 2^X$ qui satisfait les conditions 1–3 de la définition 1.1 est un anneau fini de Heyting sur l'ensemble X contenant l'élément nul zéro.

1.3. Exemples pour un ensemble X ayant n éléments

Nous rappelons que la combinaison de m éléments pris k à k $(k \leq m)$ qui est $C_k^m = m!(k!(m-k)!)^{-1}$ nous permet de déterminer toutes les familles possibles à partir des éléments de 2^X et par conséquent celles qui sont des anneaux de Heyting.

Exemple 1. Pour $n = 2$ nous obtenons trois cas de familles de l'ensemble 2^X :

Cas 1. Pour les familles ayant deux éléments nous avons :

— deux anneaux de Heyting $\{\{1\},\{1,2\}\}\,;\{\{2\},\{1,2\}\}$, ayant chacun deux éléments mais ne sont pas des algèbres de Boole.

— un seul anneau de Heyting $\{\emptyset,\{1,2\}\}$ ayant deux éléments et est une algèbre de Boole.

Cas 2. Pour les familles ayant trois éléments nous avons :

— deux anneaux de Heyting $\{\emptyset,\{2\},\{1,2\}\}$ et $\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$ ayant chacun trois éléments sont des chaînes mais ne sont pas des algèbres de Boole.

Cas 3. Un seul anneau de Heyting contenant quatre éléments et qui est une algèbre de Boole, c'est l'ensemble 2^X lui-même.

Exemple 2. Pour $n = 3$, on obtient quarante trois anneaux de Heyting composés de :

1. 7 anneaux de Heyting qui sont chacun une paire,
2. 12 anneaux de Heyting ayant chacun 3 éléments,
3. 12 anneaux de Heyting ayant chacun 4 éléments,
4. 6 anneaux de Heyting ayant chacun 5 éléments,
5. 6 anneaux de Heyting ayant chacun 6 éléments,

il n'existe pas de famille de 7 éléments qui soit un anneau de Heyting.

Exemple 3. Pour $n = 4$, nous considérons seulement deux cas de familles, à savoir les familles qui sont des paires et les familles qui contiennent $(2^4 - 1)$ éléments :

1. Il existe $(2^4 - 1) = 15$ anneaux de Heyting qui sont de paires.
2. Il n'existe pas de famille de 2^X ayant $(2^4 - 1) = 15$ éléments qui soit un anneau de Heyting.

1.4. Corollaries. a) *Pour un ensemble X ayant n éléments il existe $(2^n - 1)$ anneaux de Heyting qui sont chacun une paire.*

b) *Pour un ensemble X ayant n éléments ($n > 2$) il n'y a pas de famille de 2^X ayant $(2^n - 1)$ éléments qui soit un anneau de Heyting.*

c) *Pour un ensemble X ayant n éléments ($n > 2$) toute famille de 2^X qui est un anneau de Heyting possède au plus $(2^n - 2)$ éléments.*

d) *Tous les anneaux de Heyting de 2^X ayant deux ou trois éléments sont des chaînes.*

Dans la suite du travail nous admettons que :

1) X est un ensemble ayant n éléments, avec $n > 2$;

2) H_r est une famille de 2^X ayant r éléments et $X \in H_r$ où $r = 5, 6, \ldots, 2^n - 2$;

3) K_T est un sous-ensemble de 2^X tel que $H_r \cap K_T = \emptyset$, où $T = 2^n - r$.

1.5. THÉORÈME. *Toute famille H_r de 2^X d'un certain ensemble X ayant n éléments ($n > 2$) est un anneau de Heyting qui n'est pas une algèbre de Boole si et seulement si H_r est de la forme $H_r = 2^X \setminus K_T$, et K_T est ou bien une chaîne ou contient la somme de deux quelconques de ses éléments disjoints et le produit de deux quelconques de ses éléments non disjoints.*

Preuve. Soit un ensemble $X \neq \emptyset$ ayant n éléments ($n > 2$).

($\Rightarrow$) Supposons que $H_r = 2^X \setminus K_T$ soit un anneau de Heyting qui n'est pas une algèbre de Boole, H_r est un sous-ensemble de l'ensemble 2^X et contient donc au plus $(2^n - 2)$ éléments. Puisque H_r n'est pas une algèbre de Boole, et K_T contient seulement T éléments alors K_T renferme en soi la somme et le produit de ses éléments c'est-à-dire que K_T est soit une chaîne soit renferme en soi la somme de deux quelconques de ses éléments disjoints et le produit de deux quelconques de ses élémenst non disjoints.

