DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXI No 2 1988

Eberhard Wagner

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN DER HYPERGEOMETRISCHEN FUNKTION F(a, b, c, z) FÜR $|c|\to\infty$ UND KONSTANTE WERTE a, b UND z

1. Einleitung

Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktion $F(a,b;c;z)$ für betragsmäßig große reelle oder komplexe Werte eines oder mehrerer Parameter wurden erstmalig von O.Perron [7] und G.N. Watson [12] untersucht. Für $|c|\to\infty$, bei konstanten Werten von a, b, z werden in [7] unter der einschränkenden Bedingung $\operatorname{Im} c = \text{const}$ asymptotische Entwicklungen angegeben, während in [12] zwar eine Konzept zur Herleitung derartiger Entwicklungen für beliebig gegen Unendlich strebendes c vorgestellt wird, darüber hinaus aber nur die sehr enfach zu beweisende Entwicklung

$$(1)\qquad F(a,b;c+l;z) \approx \frac{\Gamma(c+l)}{\Gamma(c+l-b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu \Gamma(b+\nu)}{\Gamma(b)}\, l^{-b-\nu} \qquad (|l|\to\infty)$$

(mit einer erzeugenden Funktion für die Koeffizienten k_ν) angegeben ist. Die den Geltungsbereich von (1) definierenden Bedingungen sind in [12] nur zum Teil konkret formuliert und zudem mit einem wesentlichen Vorzeichenfehler behaftet. Das Konzept von Watson wird in [4] etwas weiter ausgeführt und dabei (mit einem nicht ganz lückenlosen Beweis) gezeigt, daß in einem explizit angegebenen, von z abhängigen Winkelraum der komplexen c-Ebene aus (1) die für $|z|<1$ sogar mit dem Gleichheitszeichen geltende Entwicklung

$$(2)\quad F(a,b;c;z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!\ (c)_\nu} z^\nu \quad (|c| \to \infty,\ a,b,z \text{ fest},\ |\arg(1-z)| \leqslant x)$$

folgt. (Hier und im folgenden verwenden wir die üblichen Bezeichnungen $(a)_\nu = \Gamma(a+\nu)/\Gamma(a)$, also $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu-1)$ für $\nu \geqq 1$). Nicht richtig ist die in [4] wie in [1] aufgestellte, unbewiesene Behauptung, daß (2) bei beliebig gegen Unendlich strebendem c gilt, falls nur $|z| < 1$ ist.

In der vorliegenden Arbeit werden asymptotische Entwicklungen für $F(a,b;c;z)$ bei beliebig gegen Unendlich strebendem c hergeleitet, deren Gültigkeitsbereiche bei jeweils beliebigen Werten a, b, z ($|\arg(1-z)| \leqslant \pi$) die komplexe c-Ebene voll ausschöpfen, selbstverständlich bis auf die nicht zum Definitionsbereich von F gehörenden Punkte $c = 0,-1,-2,\ldots$.

2. Bezeichnungen

Ist $\operatorname{Re} z > 1/2$, $z \neq 1$ mit $|\arg(1-z)| \leqslant \pi$, so sei

$$(3)\qquad \alpha = \alpha(z) = \arctan \frac{\arg(1-z) - \operatorname{Arg} z + \pi}{|\ln |1-1/z||},$$

$$(4)\qquad \beta = \beta(z) = \arctan \frac{\arg(1-z) - \operatorname{Arg} z - \pi}{\ln|1-1/z|},$$

wobei Arg z den Hauptwert des Arguments bezeichnet, d.h. $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$. Wegen $\ln|1-1/z| < 0$ und $\arg(1-z)-\operatorname{Arg} z \in [-\pi,\pi]$ für $\operatorname{Re} z > 1/2$ gelten die Ungleichungen

$$(5)\qquad -\pi/2 < \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta < \pi/2,$$

wobei offenbar α und β nicht gleichzeitig verschwinden können. Mit ε und δ werden im folgenden stets positive Konstanten bezeichnet, die beliebig klein gewählt werden können, während k, m und n stets beliebige, voneinander unabhängige, nichtnegative ganze Zahlen bedeuten.

