

Józef Sidorowicz

ПОЛУТЕНЬ В ТЕПЛОВОЙ ДИФРАКЦИИ НА МНОГОУГОЛЬНИКЕ

1. Пусть точки x, y находятся в зоне "глубокой тени" по отношению к произвольной многоугольной области $D \subset \mathbb{R}^2$, т.е. $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ и отрезок $[x, y]$ пересекает область D . Рассмотрим винеровский процесс w_t вне этой области. Пусть γ_{xy} - кратчайший путь процесса w_t из точки x в точку y . Если при этом γ_{xy} не получает излома на некоторой вершине области D , тогда говорим, что отрезок пути γ_{xy} , прилегающий к этой вершине и не имеющий общей части с ∂D , находится в так называемой "зоне полутени" (см. рис. 1, 2, 3, 4, 5а, 5б). Такие зоны могут быть в начале (конце) пути (см. рис. 1, 3, 4) или же внутри пути γ_{xy} (см. рис. 2, 5а, 5б).

Вспомним некоторые нужные нам свойства процесса w_t .

а) Пусть $\tau_a = \inf\{t: w_t = a\}$ - момент первого достижения одномерным винеровским процессом точки на расстоянии a . Тогда, согласно [1], плотность $\pi(s, a)$ распределения процесса τ_a имеет вид

$$\pi(s, a) = \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right).$$

б) Ортогональные проекции w_t на ортогональные направления являются независимыми винеровскими процессами (см. [2]).

в) Переходные плотности двумерного процесса w_t с условиями отражения $p^+(t, z_1, z_2)$ и с условиями поглощения $p^-(t, z_1, z_2)$ на прямой AA_1 (см. [2]) выражаются формулами

$$p^{\pm}(t, z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi t} \left[\exp\left(-\frac{|z_2 - z_1|^2}{2t}\right) \pm \exp\left(-\frac{|z_2^* - z_1|^2}{2t}\right) \right],$$

где z_2^* - точка симметричная точке z_2 относительно прямой AA_1 .

2. Сначала рассмотрим модельную задачу с явлением полутени в начале (конце) кратчайшего пути $\gamma_{xy} = xAy$ (см. рис.1) двумерного процесса w_t .

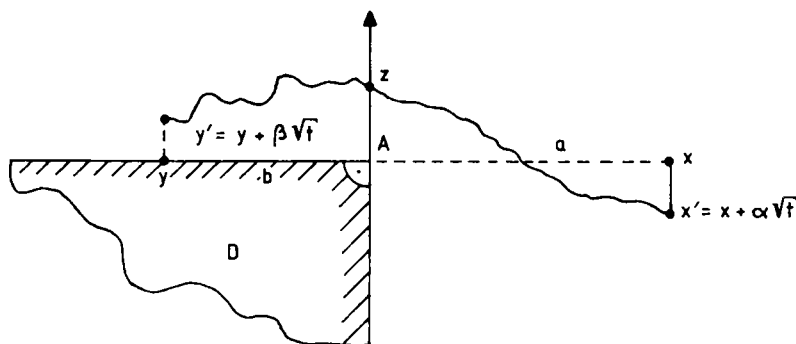


Рис.1

Л е м м а 1. Когда кратчайший путь γ_{xy} содержит только одну зону "полутени" в начале (конце) пути и не содержит других зон полутени (см. рис.1), кроме того точки $x' = x + \alpha\sqrt{t}$, $\alpha \neq 0$, $y' = y + \beta\sqrt{t}$, $\beta > 0$, $x', y' \in D \setminus R^2$, то

$$p^{\pm}(t, x', y') \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^{\pm}}{2\pi t} \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2(x, y)}{2t}\right),$$

где

$$\hat{\rho}(x, y) = |\gamma_{xy}| = |[x, A]| + |[A, y]| = a + b = |x - y|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Не нарушая общности поставленной задачи, для краткости выяснений предположим, что угол A - прямой. Пусть z - координата оси Az, тогда по формуле Колмогорова-Чепмена [3] имеем

$$p^{\pm}(t, x', y') = \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{x'} \{ w_{\tau} \in z + dz, \tau \in s + ds \} p^{\pm}(t-s, z, y'),$$

