DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXII No 2 1989

Dieter Oestreich

EIN PROBLEM DER ELEKTROCHEMISCHEN BEARBEITUNG MIT GEKRÜMMTER KATODE

1. Einleitung

Die elektrochemische Bearbeitung (ECM = Electrochemical Machining) ist eine moderne Technologie zur Metallbearbeitung mittels Elektrolyse. Dabei bewegt sich die Katode, die das Werkzeug bildet, in Richtung der Anode, dem Werkstück, von dem Metall erodiert. Im Spalt zwischen den Elektroden sorgt ein Elektrolyt für den Abtransport der Erosionsprodukte. Die mathematische Modellierung erfolgt in der Regel für die Schnittflächen und führt auf freie Randwertprobleme. Man unterscheidet zwei Typen stationärer ECM-Probleme: das direkte Problem - nach vorgegebener Form der Katode ist die stationäre Form des Anodenrandes zu bestimmen - und das inverse Problem - nach der Anodenform ist das Profil des Katoden-Instrumentes zu bestimmen. Zu beiden zweidimensionalen Problem erschienen insbesondere seit Ende der sechziger Jahre zahlreiche Arbeiten, z. B. zum direkten Problem von W.W. Klokow [5] oder R.C. Hewson-Browne [4] und zum inversen Problem von A.L. Krylow [6].

Einen gewissen Überblick vermittelt der Übersichtsartikel von I. Bannard [1], eine ausführliche Bibliographie findet man auch in [5].

Bei den direkten Problemen wurde die Kato bisher mit linearem (siehe z.B. [2], [5]) bzw. stückweise linearem Profil [4] angenommen. In der vorliegenden Arbeit verallgemeinern wir das von D.E. Collett, R.C. Hewson-Browne und D.W. Windle [2] aufgestellte Modell für eine Katode mit isolierter Halterung der Katode, das sie mit einem Reihenansatz behandeln, auf gekrümmte Profile. Dem entspricht ein nichtlineares Riemann-Hilbert-Problem, das in ähnlicher Weise bei gewissen hydrodynamischen Aufgaben [11] auftritt. Mittels konformer Abbildung überführen wir dieses Problem in eine nichtlineare singuläre Integralgleichung vom Cauchy-Typ. Auf der Grundlage des Schauderschen Fixpunktsatzes wird nach dem Vorbild der Arbeiten [14] und [11] die Existenz einer Lösung bewiesen.

Die Gleichungen des freien Randes (Anode) und die Spaltbreite (total overcut) können explizit angegeben werden.

D a n k s a g u n g : Ich danke aufrichtig Herrn Prof. L. v. Wolfersdorf, der mich auf das Thema auferksam machte, Literatur zur Verfügung stellte und durch kritische Diskussion das Entstehen der Arbeit förderte.

2. Problemstellung

Wir betrachten ein zweidimensionales, bezüglich der x-Achse symmetrisches Modell mit folgender Konfiguration (vgl. [2] sowie [4]):

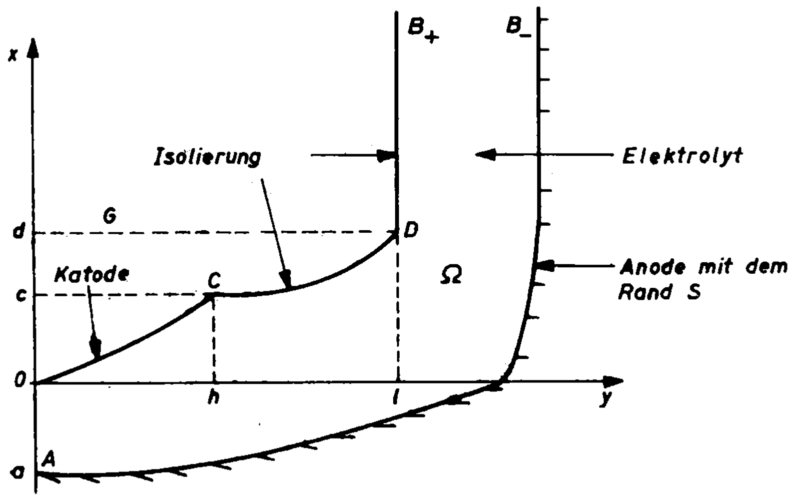

Abb.1

Die Katode OC habe die Gleichung

$$y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant c, \quad \text{mit} \quad f(0) = 0.$$

Die isolierte Halterung CDB_+ bestehe aus zwei Abschnitten: der Abschnitt CD habe die Gleichung $y = g(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, und der Abschnitt DB_+ laufe ins Unendliche bezüglich x, wobei $y = 1 = \text{const}$ gelte. Weiterhin sei $f(c) = g(c)$ und $g(d) = 1$. Die Funktionen f und g werden als streng monoton wachsend angenommen.

