

Józef Sidorowicz

„ТЕПЛОВАЯ ДИФРАКЦИЯ“ НА ГЛАДКОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

1. Цель работы - получить второй член асимптотики логарифма переходной плотности $p^{\pm}(t, x, y)$ двумерного винеровского процесса w_t во внешности гладкой строго выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$. На языке дифференциальных уравнений речь идет о фундаментальном решении задач

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p^{\pm}}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_x p^{\pm}, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ p^{\pm}(0, x, y) = \delta(x-y), \\ p^-(t, x, y) = 0, \\ \frac{\partial p^+}{\partial n_x}(t, x, y) = 0, & x \in \partial D, \end{cases}$$

где n_x внешняя нормаль к ∂D в точке x .

Аналогичная задача для внешности многоугольника решена в [1].

В дальнейшем считается, что $t \rightarrow 0$, точки x и y фиксированы и находятся в зоне "глубокой тени" в том смысле, что отрезок $[x, y]$ пересекает область D . Кроме того, мы будем предполагать, что кратчайший путь γ_{xy} соединяющий x и y по внешности области D единственен. Этот путь, очевидно, состоит из двух прямолинейных отрезков $[x, A_1]$, $[A_2, y]$ и дуги $\widetilde{A_1 A_2} \subset \partial D$ (см. рис.1). Пусть

$$\rho(x, y) = |\gamma_{xy}| = |xA_1| + |\widetilde{A_1 A_2}| + |A_2 y| = a+b+c.$$

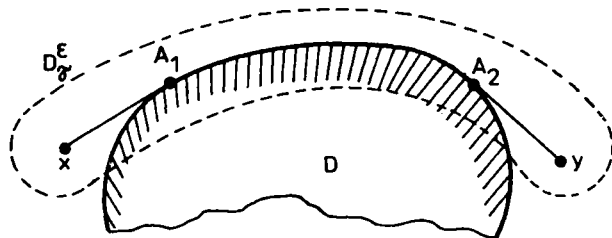


Рис. 1

Из грубой оценки Варадана [2] (см. также [3]) следует, что

$$-2t \ln p^+(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \rho^2(x, y) \quad *)$$

и что асимптотика p^+ при $t \rightarrow 0$ с экспоненциально высокой точностью сохранится, если мы рассмотрим задачу (1) не в $R^2 \setminus D$ а в некоторой ϵ -окрестности D_γ^ϵ пути γ_{xy} с нулевыми условиями на $\partial D_\gamma^\epsilon \cap (R^2 \setminus D)$. Более того, мы можем (с той же точностью) перейти от области D_γ^ϵ снова к R^2 как угодно мало изменив оператор Δ вне области D_γ^ϵ .

Введём в D_γ^ϵ новую систему координат, полугеодезическую по отношению к пути $\gamma_{xy}(u)$, $0 \leq u \leq \rho(x, y)$, где u - натуральный параметр вдоль γ_{xy} . Одна из координат u , а вторая v - евклидово расстояние по нормали к γ_{xy} . Если $\tau(u)$ и $\nu(u)$ - единичные векторы, касательный и нормальный к $\gamma_{xy}(u)$ в точке u , то для любого $z \in D_\gamma^\epsilon$ имеет место представление $z = \gamma_{xy}(u) - \nu n(u)$. Отсюда по формуле Френе $dz = \tau(u)du - dv\nu(u) + k(u)\tau(u)vdu$ и, тем самым, $dz^2 = [1 + k(u)v]^2 du^2 + dv^2$, где $k(u)$ - кривизна дуги $A_1 A_2$. Тогда по известным формулам [4] оператор Δ в координатах (u, v) примет вид

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{[1 + k(u)v]^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{k(u)}{1 + k(u)v} \frac{\partial}{\partial v}.$$

*) Здесь $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \psi(t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = 1$.

Как правило, функция $k(u)$ разрывна в точках A_1 ($u = |xA_1| = a$), A_2 ($u = |xA_1| + |A_1A_2| = a + b$). Область D_γ^ε и путь $\gamma_{xy}(u)$ в координатах (u, v) имеют простой вид (см. рис. 2).

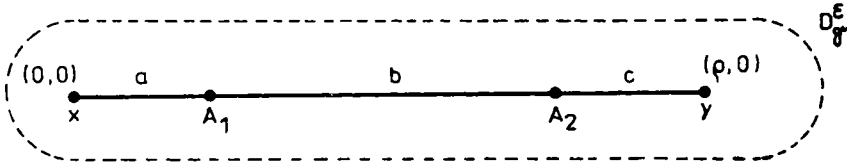


Рис. 2

В уравнении (1) оператор Δ заменяется на $\bar{\Delta}$; очевидные изменения происходят и с граничными условиями.

