DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXII No 4 1989

Janina Śladkowska

SUR UNE FAMILLE DE FONCTIONS UNIVALENTES ET BORNÉES

Soit $S_1(a)$ un espace des fonctions f holomorphes et univalentes dans le cercle unité $U = \{z : |z| < 1\}$, ayant le développment $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$, $b_1, b_2, \dots \in \mathbb{C}$, et telles que $a \notin f(U)$, $|a| < 1$, a fixé, $f(U) \subset U$. Cet espace est évidemment normale et il devient compact, si l'on y ajoute la fonction identiquement nulle.

Dénotons par $H(U)$ un espace de toutes les fonctions holomorphes dans U. Soient $f \in S_1(a)$, φ une fonction holomorphe et univalente dans U, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(U) \subset U$; alors on a $f_1 = f \circ \varphi \in S_1(a)$.

Nous appelons une variation d'une fonction f dans $S_1(a)$ toute famille $\mathcal{F}_j = \{f(z,\varepsilon) : \varepsilon \in \mathcal{E}_j\}$, $j = 1,2,3$, des fonctions $f(z,\varepsilon) \in S_1(a)$ avec $\mathcal{E}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon \in K(0,\eta)\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\varepsilon : -\eta < \varepsilon < \eta\}$, $\mathcal{E}_3 = \{\varepsilon : 0 \leq \varepsilon < \eta\}$, $\eta > 0$, si les limites $\lim_{\mathcal{E}_j \ni \varepsilon \to 0} f(z,\varepsilon) = f(z,0) = f(z)$, $\lim_{\mathcal{E}_j \ni \varepsilon \to 0} \frac{f(z,\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = h(z)$, $h \in H(U)$, existent au sens de la convergence presque uniforme dans U.

Nous obtenons la plus simple variation de la fonction $f \in S_1(a)$, en mettant $\varphi(z,\varepsilon) = e^{i\varepsilon} z$, $\varepsilon \in \mathcal{E}_2$, ce qui donne

$$(1) \qquad f(z,\varepsilon) = f(e^{i\varepsilon} z) = f(z) + \varepsilon i\, z\, f'(z) + o(\varepsilon),$$

où $o(\varepsilon)\varepsilon^{-1} \to 0$, si $\varepsilon \to 0$, presque uniformément dans U.

En mettant ensuite $\varphi(z) = K_\theta(z)$, où $w = K_\theta(z)$ est une telle branche de la fonction implicite

$$\frac{w}{(1-e^{i\theta}w)^2} = (1-\varepsilon)\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}, \qquad \varepsilon \in \mathcal{E}_3,$$

qui s'annule au point $z = 0$, nous obtenons la variation

$$(2) \quad f_\theta(z,\varepsilon) = f(K_\theta(z)) = f(z) - \varepsilon z f'(z)\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} + o(\varepsilon).$$

Notre but est de trouver une variation dans $S_1(a)$ plus riche que (2), notamment celle du type de Schiffer. Faisons d'abord un tel changement de la frontière $\partial f(U)$, qu'elle devient celle d'un domaine situé dans le cercle U auquel le point a n'appartient pas. Soit $w_0 \in U$ et $w_0 \notin \partial f(U)$. Posons

$$\Phi(w) = \frac{(w-a)(1-\bar{a}w)}{w}\left(e^{i\alpha}\frac{w+w_0}{w-w_0} - e^{i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 w}{1-\bar{w}_0 w}\right),$$

où α est réel, quelconque. Remarquons que la fonction $\Phi(w)$ est holomorphe dans un entourage de la frontière $\partial f(U)$ et que

$$(3) \qquad \operatorname{Re}\Phi(w) = 0 \quad \text{pour} \quad w \in \partial U.$$

Soit ensuite

$$w^*(w) = w\exp\{\varepsilon\Phi(w)\} = w + \varepsilon w\,\Phi(w) + o(\varepsilon),$$

où $\varepsilon \in \mathcal{E}_2$. Cette fonction est aussi holomorphe dans un entourage de $\partial f(U)$ et, en vertu de (3), $|w^*(w)| = 1$ pour $w \in \partial U$. Elle est univalente dans un entourage de $\partial f(U)$ pour ε suffisamment proche de zéro (i.e. pour η suffisamment petit); en outre, $w^*(\partial f(U)) \subset \bar{U}$. Puisque $w^*(a) = a$, on a $a \in w^*(\partial f(U))$, si $a \in \partial f(U)$ et $a \notin w^*(\partial f(U))$, si $a \notin \overline{f(U)}$ pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Par conséquent, on peut traiter $w^*(\partial f(U))$ comme une frontière d'un domaine simplement connexe D^* tel que $D^* \subset U$, $0 \in D^*$, $a \notin D^*$.