где

$$P_{x'} \{ \} = \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left[-\frac{(z + \alpha\sqrt{t})^2}{2s}\right] ds dz,$$

$$p^{\pm}(t-s, z, y') = \frac{1}{2\pi(t-s)} \left\{ \exp\left[-\frac{b^2 + (z - \beta\sqrt{t})^2}{2(t-s)}\right] \pm \right. \\ \left. \pm \exp\left[-\frac{b^2 + (z + \beta\sqrt{t})^2}{2(t-s)}\right] \right\}.$$

После подстановки $s = ut$ и группировки интегралов получим

$$p^{\pm}(t, x', y') = \\ = \int_0^1 du \frac{a}{4\pi^2 u^2 (1-u) t^2} \exp\left[-\frac{1}{2t} \left(\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{1-u}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{u} + \frac{\beta^2}{1-u}\right)\right] \times \\ \times \left(\int_0^{+\infty} dz \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) z^2 + 2\left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{1-u}\right) \sqrt{t} z\right]\right\} \pm \right. \\ \left. \pm \int_0^{+\infty} dz \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) z^2 + 2\left(\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{1-u}\right) \sqrt{t} z\right]\right\} \right).$$

По известным формулам в [4] имеем

$$I_1 = \int_0^{+\infty} dz \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) z^2 + 2\left(\frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{1-u}\right) \sqrt{t} z\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \pi t u (1-u)} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-u}{u} \alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{u}{1-u} \beta^2 \right) \right] \times \left[1 - \psi \left(\frac{(1-u)\alpha - u\beta}{\sqrt{2u(1-u)}} \right) \right],$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} dz \exp \left[-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) z^2 + 2 \left(\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{1-u} \right) \sqrt{t} z \right] \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \pi t u (1-u)} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-u}{u} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \frac{u}{1-u} \beta^2 \right) \right] \times \left[1 - \psi \left(\frac{(1-u)\alpha + u\beta}{\sqrt{2u(1-u)}} \right) \right],$$

где

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Отсюда

$$I_1 \pm I_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \pi t u (1-u)} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-u}{u} \alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{u}{1-u} \beta^2 \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \psi \left(\frac{(1-u)\alpha - u\beta}{\sqrt{2u(1-u)}} \right) \pm \exp(2\alpha\beta) \left[1 - \psi \left(\frac{(1-u)\alpha + u\beta}{\sqrt{2u(1-u)}} \right) \right] \right\} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\frac{1}{2} \pi t u (1-u)} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-u}{u} \alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{u}{1-u} \beta^2 \right) \right] F^{\pm}(u, \alpha, \beta).$$

Теперь

$$p^{\pm}(t, x', y') = \int_0^1 du \frac{a F^{\pm}(u, \alpha, \beta) \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha + \beta)^2 \right]}{4\pi \sqrt{2\pi} u \sqrt{u(1-u)} t \sqrt{t}} \exp \left[-\frac{1}{2t} \left(\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{1-u} \right) \right].$$

Заметим, что функция $h(u) = \frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{1-u}$ в точке $u_0 = \frac{a}{\hat{\rho}} \in (0, 1)$

имеет экстремальное значение $h(u_0) = \hat{\rho}^2$. Тогда по асимптотической формуле Лапласа при $t \rightarrow 0$ получаем

$$p^{\pm}(t, x', y') \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{a F^{\pm}(u_0, \alpha, \beta) \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha + \beta)^2 \right]}{4\pi \sqrt{2\pi} u_0 \sqrt{(1-u_0)u_0} t \sqrt{t}} \frac{\sqrt{2\pi t}}{\sqrt{\frac{1}{2} h''(u_0)}} \exp \left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t} \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} h''(u_0) = \frac{\hat{\rho}^4}{ab}, \quad u_0 = \frac{a}{\hat{\rho}},$$

окончательно получаем

$$p^{\pm}(t, x', y') \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^{\pm}}{2\pi t} \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t}\right),$$

где

$$C^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2\right] \left[1 - \psi\left(\frac{\alpha b - \beta a}{\sqrt{2ab}}\right)\right] \pm \right. \\ \left. \pm \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2\right] \left[1 - \psi\left(\frac{\alpha b + \beta a}{\sqrt{2ab}}\right)\right] \right\}.$$

Итак лемма доказана. Заметим, что здесь $C^- = 0$, $C^+ = 1$ для $\alpha = \beta = 0$.