($\Leftarrow$) a) Supposons que K_T soit une chaîne. Puisque chaque élément de l'ensemble 2^X est soit la somme soit le produit d'autres éléments et K_T renferme en soi la somme et le produit de ses propres éléments alors la famille restante $H_r = 2^X \setminus K_T$ contient la somme et le produit de deux quelconques de ses propres éléments. Quelques soient les éléments $A, B \in H_r = 2^X \setminus K_T$, il existe $C \in H_r = 2^X \setminus K_T$ tel que $A \cap C \subseteq B$ par conséquent $A \Rightarrow B \in H_r = 2^X \setminus K_T$ et donc $H_r = 2^X \setminus K_T$ est un anneau de Heyting.

Si $H_r = 2^X \setminus K_T$ est une algèbre de Boole alors $\forall A \in H_r = 2^X \setminus K_T$, $\exists A' \in H_r = 2^X \setminus K_T$ tel que $A \cup A' = X = V$ et $A \cap A' = \Lambda = \emptyset$; cela est possible seulement si K_T n'est pas une chaîne. Comme K_T est une chaîne alors $H_r = 2^X \setminus K_T$ ne peut pas être une algèbre de Boole.

b) Supposons maintenant que K_T contienne la somme de deux quelconques de ses éléments disjoints et le produit de deux quelqonques de ses éléments non disjoints, alors la famille $H_r = 2^X \setminus K_T$ restante renferme en soi la somme et le produit de deux de ses éléments quelconques, et $\forall A, B \in H_r = 2^X \setminus K_T$ il existe $C \in H_r = 2^X \setminus K_T$ tel que $A \cap C \subseteq B$, c'est-à-dire que $(A \Rightarrow B) \in H_r = 2^X \setminus K_T$ par conséquent $H_r = 2^X \setminus K_T$ est un anneau de Heyting, et d'où la démonstration du théorème 1–5.

Exemple. Pour $n = 3$ alors $r = 5$ et $T = 3$ ou $r = 6$ et $T = 2$.

1. Pour $r = 5$ alors $T = 3$ et nous avons 6 anneaux de Heyting ayant chcun 3 éléments:

(1) $H_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$
(2) $H_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$
(3) $H_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$
(4) $H_5 = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$
(5) $H_5 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$
(6) $H_5 = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

On voit aisément que chaque famille H_5 est un anneau de Heyting, mais n'est pas une algèbre de Boole et chaque famille K_3 satisfait les conditions du théorème 1.5.

2. Pour $r = 6$ alors $T = 2$ nous avons aussi 6 anneaux de Heyting ayant chaqun 6 él'éments :

(1) $H_6 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{3\}, \{2,3\}\}$
(2) $H_6 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{2\}, \{2,3\}\}$
(3) $H_6 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{2\}, \{1,2\}\}$
(4) $H_6 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{3\}, \{1,3\}\}$
(5) $H_6 = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{1\}, \{1,2\}\}$
(6) $H_6 = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $K_2 = \{\{1\}, \{1,3\}\}$

Chaque famille H_6 est un anneau de Heyting mais n'est pas une algèbre de Boole'a. Chaque famille K_2 est une chaîne.

1.6. Théorème. (*Sur la représentation dans la théorie des ensembles de la pseudo-algèbre de Boole*).

Pour chaque pseudo-algèbre de Boole non dégénérée $\mathcal{A}$, il existe un ensemble $X \neq \emptyset$, tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à un certain anneau de Heyting sur X contenant l'élément nul.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une pseudo-algèbre de Boole et soit $M(\mathcal{A})$ la famille de tous les filtres maximaux Δ de $\mathcal{A}$. Pour tout élément $a \in \mathcal{A}$ nous posons que

$$v(a) = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta\}; \quad B(\mathcal{A}) = \{v(a) : a \in \mathcal{A}\}.$$

Du théorème de répresentation de Stone des treillis distributifs [1], on sait que l'ensemble $M(\mathcal{A})$ est un treillis d'ensembles isomorphe au treillis $\mathcal{A}$ et l'application $v : \mathcal{A} \to B(\mathcal{A})$ définie par $v(a) = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta\}$ est un isomorphisme. En effet :

1) $v(a \cup b) = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \cup b \in \Delta\} = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta$ ou $b \in \Delta\} = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta\} \cup \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : b \in \Delta\} = v(a) \cup v(b)$, c'est-à-dire $v(a \cup b) = v(a) \cup v(b)$;

2) $v(a \cap b) = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \cap b \in \Delta\} = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta$ et $b \in \Delta\} = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta\} \cap \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : b \in \Delta\} = v(a) \cap v(b)$, c'est-à-dire $v(a \cap b) = v(a) \cap v(b)$;