Soit f^* une fonction qui transforme d'une manière conforme U sur D^* et vérifie la condition $f^*(0) = 0$. La fonction f^* appartient, bien sûr, à $S_1(a)$. Cherchons sa forme. Supposons d'abord, que $w_0 \notin \overline{f(U)}$. D'après le théorème de Golousin

[2], p. 99, on doit chercher la partie principale $S(z)$ du développement en série de Laurent de la fonction

$$\frac{f(z)}{z\,f'(z)}\,\Phi(f(z)) = \tag{4}$$

$$= \frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}\,f(z))}{z\,f'(z)}\left(e^{i\alpha}\,\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0} - e^{-i\alpha}\,\frac{1+\bar{w}_0\,f(z)}{1-\bar{w}_0\,f(z)}\right)$$

dans la couronne $\{z:\ 0<|z|<1\}$. Le premier membre de (4) y est holomorphe. Un seul point singulier de (4), étant un pôle du premier ordre, est $z = 0$. Donc

$$S(z) = \frac{a}{zf'(0)}\,(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}),$$

et la fonction cherchée f^* a la forme

$$\begin{aligned} f^*(z) = f(z) + \varepsilon\Big[(f(z)-a)(1-\bar{a}\,f(z))\Big(e^{i\alpha}\,\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0} &+ \\ - e^{-i\alpha}\,\frac{1+\bar{w}_0\,f(z)}{1-\bar{w}_0\,f(z)}\Big) - f'(z)\,\frac{a}{f'(0)}\,(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}) &+ \\ + z^2\,f'(z)\left(\frac{\bar{a}}{\overline{f'(0)}}\right)(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\Big] + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Elle correspond à la variation extérieure de Schiffer et nous l'utiliserons pour obtenir une propriété importante des domaines extrémales. Nous allons obtenir de la même manière une variation intérieure de Schiffer. Dans ce but, supposons que $w_0 \in f(U)$. Il existe donc un tel point $z_0 \in U$ que $f(z_0) = w_0$. En utilisant de nouveau le théorème de Golousin [2], nous calculons la partie principale du développment en série de Laurent de la fonction $\frac{f(z)}{z\,f'(z)}\,\Phi(f(z))$ dans la couronne $\{z:\ r<|z|<1\}$, où r est autant proche de 1 pour que la fonction $\Phi(f(z))$ y soit holomorphe. C'est pourquoi on a

$$S(z) = \frac{2(f(z_0) - a)(1 - \bar{a}\, f(z_0))f(z_0)}{z_0\, f'^2(z_0)}\, e^{i\alpha} \frac{1}{z - z_0} +$$

$$+ \frac{a}{z\, f'(0)} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}),$$

et la fonction cherchée f^* a la forme

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\Big[(f(z) - a)(1 - \bar{a}\, f(z)) \times \tag{6}$$

$$\times \left(e^{i\alpha} \frac{f(z) + f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} - e^{-i\alpha} \frac{1 + \overline{f(z_0)}\, f(z)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)}\right) -$$

$$- z\, f'(z) \left(e^{i\alpha} \frac{f(z_0)(f(z_0) - a)(1 - \bar{a}\, f(z_0))}{z_0^2\, f'^2(z_0)} \frac{z + z_0}{z - z_0} -\right.$$

$$\left. - e^{-i\alpha} \frac{\overline{f(z_0)}(\overline{f(z_0)} - \bar{a})(1 - a\, \overline{f(z_0)})}{\bar{z}_0^2\, \overline{f'^2(z_0)}} \frac{1 + \bar{z}_0 z}{1 - \bar{z}_0 z}\right) +$$