2. Проведём теперь эскиз рассуждений, которые позволят правильно записать ответ.

Как показывает опыт изучения задач такого типа [3] (и что легко обосновать непосредственно) "переносный" член

$$\frac{k(u)}{1 + k(u)v} \frac{\partial}{\partial(u)}$$

может сказаться только на постоянных множителях в асимптотике $p^\pm$ и он может быть учтён с помощью формул абсолютно непрерывной замены меры на заключительном этапе решения. Поэтому мы можем ограничиться решением задачи

$$(2) \quad \frac{\partial p^\pm}{\partial t} = \bar{\Delta} p^\pm = \frac{1}{[1 + k(u)v]^2} \frac{\partial^2 p^\pm}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p^\pm}{\partial v^2}.$$

У процесса (u_t, v_t) с производящим оператором (2) вторая компонента - винеровский процесс. Поскольку, согласно [2] и [3], условный процесс $\hat{w}_s, s \leq t$ при условиях $w_0 = x, w_t = y$ и $t \rightarrow 0$ движется приближённо детерминировано вдоль пути γ_{xy} со скоростью $\rho(x, y)/t$, то естественно надеяться, что в (2) имеем

$$(3) \quad p^\pm(t, (0,0), (\rho(x,y), 0)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} p_1^\pm(t, 0, 0) p_2^\pm(t, 0, \rho(x,y)),$$

где $p^{\pm}(t, 0, 0)$ - плотность вероятностей для одномерного винеровского процесса $w_1(s)$ перехода из 0 в 0 за время t при условиях:

(H^-) для p^- : $w_1(s) > 0$ при $s \in [at/\rho, (a+b)t/\rho]$,

(H^+) для p^+ : $w_1(s) \geq 0$ при $s \in [at/\rho, (a+b)t/\rho]$

и испытывает упругие отражения в точке 0.

Что касается $p_2^{\pm}(s, u, \rho)$, то это фундаментальное решение задачи

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_2^{\pm}}{\partial s} + \left[1 + k\left(\frac{s\rho}{t}\right) \hat{w}_1(s) \right]^{-2} \frac{\partial^2 p_2^{\pm}}{\partial u^2} = 0, & s \leq t, \\ p_2^{\pm}(t, u, \rho) = \delta(u - \rho), & u \in \mathbb{R}^1, \end{cases}$$

где $\hat{w}_1(s)$ - условный винеровский процесс ($\hat{w}_0 = \hat{w}_t = 0$) по по второй координате при условиях (H^-), (H^+) для p^- и p^+ соответственно. Это так называемая конструкция косого произведения.

Задача (4) имеет независимые от u коэффициенты и легко решается преобразованием Фурье по u . Пологая

$$A(s) = \left[1 + k \frac{s\rho}{t} \hat{w}_1(s) \right]^{-2},$$

получим

$$(5) \quad p_2^{\pm}(t, 0, \rho(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_0^t A(s) ds}} \exp \left[-\frac{\rho^2(x, y)}{2 \int_0^t A(s) ds} \right].$$

Поскольку $\hat{w}_1(s)$, $s \leq t$, есть величина порядка $O(\sqrt{t})$, то (после замены $s = t\delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\hat{w}_{\delta t}/\sqrt{t} = \hat{\hat{w}}_{\delta}$)

$$\int_0^t A(s) ds = t \int_0^1 \left[1 + k(\delta\rho) \sqrt{t} \hat{\hat{w}}_{\delta} \right]^{-2} d\delta =$$

$$\begin{aligned}
 &= t \frac{a+b}{\rho} + t \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[1 + k(\delta\rho) \sqrt{t} \hat{w}_\delta \right]^{-2} d\delta = \\
 &= t - 2 \sqrt{t} t \int_{\delta_1}^{\delta_2} k(\delta\rho) \hat{w}_\delta d\delta + o(t^2),
 \end{aligned}$$

где $\delta_1 = a/\rho$, $\delta_2 = (a+b)/\rho$. Откуда

$$(6) \quad p_2^+(t, 0, \rho) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} M \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} - \frac{\rho^2}{\sqrt{t}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} k(\delta\rho) \hat{w}_\delta d\delta \right],$$

где $\hat{w}_\delta$ условный процесс, переходящий из 0 в 0 за время $\delta = 1$ и удовлетворяющий на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$ условиям типа (H^-) , (H^+) соответственно.

