

Ulrich Koseł

## SYMMETRIEGRUPPEN UND BIFURKATIONSPROBLEME

*Cordially dedicated to Professor Janina Wolska-Bochenek*

Die Arbeit beschäftigt sich mit stationären Bifurkationsproblemen für nichtlineare Gleichungen in Banachräumen. Dabei werden besonders Symmetrieeigenschaften des Problems betrachtet und Stabilität der Bifurkationslösungen untersucht. Mit Hilfe der Ljapunov-Schmidt-Reduktion wird die Untersuchung ins Endlichdimensionale verlagert. Damit kann, zumindest für ein- bzw. zweidimensionale Bifurkationen, eine gewisse Veranschaulichung der Bifurkation und ihrer Stabilität bzw. Instabilität erreicht werden. Dies soll u.a. im Begriff der Verzweigungsenergie zum Ausdruck kommen.

### 1. Bifurkationsprobleme

Es sollen Lösungsmannigfaltigkeiten für Gleichungen der Form

$$(1) \quad G(\lambda, x) = 0, \quad G : \Lambda \times E \rightarrow F,$$

$\Lambda$  Parameterraum (**R** oder **C**), **E** und **F** Banachräume,  $(\lambda_0, x_0)$  Lösungselement, d.h.,  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $x_0 \in E$  und

$$G(\lambda_0, x_0) = 0,$$

betrachtet werden.

**DEFINITION 1.1.**  $(\lambda_0, x_0)$  heißt *Bifurkationspunkt* der Gleichung (1), falls

1.  $G(\lambda_0, x_0) = 0$ ,
2. es gibt Folgen von Lösungselementen  $\{(\lambda_n, x_n)\}_{n \in N}$  und  $\{(\lambda_n, y_n)\}_{n \in N}$  mit  $x_n \neq y_n$  für fast alle  $n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, x_n) = (\lambda_0, x_0)$ .

---

Die Arbeit ist die Darlegung eines Vortrages, der vom Author auf der Tagung 'VI th Symposium on Integral Equations and their Applications', 6–9 December 1994, Warsaw University of Technology, gehalten wurde.

**Bemerkung 1.1.** Allgemein gesagt, bedeutet Bifurkation eine Veränderung der Struktur der Mannigfaltigkeit der Lösungselemente von (1). Durch Definition (1.1) wird die sogenannte statische Bifurkation beschrieben. Demgegenüber wird für Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = G(\lambda, x)$$

eine dynamische Bifurkation betrachtet. In der Nachbarschaft eines Lösungselementes  $(\lambda_0, x_0)$ , der stationären Lösung, beschreibt sie Erhalt bzw. Verlust der Stabilität der Lösungsmenge  $(\lambda_0, x(t))$  bei Annäherung an Grenzzyklen bzw. beim Übergang zu oder Entfernung von periodischen Lösungen, genannt Hopf-Bifurkation. Bei unseren Betrachtungen spielen solche Bifurkationen nur in Zusammenhang mit Untersuchungen zur Stabilität (s. Kap. 3) eine Rolle.

## 2. Symmetrieeigenschaften

Für die Beschreibung von Symmetrieeigenschaften werden folgende Begriffe und Bezeichnungen benötigt:

- **E** und **F** sind Banachräume.
- $L(E, E)$  ist der Banachraum der linearen stetigen Operatoren von **E** auf **E** und entsprechend ist  $L(F, F)$  der Banachraum der linearen stetigen Operatoren von **F** auf **F**.
- $\mathcal{L}(E, E)$  ist die Gruppe der linearen stetigen Operatoren von **E** auf **E** mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation und entsprechend  $\mathcal{L}(F, F)$ .

**DEFINITION 2.1.** Sei  $\mathcal{G}$  eine Gruppe (abstrakte Gruppe). Dann heißt ein Homomorphismus

$$T : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$$

bzw.

$$g \rightarrow T_g$$

Darstellung der Gruppe  $\mathcal{G}$  auf **E**,  $T_g$  darstellende Operatoren und **E** Darstellungsraum.  $T$  heißt endlichdimensional, falls  $\dim E < \infty$ . Entsprechend

$$S : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(F, F)$$

bzw.

$$g \rightarrow S_g.$$

**BEISPIEL 2.1.** Es sei **E** = **C** und  $\mathcal{G} = \{\varphi\}$  die additive Gruppe in **R**. Dann ist

$$T_g z = z e^{i\varphi}$$

eine Darstellung von  $\mathcal{G}$  auf **C**.

**DEFINITION 2.2.** Der Operator  $G$  heißt *symmetrisch bezüglich der Gruppe  $\mathcal{G}$*  (bzw. *kovariant*), falls Darstellungen  $T$  auf  $\mathbf{E}$  und  $S$  auf  $\mathbf{F}$  existieren, so daß für alle  $g \in \mathcal{G}$  und  $x \in \mathbf{E}$ ,  $\lambda \in \Lambda$

$$G(\lambda, T_g x) = S_g G(\lambda, x)$$

gilt.