С помощью леммы 1 решаем самую общую задачу, т.е. такую задачу, когда кратчайший путь содержит "полутени" в начале (конце) пути и произвольное количество зон "полутени" внутри пути (см. рис.2).

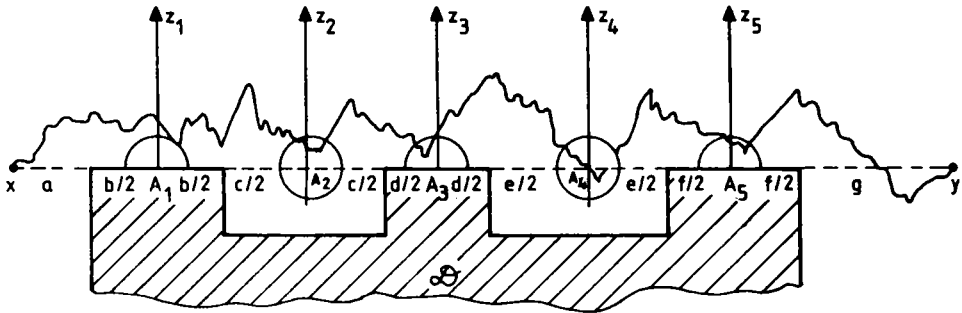


Рис.2

Здесь будет доказано, что наличие такой системы "полутеней" не меняет показатели степени t в предэкспоненциальном члене плотности $p^{\pm}(t, x, y)$, но меняет только лишь множитель t .

Т е о р е м а 1. Если кратчайший путь γ_{xy} содержит произвольную систему "полутеней" и является отрезком $[x, y]$ без изломов, то

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^+}{2\pi t} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2t}\right), \quad \hat{\rho} = |x - y|,$$

т.е. вершины, на которых не происходит излом кратчайшего пути, вносят нулевой вклад в показатель степени t .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Легко видеть, что такое событие перехода процесса w_t из точки x в точку y (см. рис. 2) является конечной суммой модельных переходов типа, который рассмотрен в лемме 1. Для облегчения в вычислениях возьмем случай, когда γ_{xy} содержит только одну "полутень" внутри γ_{xy} и две зоны полутени на концах пути. Тогда, согласно формуле Колмогорова-Чепмена, имеем, что

$$\begin{aligned} p^+(t, x, y) = & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_3 p_1^+(t_1, x, z_1) p_2^+(t_2 - t_1, z_1, z_2) \times \\ & \times p_3^+(t_3 - t_2, z_2, z_3) p_4^+(t - t_3, z_3, y), \end{aligned}$$

где согласно лемме 1

$$p_1^+(t_1, x, z_1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C_1^+}{2\pi t_1} \exp\left(-\frac{|x - z_1|^2}{2t_1}\right),$$

$$p_2^+(t_2 - t_1, z_1, z_2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C_2^+}{2\pi(t_2 - t_1)} \exp\left(-\frac{|z_2 - z_1|^2}{2(t_2 - t_1)}\right),$$

$$p_3^+(t_3 - t_2, z_2, z_3) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C_3^+}{2\pi(t_3 - t_2)} \exp\left(-\frac{|z_3 - z_2|^2}{2(t_3 - t_2)}\right),$$

$$p_4^+(t - t_3, z_3, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C_4^+}{2\pi(t - t_3)} \exp\left(-\frac{|z_3 - y|^2}{2(t - t_3)}\right),$$

$$t_1 = t \frac{a + \frac{b}{2}}{\hat{\rho}}, \quad t_2 = t \frac{a+b+\frac{a}{2}}{\hat{\rho}}, \quad t_3 = t \frac{a+b+c+\frac{d}{2}}{\hat{\rho}}, \quad \hat{\rho} = a+b+c+d+e.$$