$$+ z\, f'(z) \left(e^{i\alpha} \frac{f(z_0)(f(z_0) - a)(1 - \bar{a}\, f(z_0)}{z_0^2\, f'^2(z_0)} -\right.$$

$$\left. - e^{-i\alpha} \frac{\overline{f(z_0)}(\overline{f(z_0)}-\bar{a})(1-a\, \overline{f(z_0)})}{\bar{z}_0^2\, \overline{f'^2(z_0)}}\right) - f'(z) \frac{a}{f'(0)} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) +$$

$$+ z^2\, f'(z) \left(\overline{\frac{a}{f'(0)}}\right) (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + o(\varepsilon).$$

Supposons maintenant que $\Psi(f)$ est une fonctionnelle complexe continue, définie au moins sur $S_1(a) \cup \{f_0\}$, où $f_0 = 0$. D'après la continuité de $\Psi(f)$ et la compacité de l'ensemble $S_1(a) \cup \{f_0\}$, il y existe une fonction pour laquelle la fonctionnelle $\operatorname{Re} \Psi(f)$ atteint sa valeur maximale (minimale).

A présent nous allons examiner des propriétés des fonctions extrémales à l'aide des formules variationnelles (1), (2), (5), (6). Soit $\operatorname{Re}\Psi(f) = \max\limits_{f^* \in S_1(a)\cup\{f_0\}} \operatorname{Re}\Psi(f^*)$ et soit $f \neq f_0$. Supposons, en outre, que la fonctionnelle Ψ possède au point f la dérivée complexe au sens de Gâteaux, c'est-à-dire qu'il existe une fonctionnelle complexe L, linéaire et continue dans l'espace H(U) telle que pour chaque variation $\mathcal{F}_j$ et pour toute fonction $f^* \in \mathcal{F}_j$, ($j = 2$ ou bien $j = 3$) tel que $f^*(z) = f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon)$, la relation

$$(7) \qquad \operatorname{Re}\Psi(f^*) = \operatorname{Re}\Psi(f) + \varepsilon \operatorname{Re} L(h) + o(\varepsilon)$$

est satisfaite. Pour $j = 2$ il s'ensuit de (7), et du fait que $\operatorname{Re}\Psi$ atteint sa valeur maximale au point f, l'égalité

$$(8) \qquad \operatorname{Re} L(h) = 0;$$

pour $j = 3$, nous n'avons que l'inégalité

$$(9) \qquad \operatorname{Re} L(h) \leqslant 0.$$

Si f est une telle fonction que $\operatorname{Re}\Psi(f) = \min\limits_{f^* \in S_1(a)\cup\{f_0\}} \operatorname{Re}\Psi(f^*)$ et $f \neq f_0$, l'égalité (8) est de même remplie, mais au lieu de (9) nous avons

$$(9') \qquad \operatorname{Re} L(h) \geqslant 0.$$

Il est facile à remarquer que l'application de la variation (1) et de l'égalité (8) nous donne la condition nécessaire pour la fonction f (extrémale pour la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Psi$), sous la forme

$$(10) \qquad \operatorname{Im} L(z\, f'(z)) = 0.$$

En appliquant, par contre, la variation (2) et l'inégalité (9) on obtient facilement l'inégalité suivante

$$(11) \qquad \operatorname{Re} L\left(z\, f'(z)\, \frac{1 + \zeta z}{1 - \zeta z}\right) \geqslant 0, \quad \text{pour tout } \zeta \in U,$$

étant la condition nécessaire pour la fonction f qui réalise maximum de la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Psi$.