Das Werkzeug (Katode) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit φ in Richtung des Werkstücks (Anode). Die Leitfähigkeit des Elektrolyten wird als zeitinvariant angenommen (Vernachlässigung von Wärmeeffekten, Veränderungen des hydraulischen Drucks u.ä.). Nach Erreichen des stationären Zustandes kann das Problem auf ein zeitunabhängiges Problem reduziert werden, indem man das Koordinatensystem Oxy (vgl. Abb. 1) mit dem Werkzeug und Werkstück bewegt. Sei $u = u(x,y)$ das elektrische Potential. Dann genügt die Funktion u im Gebiet Ω zwischen den Elektroden der Laplace-Gleichung (vgl. [2])

$$\text{(1)} \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Auf den Elektroden ist das elektrische Potential u konstant, und wir nehmen an, es sei gegeben

(2a) $\quad u = 0 \quad$ auf der Katode OC,

(2b) $\quad u = u_0 (>0) \quad$ auf dem unbekannten Rand S des Werkstücks.

Auf der isolierten Halterung verschwindet die Normalableitung des elektrischen Potentials u. Wenn wir mit $v = v(x,y)$ die bis auf eine additive Konstante festgelegte konjugierte harmonische Funktion zu $u(x,y)$ bezeichnen, ist also

(2c) $\quad v = v_0 (>0)$ auf der isolierten Halterung CDB_+ mit der noch unbekannten Konstanten v_0.

Im stationären Zustand bewegt sich der Rand S des Werkstücks mit der Geschwindigkeit φ. Die Normalkomponente der Erosionsgeschwindigkeit, die proportional der elektrischen Stromstärke $\sigma(\partial u/\partial n)$ ist, ist somit gleich $\varphi \cos \gamma$, wobei σ die elektrische Leitfähigkeit und γ den Winkel zwischen der Normalen n auf S und der x-Achse bezeichnen. Demnach gilt auf S

$$(+) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \cos \gamma$$

mit einer wohlbestimmten Konstanten $\lambda > 0$. Falls s die Bogenlänge auf S, gemessen in Richtung wachsender y, bezeichnet, gilt

$$\cos \gamma = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Nach Integration erhält man somit aus (+)

$$(2d) \qquad v = \lambda y \quad \text{auf} \quad S.$$

Schließlich ist nach (2d) $v = 0$ im Punkt A und wegen der Symmetrie bezüglich der x-Achse

$$(2e) \qquad v = 0 \quad \text{auf} \quad OA.$$

Die Gleichungen $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definieren eine konforme Abbildung von Ω auf das Rechteck R der uv-Ebene mit den Eckpunkten $O'(0,0)$, $A'(u_0,0)$, $B'(u_0,v_0)$ und $C'(0,v_0)$ (siehe Abb.2).

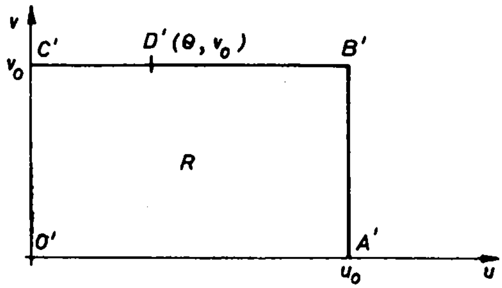

Abb.2

Der Punkt $D(d,1)$ geht in den Punkt $D'(\theta,v_0)$ über, dessen Lage auf dem Abschnitt $B'C'$ durch das Potential in $D: u(d,1) = \theta$ $(0 < \theta < u_0)$ eindeutig bestimmt wird.