**FOLGERUNG 2.1.** Aus Definition 2.2 können unmittelbar folgende Aussagen gewonnen werden:

1. Ist  $(\lambda_0, x_0)$  Lösungselement von (1), so ist auch  $(\lambda_0, T_g x_0)$  Lösungselement von (1).
2. Ist  $(\lambda_0, x_0)$  Bifurkationspunkt von (1), so ist auch  $(\lambda_0, T_g x_0)$  Bifurkationspunkt von (1).
3. Ist  $G(\lambda, x)$  in  $(\lambda_0, x_0)$  partiell nach  $x$   $F$ -differenzierbar  $B := G_x(\lambda_0, x_0)$ , so existiert die Ableitung auch in  $(\lambda_0, T_g x_0)$ , und es gilt  $G_x(\lambda_0, T_g x_0) = S_g B T_{g^{-1}} := B_g$ . (vgl. Knobloch [3])
4. Es gilt für ihre Nullräume  $N(B_g) = T_g(N(B))$  und ist  $B$  ein Noether-Operator, so ist auch  $B_g$  ein Noether-Operator mit gleichen Null- und Defektindex. (vgl. Knobloch [3])

**DEFINITION 2.3.** Es werden

$$\mathcal{G}_x := \{g \in \mathcal{G}, T_g x = x\}$$

Isotropiegruppe (Fixpunktgruppe) und

$$\mathcal{G}(x) := \{T_g x : g \in \mathcal{G}\}$$

Orbit von  $x$  bezüglich  $T$  genannt.

**BEISPIEL 2.2.** In Beispiel 2.1 ist die Isotropiegruppe gegeben durch  $T_g z = z$ , d.h.  $z = ze^{i\varphi}$  also  $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Der Orbit ist gegeben durch  $z_\varphi = ze^{i\varphi}$ ,  $z$  festgehalten, d.h. Kreise.

**DEFINITION 2.4.** Ein Bifurkationspunkt  $(\lambda_0, x_0)$  mit der Eigenschaft  $(\lambda_0, x_n) \rightarrow (\lambda_0, x_0)$  wird *Schichtverzweigung* genannt.

**BEISPIEL 2.3.** Im Falle eines Eigenwertes bei linearen Eigenwertproblemen treten Schichtverzweigungen auf. Denn für  $G(\lambda, x) = Ax - \lambda x$  und  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$  ist  $(x_n, \lambda_0)$  Bifurkationspunkt mit  $x_n = \alpha_n x_0, \alpha_n \rightarrow 0$ , d.h. Schichtverzweigung.

**DEFINITION 2.5.**  $\mathcal{G}$  heißt *topologische Gruppe*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\mathcal{G}$  ist eine Gruppe.
2.  $\mathcal{G}$  ist ein topologischer Hausdorffraum.
3.  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  durch  $g \rightarrow g^{-1}$  ist stetig.
4.  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  durch  $(g, h) \rightarrow gh$  ist stetig.

Eine topologische Gruppe heißt *diskret*, wenn sie keine Häufungspunkte enthält.

**BEISPIEL 2.4.** In einem Banachraum  $\mathbf{E}$  ist  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$  eine topologische Gruppe.

**DEFINITION 2.6.**  $T$  heißt *stetige Darstellung der topologischen Gruppe*  $\mathcal{G}$  auf dem topologischen Raum  $E$ , wenn

1.  $T$  eine Darstellung von  $\mathcal{G}$  auf  $\mathbf{E}$  und
2.  $\mathbf{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{E}$  durch  $(x, g) \rightarrow T_g x$  stetig ist.

**FOLGERUNG 2.2.** Es gilt:

1.  $\mathcal{G}$  ist eine diskrete Gruppe genau dann, wenn sie nur isolierte Elemente enthält.
2. Ist  $\text{ord}\mathcal{G} = k < \infty$ , so ist  $\mathcal{G}$  eine diskrete Gruppe.

(Vgl. Knobloch [3].)

**SATZ 2.1.** Ist  $\mathcal{G}$  nichtdiskrete topologische Gruppe,  $\text{ord}\mathcal{G}_{x_0} = k < \infty$  und  $T$  eine stetige Darstellung, so ist  $(\lambda_0, x_0)$  eine Schichtverzweigung (vgl. Knobloch [3]).