3. Resultate

Die folgenden Sätze gelten unter den generellen Voraussetzungen $c \neq -n$, $|\arg(1-z)| \leq \pi$, $z \neq 0$ und $z \neq 1$. Die Parameter a und b sowie z seien beliebige feste komplexe Zahlen,

Satz 1: Es gilt

$$F(a,b;c;z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!\,(c)_\nu} z^\nu \qquad (|c| \to \infty) \tag{6}$$

in jedem der folgenden Fälle:

(i) $a = -m$ oder $b = -n$;

(ii) $\operatorname{Re} z < 1/2$ und $|c+n| \geq \delta > 0$;

(iii) $\operatorname{Re} z = 1/2$ und $|\arg c| \leq \pi - \varepsilon$;

(iv) $\operatorname{Re} z > 1/2$ und

$$-\beta - \pi/2 + \varepsilon \leq \arg c \leq -\alpha + \pi/2 - \varepsilon\,. \tag{7}$$

Satz 2: Sind $a \neq -m$ und $b \neq -n$ sowie $\operatorname{Re} z > 1/2$, so gilt im Winkelraum

$$-\alpha - \pi/2 + \varepsilon \leq \arg(-c) \leq -\beta + \pi/2 - \varepsilon \tag{8}$$

für $|c| \to \infty$ die asymptotische Entwicklung

$$F(a,b;c;z) \approx \tag{9}$$

$$\approx \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \frac{z^{1-c}(1-z)^{c-b-a}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1-c)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-a)_\nu (1-b)_\nu}{\nu!\,(c-b-a+1)_\nu} (1-z)^\nu .$$

Satz 3: Sind $a \neq -m$ und $b \neq -n$, so gilt für $|c| \to \infty$

$$F(a,b;c;z) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!\,(c)_\nu} z^\nu + O(c^{-k-1}) + \tag{10}$$

$$+ \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \frac{z^{1-c}(1-z)^{c-b-a}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1-c)} \left[\sum_{\nu=0}^{k} \frac{(1-a)_\nu (1-b)_\nu}{\nu!\,(c-b-a+1)_\nu} (1-z)^\nu + O(c^{-k-1}) \right]$$

in jedem der folgenden Fälle:

(i) Re $z < 1/2$ und $c = -n + o(1)$;

(ii) Re $z = 1/2$ und $\arg(-c) = o(1)$;

(iii) Re $z > 1/2$ und $\arg c = -\alpha + \pi/2 + o(1)$ oder $\arg c = -\beta - \pi/2 + o(1)$.

Zu Satz 3 bleibt zu bemerken, daß in Abhängigkeit von den Werten der Konstanten a, b, z eine der beiden Summen in (10) gegenüber der anderen vernachlässigbar sein kann, aber darüber keine einfache allgemeine Aussage möglich ist. Das hängt offenbar davon ab, ob der Vorfaktor der zweiten Summe mit $|c| \to \infty$ exponentiell wächst oder fällt.

4. Beweise

4.1. Der Fall (i) von Satz 1 ist trivial, da (6) nach Definition der hypergeometrischen Funktion sogar mit dem Gleichheitszeichen gilt. Wir können deshalb im folgenden annehmen, daß weder a noch be gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

4.2. Für $c > 0$ und $\nu > n$ gilt

$$(c)_\nu = c(c+1)\dots(c+n-1)(c+n)\dots(c+\nu-1) \geq c^n n(n+1)\dots(\nu-1) = $$
$$= c^n \frac{\nu!}{\nu(n-1)!} .$$

Daraus folgt für $|z| < 1$ $(z \neq 0)$, beliebige komplexe a, b und $c > 0$ die Abschätzung

$$\left| F(a,b;c;z) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!(c)_\nu} z^\nu \right| \leq \frac{(n-1)!}{c^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu(|a|)_\nu (|b|)_\nu}{(\nu!)^2} |z|^\nu \leq$$

$$\leq \frac{(n-1)!\,|z|}{c^n} \frac{d}{dz} F(|a|,|b|;1;|z|) = O(c^{-n}).$$

Damit ist (6) für $|z| < 1$ und c (reell) $\to +\infty$ bewiesen.

4.3. Zum Beweis der nichttrivialen Fälle gehen wir von der bekannten Integraldarstellung

(11) $$F(a,b;c;z) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \quad (\mathrm{Re}\ c > \mathrm{Re}\ b > 0)$$

aus, wobei für $\arg(1-z) = -\pi$ oder $\arg(1-z) = \pi$ (oberes bzw. unteres Ufer des Schnittes $z > 1$) der Punkt $1/z$ des Integrationsintervalls auf einem kleinen oberen bzw. unteren Halbkreis umgangen wird. Mit der Substitution $1-t = e^{-\tau}$ erhält man aus (11)

(12) $$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty e^{-c\tau}e^{b\tau}(1-e^{-\tau})^{b-1}(1-z+ze^{-\tau})^{-a}d\tau.$$

Das bedeutet: F ist für $\mathrm{Re}\ c > \mathrm{Re}\ b\ (>0)$ bis auf den Faktor vor dem Integral die Laplace-Transformierte der Funktion