Поскольку, как легко показать,

$$p^+(t, 0, 0) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{c^+}{\sqrt{2\pi t}},$$

то из формул (3), (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned}
 (7) \quad p^+(t, (0, 0), (0, \rho)) &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{c^+}{2\pi t} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} \right] \times \\
 &\times M \exp \left[-\frac{\rho^2}{\sqrt{t}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} k(\delta\rho) \hat{w}_\delta d\delta \right].
 \end{aligned}$$

Пусть $\xi_1 = \xi_{\delta_1}$ и $\xi_2 = \xi_{\delta_2}$ состояния процесса $\hat{w}_\delta$ в моменты δ_1 и δ_2 соответственно. Распределения этих величин легко найти. Тогда

$$M \exp \left[-\frac{\rho^2}{\sqrt{t}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} k(\delta\rho) \hat{w}(\delta) d\delta \right] =$$

$$= M_{\xi_2} \left\{ M_{\xi_1} \exp \left[- \frac{\rho^2}{\sqrt{t}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} k(\delta \rho) w^+(\delta) d\delta \right] \right|_{w_{\delta_2}^+ = \xi_2} \right\}.$$

Для нахождения этого среднего (согласно формуле Каца-Феймана) мы должны решить параболическую задачу для функции $q(\delta_1, \delta, u, \xi_2)$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial q^{\pm}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\pm}}{\partial u^2} - \frac{\rho^2 k(\delta \rho)}{\sqrt{t}} u q^{\pm} = 0, & \delta \in [\delta_1, \delta_2], \quad u \geq 0, \\ q^{\pm}(\delta_1, \delta_2, u, \xi_2) = \delta(u - \xi_2), \quad q^-|_{u=0} = 0, \quad \frac{\partial q^+}{\partial u}|_{u=0} = 0 \end{cases}$$

и взять её значение при $\delta = \delta_2$, $u = \xi_1$. Это задача на полусоси с линейным потенциалом. Если бы последний не зависел от времени, тогда решение выражалось бы через функции Эйри. Зависимость от времени δ и малый параметр t создают дополнительные трудности.

3. Возникшие трудности в задаче (8) могут быть преодолены с помощью следующей леммы:

Л е м м а . Если функция $h(s)$ кусочно-непрерывна и ограничена с двух сторон положительными постоянными на отрезке $[0, t]$, то при фиксированном t и $\varepsilon \rightarrow 0$ фундаментальное решение задачи

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial q^{\pm}}{\partial s}(s, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^{\pm}}{\partial x^2}(s, x, y) - \frac{h(s)}{\varepsilon} x q^{\pm}(s, x, y), & s \leq t, \\ q^{\pm}(0, x, y) = \delta(x-y), \quad q^-|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial q^+}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

имеет асимптотику

$$q_{\varepsilon}^{\pm}(s, x, y) \sim \left[\frac{2h(s)}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{3}} \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2h(0)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x \right) \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2h(s)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} y \right) \left[\frac{h(s)}{h(0)} \right]^{\frac{1}{3} C_0^+} \times \\ \times \exp \left[-(2\varepsilon^2)^{-\frac{1}{3}} \lambda_1^{\pm} \int_0^s h^{\frac{2}{3}}(\tau) d\tau \right],$$

где $-\lambda_1^{\pm}$ - самый правый ноль функции Эйри

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left(tx - \frac{t^3}{3} \right) dt,$$

$$\hat{y}_1^{\pm} = \frac{v(x - \lambda_1^{\pm})}{\|v(x - \lambda_1^{\pm})\|_{L_2}}^{*})$$

и $C_0^{\pm}$ - некоторое постоянное число.

Доказательство производится по нескольким этапам. Сначала по методу Фурье решаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial q^{\pm}}{\partial s} = \frac{\partial^2 q^{\pm}}{\partial x^2} - xq^{\pm}, & s \leq t, \\ q^{\pm}(0, x, y) = \delta(x-y), & q^-(t, 0, y) = 0, \quad \frac{\partial q^+}{\partial x}(t, 0, y) = 0 \end{cases}$$

и получаем результат

$$q^{\pm}(s, x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^{\pm} s} \hat{y}_i^{\pm}(x) \hat{y}_i^{\pm}(y),$$

где $\lambda_i^{\pm}$ и $y_i^{\pm}$ собственные значения и нормированные собственные функции спектральной задачи

$$-\frac{d^2 y^{\pm}}{dx^2} + xy^{\pm} = \lambda y^{\pm}, \quad y^-(0) = 0, \quad \frac{dy^+}{dx}(0) = 0.$$

*) Как обычно, $\|\cdot\|_{L_2}$ - норма в пространстве L_2

(Заметим, что собственные функции $y_1^\pm$ вычисляются с помощью функции Эйри $v(x)$, т.е.

$$y_1^\pm(x) = v(x - \lambda_1^\pm), \quad \hat{y}_1^\pm = \frac{y_1^\pm}{\|y_1^\pm\|_{L_2}}.$$

Затем, решая задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial q^\pm}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q^\pm}{\partial x^2} - h x q^\pm, & s \leq t \\ q^\pm(0, x, y) = \delta(x-y), & q^-(t, 0, y) = 0, \quad \frac{\partial q^+}{\partial x}(t, 0, y) = 0, \end{cases}$$

получим

$$q^\pm(s, x, y) = (2h)^{\frac{1}{3}} \hat{y}_1^\pm \left((2h)^{\frac{1}{3}} x \right) \hat{y}_1^\pm \left((2h)^{\frac{1}{3}} y \right) \times \\ \times \exp \left[-2^{-\frac{1}{3}} \lambda_1^\pm \frac{2}{3} s \right] [1 + o(e^{-\gamma s})],$$

где γ некоторое положительное число. (Заметим, что для $\hat{y}_1^\pm(\cdot) > 0$ $x, y > 0$).