### 3. Begriff der Stabilität

**DEFINITION 3.1.** Ein Lösungselement  $(\lambda_0, x_0)$  von (1) heißt *linear stabil bezüglich der Evolutionsgleichung*

$$(2) \quad L\dot{x} = G(\lambda, x(t)), \quad L \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$

wenn für alle Eigenwerte  $\omega$  von

$$\omega L\varphi = G_x(\lambda_0, x_0)\varphi, \varphi \in \mathbf{E},$$

$\text{Re}\omega < 0$  gilt. Es heißt linear instabil, wenn es einen Eigenwert mit  $\text{Re}\omega > 0$  gibt. Gilt die Eigenschaft für einen Eigenwert  $\omega_0$  und dem dazugehörigen Eigenvektor  $\varphi_0$ , so wird sie als *relative Stabilität (Instabilität)* bezüglich der Störung  $\varphi_0$  bezeichnet.

#### Bemerkung 3.1.

1. Der Begriff der Stabilität kommt durch die Zuordnung einer Evolutionsgleichung (2) zustande. Diese Gleichung muß das dynamische Verhalten des Systems beschreiben. Bezuglich dieser Gleichung wird lineare Stabilität untersucht. Man spricht auch von *dynamischer Stabilität*. Es werden also dynamische Bifurkationen gesucht. Für den Begriff der Stabilität vergleiche man bei Zeidler [15] und Röhlig [11]. Der Fall  $\text{Re}\omega = 0$  muß gesondert untersucht werden, spielt in unseren Beispielen aber keine Rolle.

2. Die aufgestellten Gleichungen werden vielfach nicht von erster Ordnung sein (z.B. Bewegungsgleichungen bei mechanischen Problemen). In diesem Fall ist in ein äquivalentes System erster Ordnung umzuwandeln.

**DEFINITION 3.2.** Es habe  $G(\lambda, x)$  das Funktional  $V(\lambda, x)$  als Potential, d.h. es gilt

$$-\nabla V(\lambda, x) = G(\lambda, x).$$

Dann heißt ein Lösungselement  $(\lambda_0, x_0)$  *statisch stabil*, falls es  $V(\lambda, x)$  ein relatives Minimum erteilt.

**Bemerkung 3.2.** Beide Begriffe sind unter gewissen Voraussetzungen äquivalent. Man vergleiche z.B. Röhlig [12]. Dort findet man für die Äquivalenz die Bedingungen:

- Die Evolutionsgleichung hat für alle Anfangswerte eine Lösung.
- Die 2. Ableitung an der Stelle  $x_0$  von  $V$  hat ein vollstetiges Inverses.

#### 4. Ljapunov–Schmidt–Reduktion

**Bemerkung 4.1.** Die Umwandlung des Bifurkationsproblems für die Gleichung (1) in ein endlichdimensionales Problem geht auf E. Schmidt [13] und A.M. Ljapunov [9] zurück. Sie soll hier unter den inzwischen bekannt gewordenen Namen Ljapunov–Schmidt–Reduktion kurz in einer verallgemeinerten Form beschrieben sein. Für nähere Ausführungen und einer rekursiven Berechnung von Bifurkationslösungen vergleiche Kosel [4] und [5].

**SATZ 4.1. Unter folgenden Voraussetzungen:**

1.  $B := G_x(\lambda_0, x_0)$  existiert und ist stetig ( $F$ -Ableitung),
2.  $B$  ist ein Noetherscher Operator mit dem Nullindex  $\alpha(B) = m < \infty$  und dem Defektindex  $\beta(B) = n < \infty$

und der Zerlegung der Räume in direkte Summen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_M \oplus \mathbf{E}^R, \mathbf{F} = \mathbf{F}_N \oplus \mathbf{F}^R$$

mit

$$(a) \mathbf{E}^R \cap \mathbf{N}(B) = \{0\}$$

$$(b) B(\mathbf{E}^R) = \mathbf{F}^R$$

$$(c) \dim \mathbf{E}_M = M, \dim \mathbf{F}_N = N$$

und den Projektoren  $P : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_M$  in Richtung  $\mathbf{E}^R$  und  $Q : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^R$  in Richtung  $\mathbf{F}_N$  ist die Ausgangsgleichung (1) dem System

$$(3) \quad QG(\lambda, u + v) = 0,$$

$$(4) \quad (I - Q)G(\lambda, u + v) = 0$$

mit  $u := Px, v := (I - P)x$  äquivalent.

Bemerkung 4.2.

1. Es kann  $\mathbf{E}^R$  unter den Bedingungen (a) noch geeignet gewählt werden.
2. Eine spezielle Zerlegung ist:  $\mathbf{E}_M = \mathbf{N}(B)$  und  $\mathbf{F}^R = R(B)$  (ursprüngliche Ljapunov-Schmidt-Reduktion), also insbesondere  $M = m$  und  $N = n$ .
3. Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn  $B^{-1} \in \mathbf{L}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$  nicht existiert, d.h.  $\mathbf{N}(B) \neq \{0\}$ . Nur in diesem Fall können Bifurkationen auftreten.