(13) $$f(\tau) = e^{b\tau}(1-e^{-\tau})^{b-1}(1-z+ze^{-\tau})^{-a}.$$

Die Funktion f ist holomorph bezüglich τ in jedem Winkelraum mit dem Scheitel 0, der keine Nullstellen $+2k\pi i$ und $-\mathrm{Log}(1-1/z) + 2k\pi i$ von $1-e^{-\tau}$ bzw. $1-z+ze^{-\tau}$ enthält, insbesondere also für

(14) $$-\pi/2 < \mathrm{Arg}\ \tau < \pi/2, \quad \text{falls} \quad \mathrm{Re}\ z \leq 1/2 \text{ ist,}$$

und

(15) $$\alpha < \mathrm{Arg}\ \tau < \beta, \quad \text{falls} \quad \mathrm{Re}\ z > 1/2 \text{ ist.}$$

In jedem abgeschlossenen Teilwinkelraum von (14) bzw. (15) ist offenbar $e^{-b\tau}f(\tau) = O(1)$ für $\tau \to \infty$, so daß der Integrationsweg in (12) innerhalb der Winkelräume (14) bzw. (15) beliebig um den Nullpunkt gedreht werden kann. Bezeichnet φ den Drehwinkel, so erhält man die analytische Fortsetzung der Bildfunktion in die Halbebene $\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}(c-b)\right] > 0$, [2]. Da

$F(a,b;c;z)/\Gamma(c)$ eine ganze holomorphe Funktion von c ist, gilt demnach

$$(16)\qquad F(a,b;c;z) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-c\tau} f(\tau)d\tau \quad (\mathrm{Re}\ b>0,\ \mathrm{Re}\left[(c-b)e^{i\varphi}\right]>0)$$

mit

$$(17)\qquad \varphi \in \begin{cases} (-\pi/2,\ \pi/2) & \text{für} \quad \mathrm{Re}\ z \leqslant 1/2, \\ (\alpha,\beta) & \text{für} \quad \mathrm{Re}\ z > 1/2. \end{cases}$$

Die Funktion $f(\tau)\tau^{-b+1}$ ist holomorph in einer Umgebung von $\tau = 0$, so daß f eine asymptotische Entwicklung

$$(18)\qquad f(\tau) \approx \tau^{b-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a,b,z)\tau^\nu \quad (\tau \to 0)$$

besitzt. Die Koeffizienten $P_\nu(a,b,z)$ sind, wie man aus (13) leicht erkennt, Polynome in a, b und z. Aus (18) folgt nach einer bekannten Verallgemeinerung des Lemmas von Watson [3] in jedem Winkelraum $\left|\arg\left[e^{i\varphi}(c-b)\right]\right| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ die bereits von Watson [12] (vgl. (1) in der vorliegenden Arbeti) angegebene asymptotische Entwicklung

$$(19)\qquad F(a,b;c;z) \approx$$

$$\approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a,b,z)\Gamma(\nu+b)c^{-\nu-b} \quad (|c| \to \infty).$$

4.4. Nach [8] gilt für beliebige komplexe Zahlen s und t

$$(20)\qquad \frac{\Gamma(c+s)}{\Gamma(c+t)} \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k^{(s-t+1)}(s)(t-s)_k}{k!} c^{s-t-k}$$

$$(c \to \infty,\ |\arg(c+s)| \leqslant \pi-\varepsilon),$$

wobei die $B_k^{(s)}(t)$ die durch die erzeugende Funktion

$$(21)\qquad z^s e^{tz}(e^z-1)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{(s)}(t)}{k!}\, z^k \qquad (|z| < 2\pi)$$

definierten verallgemeinerten Bernoullischen Polynome (in s und t) sind.

4.5. Setzt man für den Faktor $\Gamma(c)/\Gamma(c-b)$ in (19) die nach 4.4. für $|\arg c| \leqslant \pi-\varepsilon$ geltende asymptotische Entwicklung (20) ein und multipliziert anschließend beide Entwicklungen miteinander, so erhält man für $\left|\arg\left[(c-b)e^{i\varphi}\right]\right| \leqslant \pi/2-\varepsilon$

$$(22)\qquad F(a,b;c;z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(a,b,z)c^{-\nu} \qquad (|c| \to \infty)$$

mit Koeffizienten Q_ν, die Polynome in a, b und z sind. Werden die Potenzen $c^{-\nu}$ nach der äquivalenten asymptotischen Skala $\left\{\left[(c)_\mu\right]^{-1}\right\}_{\mu\geq 0}$ entwickelt, so folgt aus (22)

$$(23)\qquad F(a,b;c;z) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu(a,b,z)\left[(c)_\nu\right]^{-1} \qquad \left(c \to \infty\,, \left|\arg\left[(c-b)e^{i\varphi}\right]\right| \leqslant \pi/2-\varepsilon\right)$$

mit in a,b,z ganzrationalen Koeffizienten R_ν.