Wir erhalten somit folgendes nichtlineare Riemann-Hilbert-Problem mit unstetigen Koeffizienten:
Gesucht ist im Rechteck R der uv-Ebene die holomorphe Funktion $z(u,v) = x(u,v) + iy(u,v)$, die in $\bar{R}$ stetig ist, die Randbedingungen

$$
(3) \qquad \begin{array}{ll}
y(u,0) = 0 & \text{auf } O'A', \\
y(u_0,v) = v/\lambda & \text{auf } A'B', \\
y(u,v_0) = g_1(x(u,v_0)) & \text{auf } B'C', \\
y(0,v) = f(x(0,v)) & \text{auf } C'O'
\end{array}
$$

mit

$$
g_1(x(u,v_0)) = \begin{cases} g(x(u,v_0) & \text{auf } B'D', \\ 1 & \text{auf } D'C' \end{cases}
$$

sowie die Zusatzbedingungen

$$
(4) \qquad x(0,0) = 0, \; x(0,v_0) = c, \; x(\theta,v_0) = d
$$

erfüllt.

Wir suchen Lösungen, die in allen Ecken von $\bar{R}$ mit Ausnahme von B stetig sind und zeigen, daß die beiden konjugierten harmonischen Funktionen $x(u,0)$ und $y(u,v)$ sowie der Parameter v_0 eindeutig bestimmt werden können.

3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des nichtlinearen Riemann-Hilbert-Problems

Wir überführen das Problem (3), (4) im Rechteck R in ein Riemann-Hilbert-Problem in der komplexen Halbebene, das wiederum einer eindimensionalen Integralgleichung äquivalent ist. Analog wie in [11] (vgl. auch [12], §37 und [3], §46 , [10], §16) erhalten wir folgende äquivalente nichtlineare singuläre Integralgleichung vom Cauchy-Typ

$$(5)\qquad x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{-1} \frac{f(x(s))}{s-t}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{t_o} \frac{g(x(s))}{1-t}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{t_o}^{1} \frac{1}{s-t}\,ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s-t}\,ds + D \quad \text{im Intervall } -1/k \leq t \leq t_o$$

mit

$$(6)\qquad t_o = \mathrm{sn}\left[\frac{2K}{u_o}\left(\theta - \frac{u_o}{2}\right); k\right], \quad (-1 < t_o < 1)$$

und einer beliebigen reellen Konstanten D sowie

$$(7)\qquad r(k,t) = 1/\lambda\left[v_o - \frac{u_o}{2K}\int_1^t \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}}\right],$$

wobei

$$(8a)\qquad K = K(k) = F(k,1),$$

$$(8b)\qquad F(k,\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \qquad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

das vollständige elliptische Integral 1.Gattung bzw. das elliptische Integral 1. Gattung bezeichnen.

Vermittels der Beziehung

$$(9)\qquad \frac{K(k')}{K(k)} = \frac{2v_o}{u_o} \quad (k' = \sqrt{1-k^2})$$

besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Parametern v_o und k. Die Lösung der Integralgleichung (5) muß den Zusatzbedingungen

$$(10a)\qquad x(-1/k) = 0, \qquad x(-1) = c$$

sowie der Bedingung

$$(10b)\qquad x(t_o) = d$$

zur Festlegung des Parameters k genügen. Wenn die Lösung x(t) sowie die Konstante D in (5) bekannt sind, läßt sich die Lösung des Problems (3), (4) mittels der Formel

$$\bar{z}(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{-1} \frac{f(x(s))}{s-\zeta}\,ds + \tag{11}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{t_0} \frac{g(x(s))}{s-\zeta}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{1} \frac{1}{s-\zeta}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s-\zeta}\,ds + D$$

bestimmen, wobei

$$\zeta = \mathrm{sn}\left[\frac{2K}{u_0}\left(\bar{w} - \frac{u_0}{2} + iv_0\right);k\right], \quad w = u + iv \tag{12}$$

und die Funktion sn den elliptischen Sinus bezeichnet.

Wir zeigen jetzt die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung (5) für beliebig fixiertes $k \in (0,1)$. Dazu sei angenommen, daß die Ableitungen der Funktionen f(x) und g(x) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1 < +\infty, \quad x \in [0,c] \\ &0 < m_2 \leq g'(x) \leq M_2 < +\infty, \quad x \in [c,d] \end{aligned} \tag{13}$$

mit den Konstanten m_i und M_i $(i = 1,2)$ erfüllen.