FOLGERUNG 4.1. *Die Ljapunov-Schmidt-Reduktion liefert folgendes Ergebnis:*

1. Auf die erste Gleichung (3) ist der Satz über implizite Operatoren anwendbar, d.h., es gibt eine lokale Auflösung dieser Gleichung in der Form
- $$(5) \quad v = v(\lambda, u) =: \varphi(\mu, w); \mu = \lambda - \lambda_0; w = u - u_0.$$
2. Einsetzen von (5) in die Gleichung (4) liefert die s.g. Verzweigungs-gleichung. Ihre Bifurkationslösungen  $u = \psi(\mu)$  erzeugen die Bifurkati-onslösungen des Gesamtproblems in der Form

$$x = \varphi(\mu, \psi(\mu)) + \psi(\mu).$$

Bemerkung 4.3. Wenn man versucht die Untersuchung auf die Untersuchung des s.g. trivialen Lösungselementes  $(\lambda_0, 0)$  zu transformieren, wird i.a. eine Symmetrieeigenschaft nicht erhalten bleiben. Denn

$$S_g G(\lambda, x) = S_g G(\lambda_0 + \mu, x_0 + y) = G(\lambda_0, T_g x_0 + T_g y).$$

Die Symmetrie bezüglich  $y$  wäre also nur für  $T_g x_0 = x_0$  gewährleistet.

## 5. Bifurkationsaussagen und Verzweigungsgleichung

Bemerkung 5.1. In diesem Abschnitt sollen Aussagen über die Verzweigungslösungen der Gleichung (1) aus der Verzweigungsgleichung (4)

$$(6) \quad F(\lambda, u) := (I - Q)G(\lambda, u + \varphi(u)) = 0$$

getroffen werden. Dazu werden Hilfsmittel zusammengestellt und z. T. hergeleitet.

SATZ 5.1 (Vererbung der Kovarianz an die Verzweigungsgleichung).  $(\lambda_0, x_0)$  sei Lösungselement von (1),  $G(\lambda, x)$  kovariant bzgl.  $T_g, S_g$ , und es liege die in Satz 4.1 vorgenommene Zerlegung der Räume vor und  $T(\mathcal{G})$  sei beschränkt, d.h.  $\|T_g\| \leq M; M \in \mathbf{R}^+, g \in \mathcal{G}$ . Ist

$$(7) \quad \mathcal{G}_{x_0} = \mathcal{G},$$

so ist

$$S_g F(\lambda, u) = F(\lambda, T_g u)$$

$S_g, T_g$  Einschränkungen auf die entsprechenden Unterräume (vgl. Knobloch [3]).

Bemerkung 5.2. (7) gestattet es das Problem auf  $G(0, 0)$  zurückzuführen.

DEFINITION 5.1. Eine Darstellung  $T$  heißt *reduzibel*, wenn es einen invarianten echten Unterraum  $U$  von  $E_M$  gibt, so daß aus  $U \subset E_M$  für  $g \in \mathcal{G}$  stets  $T_g(U) \subseteq T_g(E_M)$  folgt. Andernfalls wird sie *irreduzibel* genannt. Entsprechendes gilt für Räume  $F^R$  und Darstellungen  $S_g$  (vgl. Boerner [1]).

Bemerkung 5.3. Die Invarianz der Unterräume ist gleichwertig mit  $T_g P = P T_g$  und  $S_g Q = Q S_g$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ .

SATZ 5.2. Sind die Voraussetzungen für die Kovarianz der Verzweigungsgleichung entsprechend Satz 5.1 erfüllt und  $(\lambda_n, u_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  nichttriviale Lösungen von  $F(\lambda, x) = 0$  und die auf  $E_M$  eingesschränkte Darstellung  $T_g$  irreduzibel, so ist  $(0, 0)$  Bifurkationspunkt (vgl. Knobloch [3]).

SATZ 5.3. Sei  $E = F$  Hilbertraum,

$$G(\lambda, x) = (I + \lambda L)x + \Psi(\lambda, x), L \in \mathbf{L}(E, E), \Psi(\lambda, x) = o(\|x\|), x \rightarrow 0$$

und (1) habe den trivialen Lösungszweig  $(\lambda, 0)$ . Dann ist die triviale Lösung genau dann stabil, wenn  $\lambda < \operatorname{Re} \omega$  und  $\omega$  betragsmäßig kleinste charakteristische Zahl von  $-L$  ist (vgl. Röhlig [11]).