Für $|z| < 1$, $\varphi = 0$ und c (reell) $\to +\infty$ müssen nach 4.2 die Entwicklungen (6) und (23) identisch sein, also $R_\nu = (a)_\nu(b)_\nu z^\nu/\nu!$. Berücksichtigt man noch (17), so ist gezeigt, daß (6) im Fall $\operatorname{Re} z < 1/2$ im Winkelraum $|\arg c| \leqslant \pi - \varepsilon$ und im Fall $\operatorname{Re} z > 1/2$ im Winkelraum $-\beta-\pi/2+\varepsilon \leqslant \arg c \leqslant -\alpha+\pi/2-\varepsilon$ gilt, aber jeweils noch unter der einschränkenden Bedingung $\operatorname{Re} b > 0$.

4.6. Setzt man in der Gaußschen Beziehung [1]

$$F(a,b;c;z) = (1-z)F(a,b+1;c;z) + (1-a/c)zF(a,b+1;c+1;z)$$

für die hypergeometrischen Funktionen auf der rechten Seite die nach 4.5 für $\operatorname{Re} b > -1$ geltenden Entwicklungen (6) ein, so erhält man für $F(a,b;c;z)$ wieder (6). Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise kann man sich von der Einschränkung $\operatorname{Re} b > 0$ befreien. Damit ist Satz 1 bis auf den Fall (ii) bewiesen.

4.7. Zum Beweis des für $\arg(-c) = o(1)$ noch offenen Falls (ii) von Satz 1 sowie der Sätze 2 und 3 gehen wir aus von der bekannten Beziehung [1]

$$(24)\quad F(a,b;a+b-c+1;1-z) = \frac{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} F(a,b;c;z) + $$
$$+ \frac{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{1-c}(1-z)^{c-b-a} F(1-a,1-b;2-c;z).$$

Wegen $\Gamma(c-1) = -\pi/[\Gamma(2-c)\sin(\pi c)]$ erhält man aus (24)

$$(25)\quad F(a,b;c;z) = k_1(a,b,c)F(a,b;a+b-c+1;1-z) + $$
$$+ k_2(a,b,c,z)F(1-a,1-b;2-c;z)$$

mit

$$(26)\quad k_1 = \Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)/[\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(1-c)],$$

$$(27)\quad k_2 = \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-c)\Gamma(2-c)} z^{1-c}(1-z)^{c-b-a}.$$

Nach dem bis einschließlich 4.6 geführten Beweis gilt

$$(28)\quad F(a,b;a+b-c+1;1-z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!\,(a+b-c+1)_\nu} (1-z)^\nu \quad (|c| \to \infty)$$

in einem durch die Ungleichungen $|\arg(-c)| \leq \pi - \varepsilon$ für $\operatorname{Re}(1-z) \leq 1/2$ oder $-\beta - \pi/2 + \varepsilon \leq \arg(-c) \leq -\alpha + \pi/2 - \varepsilon$ $(\alpha = \alpha(1-z),\ \beta = \beta(1-z))$ für $\operatorname{Re}(1-z) > 1/2$ definierten Winkelraum, der mit W_{1-z} bezeichnet werde. Die Reihe in (28) kann in eine asymptotische Reihe nach der äquivalenten Skala $\{c^{-\mu}\}_{\mu\geq 0}$ übergeführt werden, deren Koeffizienten Polynome in a, b und z sind:

$$(29)\quad F(a,b;a+b-c+1;1-z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{P}_\nu(a,b,z)c^{-\nu} \quad (|c| \to \infty\,,\; c \in W_{1-z}).$$

Die in (26) auftretenden Quotienten $\Gamma(a-c+1)/\Gamma(a+b-c+1)$ und $\Gamma(b-c+1)/\Gamma(1-c)$ besitzen nach 4.4 für $|c| \to \infty$, $|\arg(-c)| \leq \pi-\varepsilon$ bis auf sich gegenseitig wegkürzende Faktoren $(-c)^{-b}$ und $(-c)^{b}$ asymptotische Entwicklungen nach Potenzen von $1/c$ mit Koeffizienten, die Polynome in a und b bzw. in b sind. Multipliziert man beide Entwicklungen miteinander und die Produktreihe anschließend mit (29), so erhält man die Entwicklung

$$(30)\quad k_1(a,b,c)F(a,b;a+b-c+1;1-z) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{Q}_\nu(a,b,z)c^{-\nu} \quad (|c| \to \infty\,,\; c \in W_{1-z}),$$

die schließlich noch in die äquivalente asymptotische Reihe

$$(31)\quad k_1(a,b,c)F(a,b:a+b-c+1;1-z) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{R}_\nu(a,b,z)\{(c)_\nu\}^{-1} \quad (|c| \to \infty\,,\; c \in W_{1-z})$$

