DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXXIII No 4 2000

Eugeniusz Wachnicki

UNE VARIANTE DU THÉORÈME DE CAUCHY DE LA VALEUR MOYENNE

Resumé. Dans cette note on démontre une variante du théorème de Cauchy de la valeur moyenne.

1. Introduction

T. M. Flett a demontré dans sa note [1] le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable dans* $[a,b]$ *et telle que* $f'(a) = f'(b)$. *Alors, il existe un point* $\eta \in (a,b)$ *tel que*

$$f(\eta) - f(a) = (\eta - a)f'(\eta).$$

T. Riedel et P. K. Sahoo dans [4] ont démontré le théorème qui est libéré de la supposition que $f'(a) = f'(b)$. Leur résultat est suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable dans* $[a,b]$. *Alors, il existe un point* $\eta \in (a,b)$ *tel que*

$$f(\eta) - f(a) = (\eta - a)f'(\eta) - \frac{1}{2}\,\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}\,(\eta - a)^2.$$

I. Pawlikowska dans [3] a donné une extension du théorème 2 pour des fonctions n-fois derivable dans $[a,b]$. Dans la note présente, en sortant du théorème de Cauchy de la valeur moyenne, on donne le résultat analoque à celui du théorème 2.

2. Une variante du théorème de Cauchy de la valeur moyenne

THÉORÈME 3. *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables dans* $[a,b]$. *Supposons que* $g'(x) \neq 0$ *pour* $x \in [a,b]$ *et*

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}. \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 26A24, 26A06.

Alors, il existe un point $\eta \in (a,b)$ tel que

$$\frac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}. \tag{2}$$

Démonstration. On a $g'(x) \neq 0$ pour $x \in [a,b]$. D'où et du fait que la dérivée d'une fonction possède la proprieté de Darboux on déduit que g' a le signe constant dans $[a,b]$. Supposons que $g'(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$. Alors $g(x) > g(a)$ quel que soit $x \in (a,b]$. Par suite

$$\frac{g(x)-g(a)}{g'(x)} > 0 \quad \text{pour } x \in (a,b].$$

Posons

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} & \text{pour } x \in (a,b], \\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)} & \text{pour } x = a. \end{cases}$$

On remarque que F est continue dans $[a,b]$, derivable dans $(a,b]$ et

$$F'(x) = \frac{f'(x)(g(x)-g(a)) - g'(x)(f(x)-f(a))}{(g(x)-g(a))^2}, \tag{3}$$

ou

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)-g(a)} - \frac{g'(x)}{g(x)-g(a)} F(x) \tag{4}$$

pour $x \in (a,b]$. En comparant (3) avec (2) nous constatons qu'il suffit de demontrer l'existence d'un point $\eta \in (a,b)$ tel que $F'(\eta) = 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $F'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in (a,b)$. F' posséde la proprieté de Darboux et donc F' a le signe constant dans (a,b). Soit $F'(x) > 0$ pour $x \in (a,b)$. Il en résulte que F est strictement croissante dans $[a,b]$. Alors

$$F(a) < F(b). \tag{5}$$

On a

$$F(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

De (4) et de la supposition on déduit

$$F(b) = \frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{g(b)-g(a)}{g'(b)} F'(b) = \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{g(b)-g(a)}{g'(b)} F'(b).$$

D'où et de (5) on obtient

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} < \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{g(b)-g(a)}{g'(b)} F'(b)$$

et finalement

$$F'(b) < 0 \tag{6}$$

car $\dfrac{g(b)-g(a)}{g'(b)} > 0$. L'inegalité (6) est impossible car $F'(x) > 0$ pour $x \in (a,b)$ et F' possède la proprieté de Darboux dans $(a,b]$. La démonstration du théorème 3 est complete car dans le cas où $F(x) < 0$ pour $x \in (a,b)$ ou bien dans le cas où $g(x) < 0$ pour $x \in [a,b]$ on raisonne analogiquement.

THÉORÈME 4. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dans $[a,b]$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour $x \in [a,b]$. Alors, il existe un point $\eta \in (a,b)$ tel que*

$$\frac{f(\eta)-f(a)}{g(\eta)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{g(\eta)-g(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{7}$$

Démonstration. Considerons la fonction $\tilde{f}$ définit par

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{(g(x)-g(a))^2}{g(b)-g(a)}, \qquad x \in [a,b].$$

On a

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) - \left(\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x), \qquad x \in [a,b].$$

On remarque que

$$\tilde{f}'(a) = f'(a), \qquad \tilde{f}'(b) = \frac{f'(a)}{g'(a)}\, g'(b).$$

Alors

$$\frac{\tilde{f}'(a)}{g'(a)} = \frac{\tilde{f}'(b)}{g'(b)}.$$

En appliquant le théorème 3 pour les fonctions $\tilde{f}$ et g on déduit l'existence du point $\eta \in (a,b)$ tel que

$$\frac{\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}'(a)}{g(\eta)-g(a)} = \frac{\tilde{f}'(\eta)}{g'(\eta)}.$$

D'où on obtient immédiatement l'egalité (7).

REMARK 1. Si l'on pose $g(x) = x$, les théorèmes 3 et 4 nous donnent les théorèmes 1 et 2 respectivement.

REMARK 2. Il est connu l'extension du théorème de Cauchy de la valeur moyenne pour des fonctions p-fois derivables ([1]). Par cela il est bien intéressant d'obtenir l'extension du résultat du théorème 4 pour des fonctions p-fois dérivables comme un analoque du résultat de I. Pawlikowska.

Travaux citées

[1] A. Abian, *Generalizing the generalized mean-value theorem*, Amer. Math. Montly, 88.2 (1981), 528–530.
[2] I. M. Flett, *A mean value theorem*, Math. Gazette 42 (1958), 38–39.
[3] I. Pawlikowska, *An extension of a theorem of Flett*, Demonstratio Math. 27(1999), 281–286.
[4] T. Riedel, P. K. Sahoo, *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific Publ. Singapore, 1998.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
PEDAGOGICAL UNIVERSITY
ul. Podchorążych 2
30-084 KRAKÓW, POLAND
E-mail: euwachni@wsp.krakow.pl

Received January 10, 2000.