Используя асимптотический метод Лапласа для R^6 при $t \rightarrow 0$ получаем

$$p^{\pm}(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^{\pm}}{2\pi t} \exp \left\{ -\frac{|x-y|^2}{2t} \right\}, \quad C^{\pm} \in R^1.$$

3. Так как вычисление констант $C^{\pm}$ в связи с увеличением числа зон "полутени" усложняется, мы рассмотрим только несколько частных случаев, для которых найдем константы $C^{\pm}$.

Пример 1. Пусть отрезок $[x, A_1]$ в начале (конце) кратчайшего пути $\gamma_{xy} = xA_1A_2y$ (см. рис.3) процесса $w_t \in R^2$ находится в зоне "полутени". Здесь для краткости вычислений принимаем, что углы A_1, A_2 - прямые

$$|\gamma_{xy}| = |[x, A_1]| + |[A_1, A_2]| + |[A_2, y]| = a + b + c = \hat{\rho}(x, y).$$

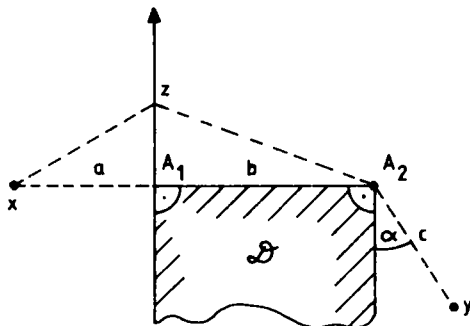


Рис.3

Применим формулу Колмогорова-Чепмена [3]. Очевидно, что

$$p^{\pm}(t, x, y) = \int_0^t \int_0^{+\infty} P_x \{ w_{\tau} \in z + dz, \tau \leq s + ds \} p^{\pm}(t-s, z, y),$$

где

$$P_x \{w_\tau z + dz, \tau \in s + ds\} = \\ = \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{2s} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left(-\frac{z^2}{2s} \right) ds \, ds.$$

Согласно результатам в [5]

$$p^+(t-s, z, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^+(\alpha)}{\sqrt{2\pi(t-s)bc}} \exp \left[-\frac{(c + \sqrt{b^2 + z^2})^2}{2(t-s)} \right],$$

где

$$C^+(\alpha) = \sin \frac{2\pi}{3} \left[3\pi \cos \frac{1}{3} (\pi - \alpha) \cos \frac{1}{3} (\pi + \alpha) \right]^{-1}.$$

Далее

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^t ds \frac{aC^+(\alpha)}{2\pi s^2 \sqrt{2\pi(t-s)bc}} \exp \left[-\frac{a^2}{2s} - \frac{b^2 + c^2}{2(t-s)} \right] \times \\ \times \int_0^{+\infty} dz \exp \left[-\frac{z^2}{2s} - \frac{2c\sqrt{b^2 + z^2} + z^2}{2(t-s)} \right].$$

По формуле Тейлора в точке $z_0 = 0$

$$\sqrt{b^2 + z^2} = b + \frac{1}{2b} z^2 + o(z^2).$$

При $t \rightarrow 0$ слагаемым $o(z^2)$ можно здесь пренебречь и тогда после подстановки $s = tu$ имеем

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 du \frac{aC^+(\alpha)}{2\pi u^2 \sqrt{1-u} \, t\sqrt{t} \sqrt{2\pi bc}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{a^2}{u} + \frac{(b+c)^2}{1-u} \right] \right\} \int_0^{+\infty} dz \exp \left[-\frac{b+cu}{2tbu(1-u)} z^2 \right].$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} dz \exp \left[-\frac{b+cu}{2tbu(1-u)} z^2 \right] = \sqrt{\frac{bu(1-u)}{2(b+cu)}} t$$