transformiert werden kann. Dabei sind $\tilde{Q}_\nu$ und $\tilde{R}_\nu$ Polynome in a, b und z. Zur Berechnung der $\tilde{R}_\nu$ beschränken wir uns zunächst auf den Fall $\operatorname{Re} z < 1/2$, $0 < \gamma_0/2 \leq \arg(-c) \leq \gamma_0$ mit einer kleinen festen Zahl γ_0. Dann ist offenbar $1/\sin(\pi c) = o(1)$, wegen (20) $\Gamma(a-c+1)/\Gamma(1-c) \sim (-c)^a$ und $\Gamma(b-c+1)/\Gamma(2-c) \sim (-c)^{b-1}$ sowie mit $\gamma = \arg(-c)$

$$(32)\quad |z^{-c}(1-z)^c| =$$

$$= \exp\{-|c|\cos\gamma[\ln|1-1/z|+\tan\gamma(\operatorname{Arg} z - \arg(1-z))]\} \leq$$

$$(33)\quad \leq \exp\{-|c|\cos\gamma_0[\ln|1-1/z|-\tan\gamma_0|\operatorname{Arg} z - \arg(1-z)|]\},$$

so daß k_2 bei hinreichend klein gewähltem γ_0 mit $|c| \to \infty$ exponentiell gegen Null strebt. Da wegen (6) $F(1-a,1-b;2-c;z)$ gleichzeitig beschränkt bleibt, folgt aus (25) und (31)

$$(34)\qquad F(a,b;c;z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{R}_\nu(a,b,z)\{(c)_\nu\}^{-1}$$

$$(|c| \to \infty\ ,\ 0 < \gamma_0/2 \leqslant \arg(-c) \leqslant \gamma_0,\ \operatorname{Re} z < 1/2).$$

Andererseits gilt unter den angegebenen Bedingungen nach 4.6 die Entwicklung (6), woraus wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer asymptotischen Entwicklung $\tilde{R}_\nu(a,b,z) = (a)_\nu(b)_\nu z^\nu/\nu!$ folgt. Statt (31) kann man also schreiben

$$(35)\qquad k_1(a,b,c)F(a,b;a+b-c+1;1-z) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu(b)_\nu}{\nu!(c)_\nu} z^\nu \qquad (|c| \to \infty\ ,\ c \in W_{1-z}).$$

Ersetzt man in (35) a durch 1-a, b durch 1-b, c durch c-b-a+1 und z durch 1-z, so erhält man

$$(36)\qquad \frac{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)} F(1-a,1-b;2-c;z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-a)_\nu(1-b)_\nu}{\nu!(c-b-a+1)_\nu}(1-z)^\nu$$

$$(|c| \to \infty\ ,\ c \in W_z).$$

Aus (25), (35) und (36) folgt schließlich

$$(37)\qquad F(a,b;c;z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a)_\nu(b)_\nu}{\nu!(c)_\nu} z^\nu + O(c^{-n-1}) +$$

$$+ k_3(a,b,c,z)\left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(1-a)_\nu(1-b)_\nu}{\nu!(c-b-a+1)_\nu}(1-z)^\nu + O(c^{-n-1})\right]$$

$$(|c| \to \infty\ ,\ c \in W_z \cap W_{1-z})$$

mit

$$(38) \quad k_3(a,b,c,z) = \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-c)} z^{1-c}(1-z)^{c-b-a},$$

Offenbar hängt es von k_3 ab, ob und gegebenenfalls welche Teile in (37) vernachlässigbar sind.

4.8. Ist $\mathrm{Re}\, z \leqslant 1/2$, so gilt (37) speziell für $\gamma = \arg(-c) = o(1)$. In diesem Fall folgt aus $\Gamma(a+b-c)/\Gamma(1-c) \sim (-c)^{a+b-1}$, (32) und (38)

$$(40) \quad |k_3(a,b,c,z)| \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \left|(-c)^{a+b-1}\right| \exp\left\{-|c|(1+o(1))\left[\ln|1-1/z|+o(1)\right]\right\} .$$

Daraus wird ersichtlich, daß für $\mathrm{Re}\, z < 1/2$ und $|c+n| \geqslant \delta > 0$ der Koeffizient k_3 mit $|c| \to \infty$ exponentiell fällt, und sich deshalb (37) auf (6) reduzieren läßt. Damit ist auch der Fall (ii) von Satz 1 vollständig bewiesen.

Ist $\mathrm{Re}\, z < 1/2$ und $c = -n+o(1)$ $(n \to \infty)$ oder $\mathrm{Re}\, z = 1/2$ und $\arg(-c) = o(1)$, so kann über die Größenordnung von k_3 keine allgemeingültige Aussage gemacht und folglich keiner der Anteile in (37) von vornherein vernachlässigt werden. Das stimmt überein mit den Aussagen in den Fällen (i) und (ii) von Satz 3.