SATZ 5.4 (Stabilität und Verzweigungsgleichung). Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3 sei

$$(8) \quad L\dot{x} = G(\lambda, x)$$

eine Evolutionsgleichung zur Untersuchung der Stabilität. Es gelte  $QL = LP$ . Weiter sei

$$(9) \quad L\dot{u} = QG(\lambda, u + v),$$

linear stabil, d.h. alle Eigenwerte haben negativen Realteil. Dann entscheidet über die Stabilität des Bifurkationselementes allein

$$(10) \quad L\dot{v} = (I - Q)G(\lambda, u + v),$$

d.h. der Anteil aus der Verzweigungsgleichung.

Beweis. Durch Projektion mit  $Q$  und  $(I - Q)$  erhält man das zu (2) äquivalente System

$$(11) \quad QL\dot{x} = QG(\lambda, x),$$

$$(12) \quad (I - Q)L\dot{x} = (I - Q)G(\lambda, x)$$

Aufgrund der Vertauschbarkeitsregel  $QL = LP$  und  $u = Px$  sowie  $v = (I - P)x$  erhält man das System bestehend aus den Gleichungen (7) und (8) und daraus folgt die Behauptung.

**FOLGERUNG 5.1.** *Hat die Verzweigungsgleichung ein Potential bzw. lässt sich in eine äquivalente Gleichung mit Potential (Vgl. Trenogin u.a. [14] und Obert [10]) umformen, so entsprechen deren relativen Minima stabile Lösungen. Die Äquipotentialfläche dieses Potentials soll Verzweigungsenergie genannt werden.*

**SATZ 5.5** (Stabilität und Symmetriegruppe). *Es sei unter den Voraussetzungen von Satz 5.3  $(\lambda_0, x_0)$  ein stabiles (instabiles) Lösungselement vom (1) und  $G$  kovariant bzgl.  $\mathcal{G}$  mit den Darstellungen  $T$  und  $S$ . Gilt  $T$  ist kommutierend mit  $L$  und  $T_g^{-1}S_g = I$ , so ist auch  $(\lambda_0, T_gx_0)$  ein stabiles (instabiles) Lösungselement von (1).*

**Beweis.** Zur Untersuchung der linearen Stabilität der Lösung  $T_gx_0$  ist die Evolutionsgleichung (2) an der Stelle  $T_gx_0$  zu untersuchen. Das ergibt

$$\omega L\varphi = G_x(\lambda_0, T_gx_0)\varphi.$$

Nach 3. in Folgerung 2.1 ergibt sich daraus

$$\omega L\varphi = S_gG_x(\lambda_0, x_0)T_{g^{-1}}\varphi.$$

Nach Substitution von  $\tilde{\varphi} = T_{g^{-1}}\varphi$  und den Voraussetzungen über  $T_g$  und  $S_g$  erhält man

$$\omega L\tilde{\varphi} = G_x(\lambda_0, x_0)\tilde{\varphi},$$

d.h. die Linearisierung der Evolutionsgleichung zur Untersuchung der Stabilität der Lösung  $x$ .

**Bemerkung 5.6.** Die Voraussetzungen über  $T$  und  $S$  sind z.B. für unitäre Operatoren  $T_g$  (z.B. Spiegelungen) erfüllt.

## 6. Beispiele

**BEISPIEL 6.1** (Knickstab). Für einen in Längsrichtung belasteten Stab lässt sich nach Kosek [6] folgende Randwertaufgabe aufstellen:

$$\frac{d}{ds}[a(s)\frac{d}{ds}\alpha(s)] = -P \sin \alpha(s)$$

mit  $\alpha'(s) = 0, \alpha'(1) = 0$ . Dabei ist  $\alpha(s)$  der Anstieg der zu bestimmende Biegelinie in Abhängigkeit von der Bogenlänge  $s$ . Die Größen  $a(s)$  und  $P$  sind durch die s.g. Biegesteifigkeit (sie soll im weiteren konstant angenommen werden) und die Belastung bedingt. Die Randbedingungen ergeben sich aus der Einspannung des Stabes und würden für die Biegelinie  $y(x)$  bedeuten  $y(0) = y(1) = 0$ .

Dieser Randwertaufgabe ist mit der verallgemeinerten Greenschen Funktion

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} & \text{für } t \leq s \\ \frac{1}{2}s^2 - t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} & \text{für } s \leq t \end{cases}$$

der Hammersteinschen Integralgleichung

$$\alpha(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) \sin \alpha(t) dt$$

äquivalent, die im Raum  $L^2[0, 1]$  betrachtet werden kann. Durch Linearisierung ergibt sich daraus der Operator

$$B = I - \lambda \int_0^1 K(s, t) \cdot dt,$$

der ein Fredholmoperator vom Index 0 ist. Seine Eigenwerte  $\lambda_k = k^2\pi^2$  sind einfach und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen sind  $\varphi_k = \sqrt{2} \cos k\pi s$ .