и тогда

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 du \frac{a\sqrt{b} C^+(\alpha)}{2\sqrt{2\pi} u\sqrt{u}\sqrt{b+cu} t\sqrt{2\pi bc}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{a^2}{u} + \frac{(b+c)^2}{1-u} \right] \right\}.$$

Так как $g(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{a^2}{u} + \frac{(b+c)^2}{1-u} \right] \right\}$ в точке $u_0 = \frac{a}{b+c}$, $u_0 \in (0, 1)$, принимает экстремальное значение

$$g(u_0) = \exp \left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t} \right),$$

то при $t \rightarrow 0$ по асимптотической формуле Лапласа получаем

$$(1^+) \quad p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^+}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t} \right), \quad C^+ = \frac{C^+(\alpha)}{2\sqrt{c(a+b)}}.$$

Согласно результатам в [5]

$$p^-(t-s, z, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^-(\alpha)z}{\sqrt{2\pi(t-s)b^3c}} \exp \left[-\frac{(c+\sqrt{b^2+z^2})^2}{2(t-s)} \right],$$

где

$$C^-(\alpha) = \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\alpha}{3} \left[9\pi \cos^2 \frac{1}{3} (\pi-\alpha) \cos^2 \frac{1}{3} (\pi+\alpha) \right]^{-1}.$$

Очевидно, как выше в случае (+), здесь получаем

$$p^-(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^t ds \int_0^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{z^2}{2s}\right) \times \\ \times \frac{C^-(\alpha)z}{\sqrt{2\pi(t-s)b^3c}} \exp\left[-\frac{(c+\sqrt{b^2+z^2})^2}{2(t-s)}\right] dz.$$

Далее, делая подстановку $s = tu$ и учитывая, что

$$\sqrt{b^2+z^2} = b + \frac{1}{2b} z^2 + o(z^2),$$

получаем

$$p^-(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 du \frac{aC^-(\alpha)}{2\pi\sqrt{2\pi} u^2 \sqrt{1-u} t \sqrt{t} \sqrt{b^3c}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left[\frac{a^2}{u} + \frac{(b+c)^2}{1-u}\right]\right\} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{b+cu}{2tbu(1-u)} z^2\right] z dz.$$

Здесь

$$\int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{b+cu}{2tbu(1-u)} z^2\right] z dz = \frac{bu(1-u)}{b+cu} t.$$

Применяя формулу Лапласа, окончательно получим

$$(1^-) \quad p^-(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} C^- \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t}\right), \quad C^- = \frac{C^-(\alpha)}{2\pi(a+b)} \sqrt{\frac{a}{bc\hat{\rho}}}.$$

Результаты (1^+) и (1^-) дают основание утверждать, что наружная "полутеневая" вершина A_1 вносит нулевой вклад в показатель степени t . Действительно, согласно теореме 2 в [5] полузанятая вершина A_2 (см. рис.1) для случая (+) дает вклад $1/2$ и вычитая 1, получаем $t^{-1/2}$. В случае (-) полузанятая вершина дает вклад 1 и вычитая 1 получаем t^0 , что является в полном соответствии с теоремой 1.

- П р и м е р 2. Рассмотрим случай, когда кратчайший путь содержит только две наружные полутеневые вершины и не содержит никаких других вершин (рис.4)

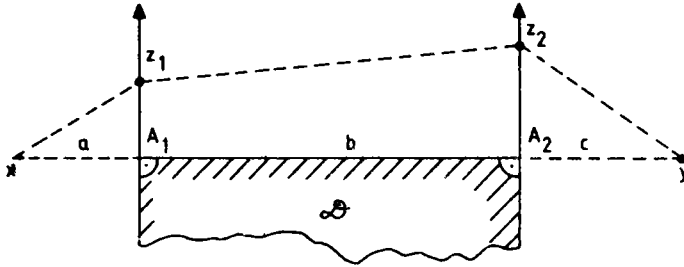


Рис.4

Тогда, согласно теореме 1, обе вершины A_1 и A_2 вносят нулевой вклад и, вычитая 1, получаем

$$p^{\pm}(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^{\pm}}{2\pi t} \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t}\right), \quad \hat{\rho} = a + b + c = |x - y|.$$