4.9. Es sei jetzt $\mathrm{Re}\, z > 1/2$ und c strebe in dem zum Winkelraum (7) komplementären Winkelraum

$$(41) \quad W_z^* : -\alpha - \pi/2 - \varepsilon < \arg(-c) = \gamma < -\beta + \pi/2 + \varepsilon$$

gegen Unendlich. Da α und β nach (3) und (4) nicht gleichzeitig Null sein können, folgt aus (5) $\beta - \alpha > 0$. Also ist W_z^* vollständig in W_z $(-\beta-\pi/2+\varepsilon \leqslant \gamma \leqslant -\alpha + \pi/2 - \varepsilon)$ enthalten und wegen $W_z \cap W_{1-z} = W_z$ gilt (37) in W_z^*. Aus (3) und (4) erhält man

$$(42)\quad |z^{-c}(1-z)^c| = \exp\{-|c|\cos\gamma \ln|1-1/z|\,[1-\tan\alpha\,\tan\gamma] - -\pi\,|c|\,\sin\gamma\}$$

oder

$$(43)\quad |z^{-c}(1-z)^c| = \exp\{-|c|\cos\gamma \ln|1-1/z|\,[1-\tan\beta\,\tan\gamma] + +\pi\,|c|\,\sin\gamma\}.$$

Im Teilwinkelraum

$$W_z^{**} : -\pi/2 < -\alpha - \pi/2 + \varepsilon \leqslant \arg(-c) = \gamma \leqslant -\beta + \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$$

von W_z^* folgt wegen $1/\tan(\alpha-\varepsilon) \leqslant \tan\gamma \leqslant 1/\tan(\beta+\varepsilon)$ und $\cos\gamma \geqslant \sin\varepsilon$ aus (42) bzw. (43)

$$(44)\quad |z^{-c}(1-z)^c| \geqslant \exp\{-\lambda_\varepsilon\,|c|\,\sin\varepsilon\,\ln|1-1/z| + \pi\,|c|\,\sin|\gamma|\}$$

mit einer positiven Konstanten $\lambda_\varepsilon = 1 - \tan\alpha/\tan(\alpha-\varepsilon)$ für $\gamma < 0$ und $\lambda_\varepsilon = 1 - \tan\beta/\tan(\beta+\varepsilon)$ für $\gamma \geqslant 0$. Berücksichtigt man noch $|1/\sin(\pi c)| \geqslant \exp\{-\pi|c|\,\sin|\gamma|\}$, so erhält man schließlich für betragsmäßig hinreichend große $c \in W_z^{**}$ die Abschätzung

$$(45)\quad |k_3(a,b,c,z)| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\pi \frac{(-c)^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, z(1-z)^{-a-b}\right| \exp\{-\lambda_\varepsilon|c|\,\sin\varepsilon\,\ln|1-1/z|\}.$$

Aus ihr ist ersichtlich, daß $|k_3|$ mit $|c| \to \infty$ exponentiell gegen Unendlich strebt und mithin die erste Summe in (37) vernachlässigbar ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

4.10. Für $\mathrm{Re}\,z > 1/2$ und $\gamma = \arg(-c) = -\alpha - \pi/2 + o(1)$ oder $\gamma = \arg(-c) = -\beta + \pi/2 + o(1)$ erhält man aus (42) bzw. (43) wegen $\tan\gamma \sim 1/\tan\alpha$ bzw. $\tan\gamma \sim 1/\tan\beta$

$$(46)\quad |z^{-c}(1-z)^c/\sin(\pi c)| = \exp\{o(|c|)\},$$

also in Übereinstimmung mit Fall (iii) von Satz 3 keine ausreichend genaue Aussage über die Größenordnung von k_3.

5. Bemerkungen und Ergänzungen

5.1. Ist Re $z < 1/2$ und $c = -n+\mu(n)$ mit $\mu(n) = o(1)$ für $n \to \infty$ (Fall (i) von Satz 3), so kann man sich, anknüpfend an (40), leicht überlegen, daß sich (10) auf (6) reduzieren läßt, wenn $\ln \mu(n) = o(n)$ ist.

5.2. Es ist bekannt, daß mit den Beziehungen

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-b-a}F(c-a,c-b;c;z)=(1-z)^{-a}F(a,c-b;c;z/(z-1))$$

und $F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$ aus den Entwicklungen (6), (9) und (10) leicht entsprechende asymptotische Entwicklungen in den Fällen

- $|c| \to \infty$, $|b| \to \infty$,
- $|c| \to \infty$, $|a| \to \infty$,
- $|c| \to \infty$, $|a| \to \infty$, $|b| \to \infty$

hergeleitet werden können, jeweils aber unter den stark einschränkenden Bedingungen, daß die Differenzen der gegen Unendlich strebenden Parameter konstant sein müssen.