Als Kovarianzgruppe kann man  $Z_2 = \{1, -1\}$  mit der Multiplikation der beiden Elemente finden. Zugehörige Darstellungsoperatoren sind

$$T_1 : \alpha \rightarrow \alpha; \quad T_{-1} : \alpha \rightarrow -\alpha$$

und

$$S_1 : G \rightarrow G; \quad S_{-1} : G \rightarrow -G.$$

Die für dieses Problem aufgestellte Verzweigungsgleichung entsprechend der Ljapunov-Schmidt-Reduktion (s. Kap. 4) hat die Gestalt

$$0 = -\frac{0.101321}{k} \delta u + 0.25u^3 + \frac{0.025}{k} \delta u^3 - 0.023u^5 - \frac{0.07}{k} + \dots$$

mit dem Verzweigungsparameter  $\delta := \lambda_0 - \lambda$  (vgl. Kosel [6]). Sie 'erbt' entsprechend Satz 5.4 die Kovarianzeigenschaft und ergibt entsprechend Satz 5.5 Aussagen über die Stabilität gegenüber Störungen durch Eigenvektoren höherer Eigenwerte der Bifurkationslösungen. Sie hat ein Potential (eindimensionaler Fall). Die Äquipotentialfläche ist in Abbildung 1 dargestellt.

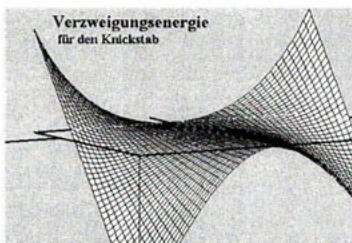


Abbildung 1

Die Darstellung erfolgt im Fenster  $-0.25 \leq \delta \leq 0.25$ ,  $-0.25 \leq y \leq 0.25$ . Die Fläche wurde zur Erkennbarkeit der Verhältnisse mit dem Faktor 500 erhöht.

Die triviale Lösung  $u = 0$  ist als Minimum bis  $\delta = 0$  (bis etwa Mitte der Graphik) erkennbar und entspricht einer stabilen Lösung. Darüber hinaus sind 3 Lösungen erkennbar. Die triviale Lösung als relatives Maximum, entspricht einer instabilen Bifurkationslösung, und 2 nichttriviale Lösungen als Minima, entsprechen stabilen Lösungen. Das paarweise Auftreten entspricht den Symmetrieeigenschaften.

**BEISPIEL 6.2** (Elastischer Ring). Die elastische Linie eines von außen durch Druck  $p$  belasteten in seiner Ruhelage kreisförmigen Ringes wird durch die Minima des Funktionals (Energie des Ringes)

$$V(s) = \int_0^{2\pi} \left[ (k(s) - 1)^2 + \frac{p}{2}(x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s))y(s) \right] ds$$

bestimmt. Dabei ist  $k(s)$  die Krümmung der Biegelinie  $(x(s), y(s))$  ihre Koordinatendarstellung sowie  $s$  die Bogenlänge. Der Krümmung  $k(s) = 1$  entspricht also die Ruhelage. Das Problem ist äquivalent der Aufgabenstellung zur Bestimmung von  $v(s) := k(s) - 1$  mit der Differentialgleichung

$$\ddot{v}(s) + \lambda v(s) = -\beta v^2(s)(v(s) + 3),$$

den Randbedingungen

$$v(0) = v(2\pi), \dot{v}(0) = \dot{v}(2\pi)$$

und der Nebenbedingung

$$\int_0^{2\pi} v(s) ds = 0.$$

$\beta$  ist ein zubestimmender Parameter und  $\lambda$  ein Parameter der durch den Druck  $p$  bestimmt ist und die Verzweigung der Lösungen bewirkt. Für die Herleitung der Aufgabenstellung und Lösung vergleiche Kosele [7]. Die Untersuchung wird in  $L^2[0, 2\pi]$  geführt. Als Kovarianzgruppe kann die additive Gruppe von  $\mathbf{R}$  gewählt werden. Im obigen Problem ist die Darstellung  $T$  eine Verschiebung im Argument von  $v(s)$  und die äußere Darstellung  $S$  ist die identische Abbildung.