Вычислим константы $C^{\pm}$. В системах координат $A_1 z_1$, $A_2 z_2$ по формуле Колмогорова-Чепмена получим

$$p^{\pm}(t, x, y) = \int_{0 < s_1 < s_2 < t} \int ds_1 ds_2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 dz_2 p_1(s_1, x, z_1) \times \\ \times p_2^{\pm}(s_2 - s_1, z_1, z_2) p_3(t - s_2, z_2, y),$$

где

$$p_1(s_1, x, z_1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi s_1^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s_1}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s_1}} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2s_1}\right), \\ p_2^{\pm}(s_2 - s_1, z_1, z_2) = \\ = \frac{1}{2\pi(s_2 - s_1)} \left\{ \exp\left[-\frac{b^2 + (z_2 - z_1)^2}{2(s_2 - s_1)}\right] \pm \exp\left[-\frac{b^2 + (z_2 + z_1)^2}{2(s_2 - s_1)}\right] \right\},$$

$$p_3(t-s_2, z_2, y) = \\ = \frac{c}{\sqrt{2\pi(t-s_2)^3}} \exp \left[-\frac{c^2}{2(t-s_2)} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s_2)}} \exp \left[-\frac{z_2^2}{2(t-s_2)} \right].$$

Применяя подстановку $s_1 = tu_1$, $s_2 = tu_2$ и производя группировку по отношению к интегралам, получим

$$(2) \quad p^{\pm}(t, x, y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} du_1 du_2 \frac{ac}{8\pi^3 u_1^2 (u_2 - u_1) (1 - u_2)^2 t^3} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2t} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2 - u_1} + \frac{c^2}{1 - u_2} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 dz_2 \exp \left(-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - u_1} \right) z_1^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{1}{1 - u_2} + \frac{1}{u_2 - u_1} \right) z_2^2 - \frac{2z_1 z_2}{u_2 - u_1} \right] \right) \pm \right. \\ \left. \pm \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 dz_2 \exp \left(-\frac{1}{2t} \left[\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - u_1} \right) z_1^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{1}{1 - u_2} + \frac{1}{u_2 - u_1} \right) z_2^2 + \frac{2z_1 z_2}{u_2 - u_1} \right] \right) \right\}.$$

Пусть $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - u_1} = A$, $\frac{1}{1 - u_2} + \frac{1}{u_2 - u_1} = B$, $\frac{1}{u_2 - u_1} = C$. Тогда

$$I^+ = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 dz_2 \exp \left[-\frac{1}{2t} (Az_1^2 + Bz_2^2 - 2Cz_1 z_2) \right] = \\ = \frac{\sqrt{2\pi t}}{2\sqrt{B}} \int_0^{+\infty} dz_1 \exp \left(-\frac{AB - C^2}{2tB} z_1^2 \right) \left[1 + \psi \left(\frac{C}{\sqrt{2tB}} z_1 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 I^- &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dz_1 dz_2 \exp \left[-\frac{1}{2t} (Az_1^2 + Bz_2^2 + 2Cz_1 z_2) \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi t}}{2\sqrt{B}} \int_0^{+\infty} dz_1 \exp \left(-\frac{AB-C^2}{2tB} z_1^2 \right) \left[1 - \psi \left(\frac{C}{\sqrt{2tB}} z_1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно,

$$I^+ + I^- = \frac{\pi t}{AB-C^2},$$

$$I^+ - I^- = \frac{\sqrt{2\pi t}}{\sqrt{B}} \int_0^{+\infty} dz_1 \exp \left(-\frac{AB-C^2}{2tB} z_1^2 \right) \psi \left(\frac{C}{\sqrt{2tB}} z_1 \right).$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $\psi(x)$, получим

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots \right)$$

и тогда

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I^+ - I^- &= \frac{2\sqrt{2\pi t}}{\sqrt{\pi B}} \left[\frac{CBt}{\sqrt{2tB}(AB-C^2)} - \frac{C^3 t^2}{2tB\sqrt{2tB}(AB-C^2)^3} + \dots \right] \equiv \\
 &\equiv tF(u_1, u_2).
 \end{aligned}$$

Здесь, как видим, точной асимптотики для C^- не получим.