Сейчас, решаем задачу (9). Для этого введём разбиение отрезка $[0, s]$ на отрезки $\Delta s_i = \frac{s}{n}$, $i=1, 2, \dots, n$. Пусть

$$h(\xi_i) = h_i, \quad \xi_i \in [s_{i-1}, s_i].$$

Применяя формулу Колмогорова-Чепмена, получим (равномерно по t) при $s \leq t$, $\varepsilon \rightarrow 0$, что

$$q_\varepsilon^\pm(s, x, y) \sim \prod_{i=1}^n \left(\frac{2h_i}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_i}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x \right) \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_i}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x_1 \right) \times \\ \times \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x_1 \right) \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x_2 \right) \dots \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_n}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x_{n-1} \right) \times \\ \times \hat{y}_1^\pm \left(\left(\frac{2h_n}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} y \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \exp \left(-2^{-\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \lambda_1^\pm \sum_{i=1}^n h_i^{\frac{2}{3}} \Delta s_i \right)$$

или же

$$q_{\varepsilon}^{\pm}(s, x, y) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \left[\frac{2h(s)}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{3}} \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2h(0)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} x \right) \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2h(s)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} y \right) \times$$

$$\times \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^{\infty} \hat{y}_1^{\pm}(z_i) \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{\frac{1}{3}} z_i \right) dz_i \right\} \exp \left(-2^{-\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \lambda_1^{\pm} \int_0^s h^{\frac{2}{3}}(s) ds \right)$$

где $(2h_1/\varepsilon)^{\frac{1}{3}} x_1 = z_1$.

Наконец, произведение интегралов в этой формуле даёт результат

$$\left[\frac{h(s)}{h(0)} \right]^{\frac{1}{3} c_0^{\pm}}.$$

А это уже завершает доказательство леммы.

4. На основании леммы задача (8) при $\delta = \delta_2$, $u = \xi_1$ имеет решение

$$(10) \quad q^{\pm}(\delta_1, \delta_2, \xi_1, \xi_2) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \left[\frac{2\rho^2 k(\delta_2 \rho)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{3}} \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2\rho^2 k(\delta_1 \rho)}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{3}} \xi_1 \right) \times$$

$$\times \hat{y}_1^{\pm} \left(\left(\frac{2\rho^2 k(\delta_2 \rho)}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{3}} \xi_2 \right) \left[\frac{k(\delta_2 \rho)}{k(\delta_1 \rho)} \right]^{\frac{1}{3} c_0^{\pm}} \times$$

$$\times \exp \left[-\lambda_1^{\pm} \left(\frac{\rho^4}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} k^{\frac{2}{3}}(\delta \rho) d\delta \right].$$

Учитывая формулу (7) и (10) и пренебрегая в логарифмическом приближении членами более низкого порядка получим окончательный результат.

Т е о р е м а . Если точки x и y находятся в зоне глубокой тени по отношению к гладкой строго выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и кратчайший путь γ_{xy} соединяющий точки x и y по внешности области D единственен, то при перечисленных выше обозначениях для ρ , $\lambda_1^\pm$, a , b , $k(u)$ имеем при $t \rightarrow 0$

$$\ln p^\pm(t, x, y) = -\frac{\rho^2}{2t} - \frac{\lambda_1^\pm \sqrt[3]{\rho}}{\sqrt[3]{2t}} \int_a^{a+b} k^{\frac{2}{3}}(u) du + o\left(t^{-\frac{1}{3}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С.А. Молчанов, J. Sidorowicz: Тепловая дифракция на многоугольнике, *Demonstratio Math.* 16 (1983) 581-599.
- [2] S.R.S. Varadhan: On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967), 431-455.
- [3] С.А. Молчанов: Диффузионные процессы и риманова геометрия, *Uspechi Mat. Nauk* 30 (1975) 3-59.
- [4] П.К. Рашевский: Риманова геометрии и тензорный анализ. Москва, 1967 г.
- [5] К. Ито, Г. Маккин: Диффузионные процессы и их траектории. Москва 1968.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY,
75-620 KOSZALIN, POLAND

Received January 9, 1984.