Als Eigenwerte des linearen Bestandteils ergeben sich  $\lambda_k = k^2$ . Sie sind 2-fach mit den Eigenfunktionen  $\varphi_k^{(1)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos ks$  und  $\varphi_k^{(2)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin ks$ . Werden beide Verzweigungsparameter zu einem komplexen Parameter zusammengefaßt und die Eigenfunktionen zu  $v_k(s) = \frac{1}{2\pi} e^{iks}$ , so erhält man mit dem Parameter  $\mu := (\lambda - k^2) \frac{4\pi n^2}{3(n^2+1)}$  die Verzweigungsgleichung

$$0 = \mu z + z^2 \bar{z} + ..$$

Die Darstellungsoperatoren in der Verzweigungsgleichung sind  $T_\tau$  und bedeuten Multiplikation mit  $e^{i\tau}$  und  $S_\varphi$  Multiplikation mit  $e^{i\varphi}$ . Die Verzweigungsgleichung besitzt ein Potential

$$v = \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

Es sind die Voraussetzungen von Satz 5.4 und Satz 5.5 erfüllt. Die Verzweigungsgleichung und damit das Potential erbt die Kovarianzeigenschaft und ihren relativen Minima entsprechen die gegenüber Störungen durch Eigenvektoren höherer Eigenwerte stabilen Bifurkationslösungen. In Abbildung 2 ist die Äquipotentialfläche für  $\mu < 0$  dargestellt.

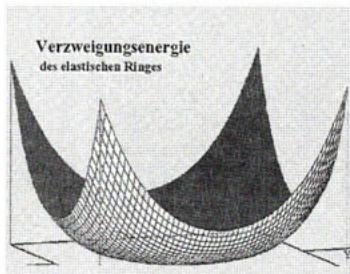


Abbildung 2

Die Darstellung erfolgt im Fenster  $|z| \leq 0.5$ . Die Fläche wurde zur Erkennbarkeit der Verhältnisse mit dem Faktor 500 erhöht.

*Es gibt ein Minimum, dem die stabile triviale Lösung entspricht.*

*In Abbildung 3 ist die Äquipotentialfläche für  $\mu > 0$  dargestellt.*

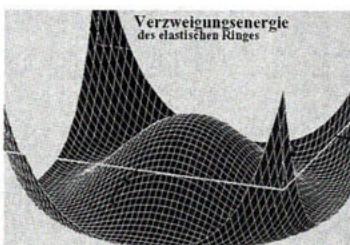


Abbildung 3

Die Darstellung erfolgt im Fenster  $|z| \leq 0.5$ . Die Fläche wurde zur Erkennbarkeit der Verhältnisse mit dem Faktor 500 erhöht.

*Es gibt ein ringförmiges relatives Minimum, dem die nichttriviale Lösung, d.h. die entsprechende Biegelinie des Ringes entspricht. Sie ist stabil und zu erkennen ist die Symmetrieeigenschaft der Aufgabe. Weiter ist ein relatives Maximum zu erkennen, dem die instabile triviale Lösung entspricht.*

**BEISPIEL 6.3** (Kanalströmung). Es wird die Geschwindigkeit  $\tilde{u} = (u, v, w)^T$  der Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem waagerecht liegenden Kanal

$$K := \{(x, y, z) : [0, a] \times [0, h] \times (-\infty, \infty)\},$$

und dem Temperaturfeld  $t \in (-\infty, \infty)$  bedingt durch eine Temperaturdifferenz  $t_1 - t_2$  an Ober- und Unterseite betrachtet. Für Voraussetzungen und Annahmen für das mathematische Modell bestehend aus den statinären Navier-Stokes-Gleichungen, Energie- und Massebilanz sowie Randbedingungen vergleiche man Kosel und Röhlig [8]. Das Problem wird zu einem ebenen Problem in der Querschnittsfläche des Kanals entkoppelt, und es ergeben sich die Bifurkationslösung zur Ruhelage der Strömung  $u = 0, v = 0$  und  $\delta = t_1 - cy$  im Raum  $E = H_\sigma \times H_\sigma \times H_\sigma$  mit  $H_\sigma = L_2(\Omega) \cap C^{2+\beta}[\Omega], \beta \in (0, 1), \Omega = \{(x, y) : [0, a] \times [0, h]\}$  quellfreier Funktionen  $u, v$  aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\eta \Delta u - uu_x - vu_y &= 0, \\ \eta \Delta v - uv_x - vv_y + g\alpha\delta &= 0, \\ \kappa \Delta \delta - u\delta_x - v\delta_y + cy &= 0.\end{aligned}$$

Der Operator  $G$  entsprechend den allgemeinen Bezeichnungen ist aus der linken Seite dieser Gleichungen durch Projektion in den Raum der quellfreien Funktionen zu bestimmen. Es ist  $\delta = t - t_1 + cy$  die Temperaturabweichung. Für die vorkommenden Konstanten vergleiche man [8]. Die Quellfreiheit wird durch entsprechende Ansätze für die Funktionen erreicht (vergleiche [8]). Das Problem ist kovariant bezüglich der Gruppe  $\mathcal{G} = Z_2 \oplus Z_2, Z_2 = \{-1, 1\}$  wie in Beispiel 6.1 und elementweiser Multiplikation, mit den unitären Darstellungen  $R, S, T$ , wobei  $R^2 = S^2 = T^2 = I, RS = SR = T, RT = TR = S, ST = TS = R$  gilt. Die inneren Darstellungen (Transformation durch  $T_g$ ) sind  $R_i, S_i, T_i$