Найдем точную асимптотику для $p^+(t, x, y)$. Применяя формулу Лапласа к функции

$$h(u_1, u_2) = \frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2 - u_1} + \frac{c^2}{1 - u_2},$$

которая имеет экстремальное значение

$$h(u_1^0, u_2^0) = \hat{\rho}^2, \quad \hat{\rho} = a + b + c,$$

в точке $u_1^0 = \frac{a}{\hat{\rho}}$, $u_2^0 = \frac{a+b}{\hat{\rho}}$, получаем

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{ac}{8\pi^3 (u_1^0)^2 (u_2^0 - u_1^0) (1 - u_2^0)^2 t^3} \frac{\pi t}{\sqrt{AB - C^2}} \frac{2\pi t \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t}\right)}{\left\{ \det \text{Hess} \left[\frac{1}{2} h(u_1^0, u_2^0) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Отметим, что при $u_1^0 = \frac{a}{\hat{\rho}}$, $u_2^0 = \frac{a+b}{\hat{\rho}}$

$$AB - C^2 = \frac{\hat{\rho}^3}{abc}, \quad \det \text{Hess} \left[\frac{1}{2} h(u_1^0, u_2^0) \right] = \frac{\hat{\rho}^7}{abc}.$$

Окончательно

$$p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{\hat{\rho}^2}{2t}\right), \quad C^+ = \frac{1}{2}.$$

На основании формулы (2) с учетом (3) ещё раз утверждается результат, что

$$p^-(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C^-}{2\pi t} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2t}\right), \quad C^- \in R^1.$$

4. В п.п. 2 рассматривается случай, когда зона "полутени" находится внутри кратчайшего пути γ_{xy} и, кроме того, на обеих соседних вершинах, прилегающих к этой зоне пути γ_{xy} , не получает излома. В этом случае, может быть еще так, что нет излома пути только на одной внутренней вершине (см. рис. 5а вершина B_1 , рис. 5б вершина B_2). Тогда, очевидно, вторая соседняя вершина, прилегающая к зоне "полутени" (на рис. 5а вершина C_1 , на рис. 5б вершина C_2) считается как обыкновенная "свободная" или же "полусвободная" вершина.

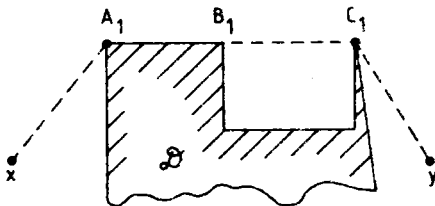


Рис. 5а

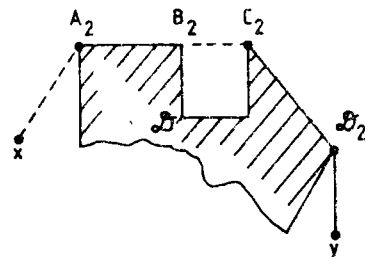


Рис. 5б

Теперь можно обобщить теорему 3 в [5] на случай, когда кратчайший путь содержит зоны "полутени". При этом в формуле плотности не меняется экспоненциальный и степенной множитель, а меняется только константа $C^{\pm}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Д. В е н т ц е л ь : Курс теории случайных процессов. Москва 1975.
- [2] Г. М а к к и н : Стохастические интегралы. Москва 1973.
- [3] И.И. Г и х м а н , А.В. С к о р о х о д : Введение в теорию случайных процессов. Москва 1965.
- [4] И.С. Г р а д ш т е й н , И.М. Р ы ж и к : Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва 1963.
- [5] С.А. М о л ч а н о в , J. S i d o r o w i o z : "Тепловая дифракция" на многоугольнике, Demonstratio Math. 16 (1983), 581-599.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, HIGHER ENGINEERING SCHOOL,
75-620 KOSZALIN, POLAND

Received May 30, 1987.