3) $v(-a) = \{\Delta \in m(\mathcal{A}) : -a \in \Delta\} = M(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : a \in \Delta\} = M(\mathcal{A}) \setminus v(a) = -v(a)$ c'est-à-dire que $v(-a) = -v(a)$;

4) Nous devons montrer que $v(a \Rightarrow b) = v(a) \Rightarrow v(b)$.

a) Inclusion $v(a \Rightarrow b) \subset v(a) \Rightarrow v(b)$:

On sait que si $(a \Rightarrow b) \in \Delta$ alors $a \notin \Delta$ ou $b \in \Delta$, donc $\Delta \in v(a \Rightarrow b)$ implique que $\Delta \in [(M(\mathcal{A}) \setminus v(a)) \cup v(b)]$. Puisqu'on sait que $M(\mathcal{A}) \setminus v(a)) \cup v(b) = -v(a) \cup v(b)$ et $-v(a) \cup v(b) \subseteq v(a) \Rightarrow v(b)$ alors $\Delta \in v(a) \Rightarrow v(b)$, c'est-à-dire $v(a \Rightarrow b) \subseteq v(a) \Rightarrow v(b)$.

b) Inclusion $v(a) \Rightarrow v(b) \subset v(a \Rightarrow b)$. Nous montrons que $[M(\mathcal{A}) \setminus v(a)] \cup v(b) \subseteq v(a \Rightarrow b)$. Supposons que $\Delta \in [M(\mathcal{A}) \setminus v(a)] \cup v(b)$. Si $\Delta \in v(b)$ alors $b \in \Delta$. Puisque $b \subseteq a \Rightarrow b$, c'est-à-dire que $b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = V$ alors $(a \Rightarrow b) \in \Delta$, donc $\Delta \in v(a \Rightarrow b)$. Si $\Delta \in [M(\mathcal{A}) \setminus v(a)]$ alors $a \notin \Delta$, donc $(a \Rightarrow b) \in \Delta$, c'est-à-dire $\Delta \in v(a \Rightarrow b)$. On sait que $a \cup (a \Rightarrow b) \in \Delta$, et Δ est premier, alors ou bien $a \in \Delta$, ou bien $(a \Rightarrow b) \in \Delta$. Puisque $a \notin \Delta$, donc $(a \Rightarrow b) \in \Delta$, et ainsi $[M(\mathcal{A}) \setminus v(a)] \cup v(b) \leq v(a \Rightarrow b)$, c'est-à-dire $v(a) \Rightarrow v(b) \subseteq v(a \Rightarrow b)$.

Conclusion. Si $v(a \Rightarrow b) \subseteq v(a) \Rightarrow v(b) \subseteq v(a \Rightarrow b)$ alors $v(a \Rightarrow b) = v(a) \Rightarrow v(b)$.

5) $v(V_{M(\mathcal{A})}) = \{\Delta \in M(\mathcal{A}) : V_{M(\mathcal{A})} \in \Delta\} = M(\mathcal{A})$.

6) Pour $a \neq \Lambda_{M(\mathcal{A})}$, $v(a) \neq \emptyset$, car l'ensemble $I = \{y \in \mathcal{A} : y \leq -a\}$ est un filtre et chaque filtre maximal contenant le filtre I appartient à $v(a)$ donc $v(a) \neq \emptyset$.

7) Supposons que $a \leq b$ si et seulement si $v(a) \subset v(b)$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$. Si $a \neq b$ alors ou bien $a \leq b$ n'est pas réalisé ou bien $b \leq a$ n'est pas réalisé, et donc $v(a) \subset v(b)$ n'est pas réalisé ou bien $v(b) \subset v(a)$ n'est pas réalisé, c'est-à-dire que l'application v est injective.

L'application $v : \mathcal{A} \to M(\mathcal{A})$ est injective, elle conserve les opérations $\cup, \cap, \Rightarrow, -$ et aussi $v(V_{M(\mathcal{A})}) = M(\mathcal{A})$, est donc un isomorphisme et d'où la démonstration du théorème 1–6.

References

[1] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematique*, Warsaw 1962.

[2] O. B. Fofana, *Caractérisations algébriques et fonctionelle des systèmes algébriques liés aux algèbres de Boole avec leurs généalisations*, Doctoral thesis, Politechnika Warszawska 1995.

D.E.R. MATHÉMATIQUES
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DU MALI
B.P. 19
BAMAKO, RÉPUBLIQUE DU MALI

Received January 3, 1997; revised version September 26, 2002.