$$\begin{aligned}R_i u(x, y) &= -u(a - x, y) \\ R_i v(x, y) &= v(a - x, y) \\ R_i \delta(x, y) &= \delta(a - x, y) \\ S_i u(x, y) &= u(x, h - y) \\ S_i v(x, y) &= -v(x, h - y) \\ S_i \delta(x, y) &= -\delta(x, h - y) \\ T_i u(x, y) &= -u(a - x, h - y) \\ T_i v(x, y) &= -v(a - x, h - y) \\ T_i \delta(x, y) &= -\delta(a - x, h - y).\end{aligned}$$

Die äußeren Darstellungen (Transformation durch  $S_g$  in Matrizendarstellung) sind:

$$R_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch den Ansatz für die Quellfreiheit kann die äußere Transformation auch durch  $T_g$  realisiert werden. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.4 und Satz 5.5 erfüllt. Für eine detaillierte Betrachtung sei auf [8] bzw. [11] verwiesen.

Ergebnis für die Strömungen, die als Zirkulationen in der Querebene zum Kanal auftreten (Konvektionsrollen) sind:

- Transformationen durch  $R$  sind Spiegelungen an der Achse  $x = \frac{a}{2}$  und Umkehrung der Drehrichtung.
- Transformationen durch  $S$  sind Spiegelungen an der Achse  $y = \frac{h}{2}$  und Umkehrung der Drehrichtung.
- Transformationen durch  $R$  sind Spiegelungen an der Achse  $x = \frac{a}{2}$  und  $y = \frac{h}{2}$  und Beibehaltung der Drehrichtung.

Gegenüber allen diesen Transformationen sind die auftretenden Strömungen gleichzeitig stabil oder instabil gegenüber Störungen durch Eigenvektoren höherer Eigenwerte.

### Literatur

- [1] H. Boerner, *Darstellungen von Gruppen*. Springer-Verlag 1955
- [2] S. N. Chow, *Methods of Bifurcation Theorie*. Springer-Verlag 1982
- [3] J. Knobloch, *Parameterabhängige nichtlineare Gleichungen in Banachräumen, die kovariant bez. Darstellungen einer Gruppe sind*. Dissertation A.: TH Ilmenau. 1986
- [4] U. Kosel, *Lokale Lösungen und Verzweigung nichtlinearer Gleichungen*. Demonstratio Math. **13** (1980) 1, 197-225
- [5] U. Kosel, *Das Verfahren der ausgewählten Exponenten für Lösungen von Verzweigungsgleichungen*. Demonstratio Math. **19** (1986) 3, 647-671.
- [6] U. Kosel, *Behandlung der Stabknickung mittels nichtlinearer Integralgleichungen*. Wiss. Z. TH Ilmenau, (1967) **4//5**. 1-5.
- [7] U. Kosel, *Biegelinie eines elastischen Ringes als Beispiel einer Verzweigungslösung*. ZAMM **64** (1984) 7. 316-319.
- [8] U. Kosel, K.J. Röhlig, *Bifurkationsprobleme bei Kanalströmungen zäher Flüssigkeiten*. ZAMM **72** (1992) 6. T 428-T 436.
- [9] A.M. Ljapunov, *Sur les figures d'équilibre peu différents des ellipsoïdes d'un mouvement de rotation*. Zap. Akad. Nauk 3, Peterburg 1906.
- [10] Cl. Obert, *Untersuchung und Veranschaulichung von Bifurkationsproblemen mittels Verzweigungsenergie*. Diplomarbeit TU-Freiberg 1994.
- [11] K.J. Röhlig, *Bifurkation, Kovarianz und Stabilität nichtlinearer Gleichungen mit Anwendungen auf Konvektionsprobleme für zähe Flüssigkeiten*. Dissertation A. TU-Freiberg 1989.
- [12] K.J. Röhlig, *Stabilität von Verzweigungslösungen für eine Klasse elastomechanischer Probleme in der Ebene*. Wiss. Z. TH Ilmenau **33** (1987) 1, 67-78.
- [13] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen*. Math. Ann. **65** (1908), 370-399.

- [14] V.A. Trenogin, N.A. Sidorov, B.V. Loginov, Potentiality, Group Symmetry and Bifurcation in the Theory of Branching Equation, Differential and Integral Equations. Vol. 3. Number 1. Jan. (1990).
- [15] B. Zeidler, *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I. -Fixpunktsätze*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1976.

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK  
DER TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG  
D-09596 FREIBERG, GERMANY  
E-mail: kosel@mathe.tu-freiberg.d400.de

*Received June 19, 1995.*