5.3. Folgt man dem Konzept von Watson [12], so können mittels der Beziehung [1]

$$\begin{aligned}(47)\qquad & e^{\pm\pi i(c-b)} \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-b-a+1)} z^{1-c}(1-z)^{c-b-a} \times \\ & \times F(1-a,1-b;c-b-a+1;1-z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a,b;c;z) + \\ & + e^{\pm\pi i(1-b)} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)} (-z)^{a-c}(1-z)^{c-b-a} \times \\ & \times F(1-a,c-a;b-a+1:1/z)\end{aligned}$$

(die oberen Vorzeichen in den Exponenten stehen für Im $z > 0$, die unteren für Im $z < 0$) aus asymptotischen Entwicklungen für $|c| \to \infty$ und feste a, b, z solche für $|b| \to \infty$ mit festen a, c, z oder für $|a| \to \infty$ mit festen b, c, z berechnet werden.

Zu diesem Zweck ist (47) nach $F(1-a,c-a;b-a+1;1/z)$ aufzulösen und a, b, c und z durch $1-a$ bzw. $c-a$ bzw. $b-a+1$ bzw. $1/z$ zu ersetzen. Wenn man anschließend noch a und b vertauscht, ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\frac{F(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} = q_1\, F(b,b-c+1;a+b-c+1;1-1/z) + \tag{48}$$

$$+\, q_2\, F(1-b,c-b;a-b+1;1/z)$$

mit

$$q_1 = (-z)^{-b}\Gamma(a+1-c)/[\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c+1)] \tag{49}$$

und

$$q_2 = (1-z)^{c-b-a}\, z^{b-c}\, \frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(a-b+1)}\,. \tag{50}$$

Aus den Sätzen 1 bis 3 erhält man für $|a| \to \infty$

$$F(b,b-c+1;a+b-c+1;1-1/z) = \tag{51}$$

$$= \lambda_1 \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(b)_\nu\,(b+1-c)_\nu}{\nu!\,(a+b-c+1)_\nu}\,(1-1/z)^\nu + O(a^{-n-1}) \right] +$$

$$+\, \lambda_2\, k \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(1-b)_\nu\,(c-b)_\nu}{\nu!\,(a-b+1)_\nu}\, z^{-\nu} + O(a^{-n-1}) \right]$$

mit

$$k = k(a,b,c,z) = \tag{52}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(a+b-c+1)\pi}\, \frac{(1-1/z)^{c-b-a}(1/z)^{a-b}}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}\, \frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-b-a)}$$

und Konstanten λ_1, λ_2, die in Abhängigkeit von z und arg a die Werte 0 oder 1 annehmen. Ersetzt man in (51) a, b, c und z in dieser Reihenfolge durch a-c+1, 1-b, 2-c, $(1-1/z)^{-1}$, so ergibt das

$$(53) \qquad F(1-b,c-b;a-b+1;1/z) =$$

$$= \lambda_3 \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(1-b)_\nu (c-b)_\nu}{\nu!(a-b+1)_\nu} z^{-\nu} + O(a^{-n-1}) \right] +$$

$$+ \lambda_4 k^* \left[\sum_{\nu=0}^{k} \frac{(b)_\nu (b-c+1)_\nu}{\nu!(a+b-c+1)_\nu} (1-1/z)^\nu + O(a^{-n-1}) \right]$$

mit $k^* = k(a-c+1,1-b,2-c,(1-1/z)^{-1})$ und Koeffizienten λ_3, λ_4, die in Abhängigkeit von a und z die Werte 0 oder 1 annehmen. Aus (48), (51) und (53) folgt

$$(54) \qquad \frac{F(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} =$$

$$= \left[\lambda_1 q_1 + \lambda_4 k^* q_2\right] \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(b)_\nu (b-c+1)_\nu}{\nu!(a+b-c+1)_\nu} (1-1/z)^\nu + O(a^{-n-1}) \right] +$$

$$+ \left[\lambda_2 k q_1 + \lambda_3 q_2\right] \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(1-b)_\nu (c-b)_\nu}{\nu!(a-b+1)_\nu} z^{-\nu} + O(a^{-n-1}) \right] .$$