Die Eindeutigkeit der Lösung von (5) wird für die beiden Fälle $f'(x(-1)) < g'(x(-1))$ und $f'(x(-1)) \geq g'(x(-1))$ analog wie in [14] gezeigt.

Wir suchen Lösungen x(t), $t \in [-1/k, t]$ der Integralgleichung (5), die eine Ableitung $x'(t) \in L(-1/k, t_0)$ mit gewissem $p > 1$ besitzen sowie den Zusatzbedingungen (10a) genügen. Analog wie in [11] und [14] differenzieren wir die Integralgleichung (5) (vgl. auch [7], Kap. II, §6) und integrieren die allgemeine Lösung der erhaltenen (formal) linearen singulären Integralgleichung (vgl. [10], §98). Wir erhalten dann im Fall I: $f'(x(-1)) \leq g'(x(-1))$ die Fixpunktgleichung

$$(14)\qquad x(t) = (Px)(t),\ t \in [-1/k,\ t_o].$$

Der Operator P wird definiert durch

$$(15)\qquad (Px)(t) = C_o + \int_{-1/k}^{t} L(s,x)ds + C_1 \int_{-1/k}^{t} \frac{ds}{Z(s)}$$

mit dem Kern

$$(16)\qquad L(t,x) = \left(R(t) + \frac{h_\infty}{1-t}\right)/(1+A^2(t)) +$$

$$+ \frac{1}{Z(t)} S\left[\frac{ZA(R+h_\infty/(1-s))}{1+A^2}\right](t),$$

$$(17)\qquad R(t) = -\frac{u_o}{2\pi\lambda K} \int_{1}^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}(s-t)},$$

$$(18)\qquad h_\infty = v_o/\lambda - 1,$$

$$(19)\qquad A(t) = \begin{cases} f'(x(t)) & \text{für } t \in [-1/k,\ -1] \\ g'(x(t)) & \text{für } t \in (-1,\ t_o], \end{cases}$$

$$(20)\qquad Z(t) = \sqrt{1 + A^2(t)}\ \exp\left\{-S[\mu](t)\right\}\ (t_o-t),$$

$$(21)\qquad \mu(t) = \arctan A(t),\ -\pi/2 < \mu(t) < \pi/2,$$

wobei S den singulären Operator vom Cauchy-Typ

$$(22)\qquad [Sy](t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1/k}^{t_o} \frac{y(s)}{s-t}\, ds$$

und C_o, C_1 beliebige reelle Konstanten bezeichnen. Diese Konstanten lassen sich aus den Zusatzbedingungen (10a) bestimmen und zwar gilt

(23a) $$C_0 = 0,$$

(23b) $$C_1 = \left(c - \int_{-1/k}^{-1} L(s,x)\,ds\right)/I$$

mit

(24) $$I = \int_{-1/k}^{-1} \frac{ds}{Z(s)} \,.$$

Analog wie in [11] wird auf der Grundlage des Schauderschen Fixpunktsatzes die Existenz einer Lösung der Gleichung (14) im Raum $C[-1/k,\ t_0]$ der stetigen Funktionen auf $[-1/k,\ t_0]$ gezeigt.

Der Fall II: $f'(x(-1)) > g'(x(-1))$ läßt sich vermittels der Substitution $\tilde{t} = -t$ in (5) auf den Fall I zurückführen.

4. Bestimmung des Parameters k und Schlußfolgerungen

Aus der zweiten Bedingung (10a) und der Zusatzbedingung (10b) ergibt sich folgende Besimmungsgleichung für $k \in (0,1)$:

(25) $$\begin{aligned} L(k) = &\int_{-1/k}^{-1} \frac{f(x(s))}{s - t_0}\,ds - \int_{-1/k}^{-1} \frac{f(x(s))}{s+1}\,ds + \\ &+ \int_{-1}^{1} \frac{g_1(x(s))}{s - t_0}\,ds - \int_{-1}^{1} \frac{g_1(x(s))}{s+1}\,ds + \\ &+ \int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s - t_0}\,ds - \int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s+1}\,ds = \pi\,(d-c). \end{aligned}$$

