DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XVIII No 2 1985

Krzysztof Tatarkiewicz

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE FOURIER

1. Des résultats (d'un assez grand degré de généralité) concernant les propriétés limites pour $t \to +\infty$ des solutions du premier problème de Fourier dans $D \times \langle 0;+\infty)$, où $D \subset R_n$, sont bien connus (voir I. Łojczyk-Królikiewicz [3] où une bibliographie est donnée; pour des résultats récents voir - par exemple - [1] ou [4]).

Cette note est consacrée à une nouvelle démonstration d'un cas particulier du théorème 4 de [3]. Elle est beaucoup plus élémentaire que la démonstration primitive. Ce n'est que pour abréger les calculs que nous ne considérons ci-dessous que le cas de deux variables spaciales et D égal à un rectangle (voir aussi le n° 4 ci-dessous). La méthode employée est apparentée à la méthode de Bellman [2] (mais dans ce dernier travail on emploie les séries complexes de Fourier et on ne s'occupe que du cas où la solution considérée tend vers zéro).

2. Posons $K := \langle 0;l\rangle \times \langle 0;k\rangle$ où $l,k \in (0;+\infty)$. Soient 5 fonctions: $g : K \to R$, $\bar{a}_i : \langle 0;l\rangle \times \langle 0;+\infty) \to R$, $\bar{b}_i : \langle 0;k\rangle \times \langle 0;+\infty) \to R$, $i = 0,1$, qui vérifient les conditions suivantes de compatibilité

$$(2.1)\qquad \begin{array}{ll} \bar{a}_0(0,t) = \bar{b}_0(0,t), & \bar{a}_0(l,t) = \bar{b}_1(0,t) \\ \bar{a}_1(0,t) = \bar{b}_0(k,t), & \bar{a}_1(l,t) = \bar{b}_1(k,t) \end{array} \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0;+\infty)$$

et

$$(2.2)\qquad \begin{matrix} g(x,0) = \bar{a}_0(x,0), & g(x,k) = \bar{a}_1(x,0) & \text{pour} & x \in \langle 0;1\rangle, \\ g(0,y) = \bar{b}_0(y,0), & g(1,y) = \bar{b}_1(y,0) & & y \in \langle 0;k\rangle. \end{matrix}$$

Soit une fonction $u = u(x,y,t)$ définie et continue dans $P := K \times \langle 0;+\infty)$, de classe C^2 dans l'intérieur $I'P = (0;1)\times(0;k)\times(0;\infty)$ de P, et vérifiant dans $I'P$ l'équation parabolique

$$(2.3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

pour $(x,y) \in K$ la condition initiale

$$(2.4)\qquad u(x,y,0) = g(x,y)$$

et pour tous les $t \in \langle 0;+\infty)$ les conditions aux limites

$$(2.5)\qquad \begin{matrix} u(x,0,t) = \bar{a}_0(x,t), & u(x,k,t) = \bar{a}_1(x,t) & \text{pour} & x \in \langle 0;1\rangle, \\ u(0,y,t) = \bar{b}_0(y,t), & u(1,y,t) = \bar{b}_1(y,t) & & y \in \langle 0;k\rangle. \end{matrix}$$

Il est connu que si les fonctions $g, \bar{a}_i, \bar{b}_i$, $i = 0,1$, sont continues et satisfont aux conditions (2.1) et (2.2), alors le premier problème de Fourier (2.3)-(2.5) est bien posé.

Soient maintenant 4 fonctions $a_i : \langle 0;1\rangle \to R$, $b_i : \langle 0;k\rangle \to R$, $i = 0,1$, telles que

$$(2.6)\qquad \begin{matrix} a_0(0) = b_0(0), & a_0(1) = b_1(0), \\ a_1(0) = b_0(k), & a_1(1) = b_1(k). \end{matrix}$$

Soit une fonction $w = w(x,y)$ définie et continue dans K, de classe C^2 dans $I'K$, qui vérifie dans $I'K$ l'équation elliptique

$$(2.7)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

et les conditions aux limites

$$(2.8)\qquad \begin{matrix} w(x,0) = a_0(x), & w(x,k) = a_1(x) \\ w(0,y) = b_0(y), & w(1,y) = b_1(y) \end{matrix} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} x \in \langle 0;1\rangle, \\ y \in \langle 0;k\rangle. \end{matrix}$$

Il est connu que si les fonctions a_i, b_i, $i = 0,1$, sont continues et vérifient les conditions (2.6), alors le problème de Dirichlet (2.7), (2.8) est bien posé.