Die in q_1, q_2, k und k^* auftretenden Quotienten der Form $\Gamma(a+s)/\Gamma(a+t)$ und $\Gamma(s-a)/\Gamma(t-a)$ (s, t konstant) lassen sich nach (20) bis auf Faktoren a^{s-t} bzw. $(-a)^{s-t}$ in asymptotische Reihen nach der Skala $\{a^{-\nu}\}_{\nu\geq 0}$ entwickeln. Nach dieser Skala können auch die in (54) auftretenden Summen entwickelt werden. Berücksichtigt man noch, daß sich aus $\lambda_1 q_1 + \lambda_4 k^* q_2$ der Faktor $(-az)^{-b}/\Gamma(c-b)$ und aus $\lambda_2 k q_1 + \lambda_3 q_2$ der Faktor $(-az)^{b-c} \times (1-z)^{c-b-a}/\Gamma(b)$ herausheben läßt, so ergeben sich Entwicklungen der Gestalt

$$(55)\quad \frac{F(a,b;c;z)}{\Gamma(c)} = \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)}\left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_\nu(b,c,1/z)}{a^\nu} + O(a^{-n-1})\right] +$$

$$+ \frac{(1-z)^{c-b-a}(-az)^{b-c}}{\Gamma(b)}\left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\tilde{p}_\nu(b,c,1/z)}{a^\nu} + O(a^{-n-1})\right]$$

mit geeignet zu wählenden Werten der Potenzen von -az. Die Koeffizienten p_ν und $\tilde{p}_\nu$ sind auf diesem Weg zwar prinzipiell berechenbar, aber schon die Berechnung von p_2 und $\tilde{p}_2$ würde erheblichen rechnerischen Aufwand erfordern, zumal außerdem in Betracht zu ziehen ist, daß dabei wegen der Abhängigkeit von λ_1 bis λ_4 die den Fällen der Sätze 1 bis 3 entsprechenden Fallunterscheidungen hinsichtlich Re(1/z) und arg a zu machen sind. In [9] wird eine Entwicklung der Form (55) auf anderem Wege hergeleitet, der die Berechnung der Koeffizienten mittels einer erzeugenden Funktion oder rekursiv [11] gestattet. Es sei noch bemerkt, daß der Versuch, den umgekehrten Weg zu gehen, also aus (55) mittels geeigneter Funktionalgleichungen die Sätze 1 bis 3 zu beweisen, fehlschlägt, da sich dann in gewissen Winkelräumen der komplexen c-Ebene nur o-Beziehungen ergeben.

5.4. Läßt man im Fall $|c| \to \infty$ zu, daß auch $|a|$ und $|b|$ unbeschränkt sein können, allerdings unter den Bedingungen $a^2 = o(c)$ und $b^2 = o(c)$, so bilden die Reihenglieder in (6) ebenfalls eine asymptotische Skala. Es erhebt sich die Frage, ob auch dann (6) und damit (9) und (10) gelten, was in einer nachfolgenden Arbeit untersucht werden wird. Die ensprechende Fragestellung für $|a| \to \infty$ mit $b^2 = o(a)$ und $c^2 = o(a)$ wird in [10] behandelt.

LITERATUR

[1] H. Bateman, A. Erdélyi: Higher transcendental functions, Vol.1. New York-Toronto-London: Mc Graw-Hill Book Company, Inc, 1953.

[2] G. D o e t s c h : Handbuch der Laplace-Transformation I (Nachdruck der 1. Auflage). Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1971.

[3] G. D o e t s c h : Handbuch der Laplace-Transformation II. Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1955.

[4] A. K r a t z e r , W. F r a n z : Transzendente Funktionen, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1960.

[5] T.M. M a c R o b e r t : The asymptotic expansions of the spherical harmonics, Proc. Edinburgh Math. Soc. 41 (1923), 82-93.

[6] T.M. M a c R o b e r t : On an asymptotic expansion of the hypergeometric function. Proc. Edinburgh Math. Soc. 42 (1923), 84-87.

[7] O. P e r r o n : Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter I, II. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 7 no. 9 (1916) und 8 no. 1 (1917).

[8] F.G. T r i c o m i , A, E r d é l y i : The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions,,Pacific J. Math. 1 (1951), 133-142.

[9] E. W a g n e r : Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a,b;c;z)$ für $|a| \to \infty$ und konstante b,c,z. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 213-226.

[10] E. W a g n e r : Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktion für große Parameter unterschiedlicher Größenordnung, Z. Anal. Anw. 5 (3) (1986), 265-276.

[11] E. W a g n e r : Zur Asymptotik der hypergeometrischen Funktionen für große Parameterwerte, Wiss. Z. Univ. Halle XXXIV'85 M, H.4 (1985), 38-42.

[12] G.N. W a t s o n : Asymptotic expansions of hypergeometric functions, Trans. Cambridge Philosophical Soc. 22 (1918), 277-308.

SEKTION MATHEMATIK DER MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT,
DDR-4020 HALLE/S.
Received July 29, 1986.