Dabei ist jedem $k \in (0,1)$ genau eine Funktion $x(t)$, $t \in [-1/k,1]$ zugeordnet. Die Funktion $L(k)$ ist offenbar stetig im Intervall $(0,1)$. Wie in [11] wird bewiesen, daß $\frac{dL}{dk} < 0$, d.h. $L(k)$ ist streng monoton fallend bezüglich $k \in (0,1)$. Weiterhin gilt

(26) $$\lim_{k \to 0} L(k) = +\infty, \qquad \lim_{k \to 1} L(k) = 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz folgt daher die Existenz einer eindeutig bestimmtem Zahl $k^* \in (0,1)$ mit

$$L(k^*) = \pi(d - c) > 0 \tag{27}$$

Für h_∞ ergibt sich aus (16) und (8) folglich

$$h_\infty = \frac{u_0 K(k^{*\prime})}{2\lambda K(k^*)} - 1. \tag{28}$$

Auf Grund der obigen Ergebnisse und der Schlichtheit der konformen Abbildung $R \longrightarrow \Omega$ (vgl. [11] sowie [8]; [9], Kap. II, §3) formulieren wir folgenden

S a t z 1: Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $y = f(x)$, $0 \leq x \leq c$ und $y = g(x)$, $c \leq x \leq d$ Hölder-stetige Ableitungen besitzen (d.h. OC und CD Ljapunow-Kurven sind), wobei diese die Ungleichungen (13) erfüllen, hat das betrachtete ECM-Problem (1), (2) eine eindeutige Losung $u(x,y)$. Die Spaltbreite h_∞ wird definiert durch die Beziehung (28).

Aus (11) folgt

S a t z 2. Der freie Rand S (Anode) hat die Parameterdarstellung

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{-1} \frac{f(\bar{x}(s))}{s-t}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g_1(\bar{x}(s))}{s-t}\,ds + \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s-t}\,ds + D, \\ y(t) &= r(k,t), \quad 1 \leq t \leq 1/k, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

wobei $\bar{x}(s)$ die Lösung der Integralgleichung (5), (10) mit dem Parameter k aus (25) und der Konstanten D aus der zweiten Zusatzbedingung (10a), d.h.

$$(30) \qquad D = c - \frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{-1} \frac{f(\bar{x}(s))}{s+1}\,ds - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g_1(\bar{x}(s))}{s+1}\,ds - \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1/k} \frac{r(k,s)}{s+1}\,ds$$

darstellt.

F o l g e r u n g . Aus der Parameterdarstellung (29) ergibt sich die Analytizität des freien Randes S.

LITERATUR

[1] I. B a n n a r d : Electrochemical Machining (review), J. Appl. Electrochem., 7 (1977), 1-29.

[2] D.E. C o l l e t t , R.C. H e w s o n - F r o w n e and A.W. W i n d l e : A Complex Variable Approach to Electrochemical Machining Problems, J. Engin. Math. 4 (1970), 29-37.

[3] Д.Ф. Г а х о в : Краевые задачи. Наука, Москва 1977.

[4] R.C. H e w s o n - B r o w n e : Further Applications of Complex Variable Methods to Electrochemical Machining Problems, J. Engin. Math. 5 (1971), 233-240.

[5] В.В. К л о к о в : Электрохимическое формообразование. Издат-ство Казанского Университета 1984 .

[6] А.Л. К р ы л о в : Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металла, Докл. АН СССР 178, Н° 2 (1968), 321-323.

[7] S.G. M i c h l i n , S. P r ö s s d o r f : Singuläre Integraloperatoren. Akademie-Verlag, Berlin 1980.

[8] C. M i r a n d a : Su un problema di frontiera libera. Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica, Vol. II (1968), 71-83.

[9] В.Н. Монахов: Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Издат-ство Наука, Новосибирск 1977.

[10] N.I. Muschelischwili: Singuläre Integralgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965.

[11] D. Oestreich: Zum Staudammproblem mit Drainage. (ZAMM in Druck).

[12] W.I. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III, 2. Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

[13] L.v. Wolfersdorf: A Class of Nonlinear Riemann-Hilbert Problems for Holomorphic Functions. Math. Nachr. 116 (1984) 89-107.

[14] L.v. Wolfersdorf: On the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations of Cauchy-Type. Math. Meth. Appl. Sci. 7 (1985), 493-517.

BERGAKADEMIE FREIBERG, SEKTION MATHEMATIK, FREIBERG, 9200, DDR

Received June 26, 1987.