Théorème. Si les fonctions $g, \bar{a}_i, \bar{b}_i$, $i = 0,1$, sont continues, vérifient les conditions (2.1), (2.2) et les quatre limites uniformes

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname*{unif}\limits_{x\in\langle 0;1\rangle} \bar{a}_i(x,t) = a_i(x), \\ \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname*{unif}\limits_{y\in\langle 0;k\rangle} \bar{b}_i(y,t) = b_i(y) \end{cases} \qquad i = 0,1$$

existent, alors le premier problème de Fourier (2.3)-(2.5) est bien posé et sa solution (unique) $u = u(x,y,t)$ possède la limite uniforme

$$(2.10)\qquad \lim_{t\to+\infty} \operatorname*{unif}_{(x,y)\in K} u(x,y,t) = w(x,y),$$

où $w = w(x,y)$ est la solution (unique) du problème bien posé de Dirichlet (2.7) et (2.8).

3. **Démonstration.** Vu (2.9), les fonctions $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $i = 0,1$, étant continues, sont bornées. Donc les conditions (2.1) et (2.2) étant vérifiées, le problème (2.3)-(2.5) est bien posé. Les fonction $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $i = 0,1$, étant continues, de même de (2.9) il s'ensuit que les fonctions a_i, b_i, $i = 0,1$, le sont aussi et vérifient les conditions (2.6). Donc le problème (2.7) et (2.8) est bien posé.

Il ne nous reste qu'à démontrer l'égalité (2.10).

Soit un $\varepsilon > 0$ fixe. Il s'ensuit de (2.9) qu'il existe un $t_\varepsilon > 0$ tel que pour $t \geq t_\varepsilon$ et pour $i = 0,1$ on a

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} |\bar{a}_i(x,t) - a_i(x)| &\leqslant \varepsilon \\ |\bar{b}_i(y,t) - b_i(y)| &\leqslant \varepsilon \end{aligned} \quad \text{pour} \quad \begin{aligned} &x \in \langle 0;1\rangle, \\ &y \in \langle 0;k\rangle. \end{aligned}$$

Soit $w = w_\varepsilon(x,y)$ la fonction définie et continue dans K, de classe C^2 dans $I'K$, vérifiant (2.7) dans cet ensemble $I'K$ et telle que

$$(3.2)\quad \begin{cases} w_\varepsilon(x,0) = u(x,0,t_\varepsilon) = \bar{a}_0(x,t_\varepsilon) =: a_0^\varepsilon(x) \\ w_\varepsilon(x,k) = u(x,k,t_\varepsilon) = \bar{a}_1(x,t_\varepsilon) =: a_1^\varepsilon(x) \end{cases} \text{pour } x \in \langle 0;1\rangle,$$
$$\qquad\quad \begin{cases} w_\varepsilon(0,y) = u(0,y,t_\varepsilon) = \bar{b}_0(y,t_\varepsilon) =: b_0^\varepsilon(y) \\ w_\varepsilon(1,y) = u(1,y,t_\varepsilon) = \bar{b}_1(y,t_\varepsilon) =: b_1^\varepsilon(y) \end{cases} \text{pour } y \in \langle 0;k\rangle.$$

Les fonctions a_i^ε, b_i^ε, $i = 0,1$, étant continues et - vu (2.1) - telles que

$$a_0^\varepsilon(0) = b_0^\varepsilon(0),\ a_0^\varepsilon(1) = b_1^\varepsilon(0),\ a_1^\varepsilon(0) = b_0^\varepsilon(k),\ a_1^\varepsilon(1) = b_1^\varepsilon(k),$$

le problème (2.7), (3.2) est bien posé, donc une telle fonction $w = w_\varepsilon(x,y)$ existe et elle est déterminée univoquement. En plus elle dépend d'une façon continue de ses conditions aux limites et elle est de classe C^∞ dans $I'K$.