Théorème. Si f est une fonction de la classe $S_1(a)$ qui réalise l'extremum de la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Psi$, où Ψ est une fonctionnelle complexe, définie au moins sur $S_1(a)$ et ayant au point f une dérivée complexe au sens de Gâteaux, alors

1° la fonction $w = f(\zeta)$ satisfait à l'équation

$$(12)\quad \frac{w'^2}{w(w-a)(1-\bar a w)}\Bigg[L\Big((f(z)-a)(1-\bar a f(z))\frac{w+f(z)}{w-f(z)}+ \frac{a}{f'(0)}f'(z)-\frac{\bar a}{\overline{f'(0)}}z^2 f'(z)\Big)+ \left(L\left((f(z)-a)(1-\bar a f(z))\frac{1+\bar w f(z)}{1-\bar w f(z)}+\frac{a}{f'(0)}f'(z)-\frac{\bar a}{\overline{f'(0)}}z^2 f'(z)\right)\right)^-\Bigg] = \frac{1}{\zeta^2}\left[L\left(z f'(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)+\left(L\left(z f'(z)\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right)\right)^-\right],$$

dans le cercle U; le second membre de (12) est nonnegatif sur ∂U en cas de maximum et nonpositif en cas de minimum;

2° la fonction f se prolonge d'une manière continue sur le cercle fermé $\bar U$, et même d'une manière holomorphe, excepté tout au plus un nombre fini des points situés sur la circonférence ∂U qui sont de points critiques algébriques pour f;

3° si

$$(13)\quad F(w) = L\left((f(z)-a)(1-\bar a f(z))\frac{w+f(z)}{w-f(z)}\right)+ \left(L\left((f(z)-a)(1-\bar a f(z))\frac{1+\bar w f(z)}{1-\bar w f(z)}\right)\right)^-$$

est une fonction analytique dans le cercle U, pas constante, et ne possédant que de points singuliers isolés, alors l'ensemble $U \setminus f(U)$ n'a pas de points intérieurs; c'est pourquoi, en vertu de 2^o, il se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, dont au mois un sort de la circonférence ∂U;

4^o si, en outre, a n'est pas un zéro de la fonction entre les crochets du premier membre de l'équation (12), alors a présente un extrémité "libre" d'un arc de $\partial f(U)$, (i.e. le point a n'est pas en même temps le commencement d'un autre arc de $\partial f(U)$).

D é m o n s t r a t i o n . Ad 1^o. En appliquant (6) avec $z_0 = \zeta$ et (8) et tenant compte que α est arbitraire, nous obtenons tout de suite l'égalité (12) satisfaite par la fonction extrémale pour tout $\zeta \in U$. Nous déduisons de la représentation générale de la fonctionnelle linéaire et continue dans l'espace $H(U)$ que le second membre de (12) est une fonction holomorphe dans un certain entourage de la circonférence ∂U et, en vertu de (11), elle est nonnegative en cas de maximum (nonpositive en cas de minimum).

Ad 2^o. Cette thèse résulte du fait que la fonction extrémale satisfait à l'équation (12) qui a des propriétés présentées dans 1^o.

Ad 3^o. Si l'ensemble $U \setminus f(U)$ possédait des points intérieurs, il existerait un cercle $K \subset U \setminus f(U)$. D'aprés (5) avec $w_0 \in K$ et (8) et compte tenu que α est arbitraire, nous obtenons $F(w)$ = const, contre l'hypothèse.

Ad 4^o. Dans ce cas a doit appartenir à $\partial f(U)$, donc, en vertu de 2^o, il existe un tel η, $|\eta| = 1$, que $f(\eta) = a$. On peur remarquer facilement que, si a n'est pas un zéro de la fonction entre crochets au premier membre de (12), il doit être $f'(\eta) = 0$, ce qui justifie la thèse 4^o.

R e m a r q u e . Observons que la frontière $\partial f(U)$ est contenue dans l'ensemble des trajectoires de la différentielle carrée

$$\frac{P(w)}{w(w-a)(1-\bar{a}w)}\,dw^2,$$

où $P(w)$ désigne la fonction entre crochets au premier membre de (12). Pour examiner des propriétés de $\partial f(U)$ on peut appliquer donc des propriétés des trajectoires (locales et globales).

E x e m p l e . Soit $\Psi(f) = b_1$. Il est évident que $L(f) = b_1$. Prenons $0 < a < 1$, puisque on peut toujours transformer $S_1(a)$ sur $S_1(|a|)$, ayant $e^{-i\arg a} f \in S_1(|a|)$ pour $f \in S_1(a)$ et, inversement, $e^{i\arg a} f \in S_1(a)$ pour $f \in S_1(|a|)$. Cette transformation ne change pas de la valeur absolue du coefficient b_1, donc la borne supérieure de $\mathrm{Re}\, b_1$ reste la même pour $S_1(a)$ et $S_1(|a|)$. Remarquons ensuite que la fonctionnelle $\mathrm{Re}\, b_1$ atteint son maximum pour certaine fonction $f \in S_1(a)$, parce qu'il est evident que la fonction $f_0 = 0$ ne réalise pas ce maximum. Il découle tout de suite de (10) que $\mathrm{Im}\, b_1 = 0$ et, d'après (11), que $\mathrm{Re}\, b_1 \geqslant 0$. Finalement, nous avons $b_1 > 0$. Il est facile à vérifier que la condition 3^0 est remplie. En effet, la fonction $F(w) = 2b_1\left((1 + a^2) - \frac{2a}{w} - 2a\,w\right)$ est méromorphe et pas constante. Dans ce cas l'équation (12) prendra la forme

$$(14) \qquad \frac{w'^2}{w^2(w - a)(1 - a\,w)}\left[(1 + a^2 + 2ab_1^{-2}\,\mathrm{Re}\, b_2)w - a - aw^2\right] = \zeta^{-2}.$$

Nous démontrons d'abord que a doit être l'extrémité "libre" d'un arc de $\partial f(U)$, c'est-à-dire qu'au point de ∂U correspondant à a la dérivée s'annule. Supposons que ce ne soit pas vrai. Alors a devrait être racine de l'expression entre crochets au premier membre de (14); mais dans ce cas la solution unique $w = f(\zeta)$ de (14), satisfaisant à la condition initiale $f(0) = 0$, est la fonction $f(\zeta) = c\zeta$, et a doit être situé sur la frontière $\partial f(U)$ donc $|c| = |a| < 1$. Ainsi l'ensemble $U \setminus f(U)$ aurait de points intérieurs, ce qui est impossible. Remarquons de plus que la frontière $\partial f(U)$ appartient à l'ensemble des trajectoires de la différentielle carrée

$$\frac{(1 + a^2 + 2ab_1^{-2}\,\mathrm{Re}\, b_2)\,w - a - aw^2}{w^2(w - a)(1 - a\,w)}\,dw^2,$$

d'où il s'ensuit, et des considérations précédentes, que cette frontière se compose de la circonférence ∂U et du segment de l'axe réel $[a,1]$. La fonction f, qui transforme le cercle U sur un domaine avec une telle frontière et vérifie les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, est définie par l'équation

$$\frac{f(z)}{(1 + f(z))^2} = \frac{4a}{(1 + a)^2} \frac{z}{(1 + z)^2} . \tag{15}$$

Ainsi nous avons obtenu l'estimation exacte de $\operatorname{Re} b_1$ et, à la même fois, de $|b_1|$ dans $S_1(a)$, où $0 < a < 1$, notamment

$$|b_1| \leqslant \frac{4a}{(1 + a)^2} .$$

Pour a arbitraire, $|a| < 1$, en vertu de la correspondence biunivoque entre les fonctions des espaces $S_1(a)$ et $S_1(|a|)$, nous constatons: pour toute fonctions $f \in S_1(a)$ on a l'inégalité

$$|b_1| \leqslant \frac{4|a|}{(1 + |a|)^2} \tag{15'}$$

qui est rélisée par la fonction

$$\frac{f(z)}{(1 + f(z)\, e^{-i\arg a})^2} = \frac{4|a|}{(1 + |a|)^2} \frac{z}{(1 + z\, e^{-i\arg a})^2} ; \tag{16}$$

ou bien autrement: pour toute fonction $f \in S_1$, où S_1 dénote l'espace des fonctions univalentes bornées et telles que $f(0) = 0$, $f(U) \subset U$, et pour tout $a \notin f(U)$ l'inegalité (15′) est vérifiée, la fonction (16) étant celle qui y réalise l'égalité.

Ce résultat a été obtenu par De Temple dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.W. De Temple: Grunsky-Nehari inequalities for a subclass of bounded univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 317-328.

[2] Г.М. Голузин: Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY,
44-100 GLIWICE, POLAND

Received October 12, 1987.