Posons $\bar{g}_\varepsilon(x,y) := u(x,y,t_\varepsilon) - w_\varepsilon(x,y)$. La fonction $\bar{g}_\varepsilon$ est donc définie et continue dans K, de classe C^∞ dans $I'K$ et s'annule sur la frontière $\partial' K$ de K. Malheuresement - sous nos suppositions - elle peut ne pas être de classe C^3 dans le rectangle K entier. Cependant il existe alors une fonction $C^3 \ni g_\varepsilon : K \longrightarrow R$, telle que

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x,0) &= 0 = g_\varepsilon(x,k) \\ g_\varepsilon(0,y) &= 0 = g_\varepsilon(1,y) \end{aligned} \quad \text{pour} \quad \begin{aligned} &x \in \langle 0;1\rangle, \\ &y \in \langle 0;k\rangle \end{aligned}$$

et

$$(3.3)\qquad |g_\varepsilon(x,y) - \bar{g}_\varepsilon(x,y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad (x,y) \in K.$$

Posons $P(t) := K \times \langle t;+\infty)$ (on a évidemment $P(0) = P$). Considérons la fonction $C^0 \ni v_\varepsilon : P(t_\varepsilon) \longrightarrow R$ de classe C^2 dans $I'P(t_\varepsilon)$ qui vérifie l'équation (2.3) dans $I'P(t_\varepsilon)$, la condition

$$v_\varepsilon(x,y,t_\varepsilon) = g_\varepsilon(x,y) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in K$$

et pour tous les $t \in \langle t_\varepsilon ;+\infty)$ les conditions

$$\begin{matrix} v_\varepsilon(x,0,t) = 0 = v_\varepsilon(x,k,t) \\ v_\varepsilon(0,y,t) = 0 = v_\varepsilon(1,y,t) \end{matrix} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} x \in \langle 0,1\rangle, \\ y \in \langle 0,k\rangle. \end{matrix}$$

Les conditions de compatibilité étant ici vérifiées, une telle fonction v_ε existe, est déterminée univoquement et - en plus - est de classe C^∞ dans $I' P(t_\varepsilon)$.

La fonction g_ε est de classe C^3. Il s'ensuit (voir - par exemple - Tonelli [5], p. 468) que pour tous les $(x,y) \in K$ nous avons

$$(3.4) \qquad g_\varepsilon(x,y) = \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} c^\varepsilon_{\nu\mu} \sin\frac{\pi\nu x}{1} \sin\frac{\pi\mu y}{k},$$

où pour $\nu, \mu = 1,2,\ldots$ nous avons posé

$$c^\varepsilon_{\nu\mu} := \frac{4}{1k}\int_0^1\int_0^k g_\varepsilon(x,y) \sin\frac{\pi\nu x}{1} \sin\frac{\pi\mu y}{k}\, dy\, dx.$$

Nous avons supposé que $g_\varepsilon \in C^3$. On peut alors démontrer facilement que la série double

$$(3.5) \qquad h^\varepsilon := \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} \left|c^\varepsilon_{\nu\mu}\right|$$

converge, donc la série double (3.4) converge absolument et uniformément. Il s'ensuit de (3.5) que la série double

$$v^d_\varepsilon(x,y,t) := \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} c^\varepsilon_{\nu\mu} \sin\frac{\pi\nu x}{1} \sin\frac{\mu\pi y}{k} \times$$
$$\times \exp\left\{-\pi^2\left[\frac{\nu^2+d}{1^2}+\frac{\mu^2+d}{k^2}\right](t-t_\varepsilon)\right\}$$

converge uniformement (et absolutment) dans l'ensemble $P(t_\varepsilon)$ pour chaque $d \geqslant 0$ (et même pour chaque $d \in R$). Donc la fonction v_ε^d est pour chaque $d \geqslant 0$ continue dans $P(t_\varepsilon)$.

Évidemment les fonctions v_ε^d vérifient la condition initiale

$$(3.6) \qquad v_\varepsilon^d(x,y,t_\varepsilon) = g_\varepsilon(x,y) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in K$$

et pour tous les $t \in \langle t \;;+\infty)$ les conditions aux limites

$$(3.7) \qquad \begin{matrix} v_\varepsilon^d(x,0,t) = 0 = v_\varepsilon^d(x,k,t) \\ v_\varepsilon^d(0,y,t) = 0 = v_\varepsilon^d(1,y,t) \end{matrix} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} x \in \langle 0;1\rangle, \\ y \in \langle 0;k\rangle. \end{matrix}$$

Il est bien connu que la fonction v_ε^0 présente dans $P(t_\varepsilon)$ la solution du problème de Fourier (2.3), (3.6), (3.7), donc - ce problème étant bien posé - nous avons $v_\varepsilon^0 = v_\varepsilon$. Posons

$$q(t) := \exp\left[-\pi^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}\right)(t - t_\varepsilon)\right].$$

Admettons

$$\tilde{t}_\varepsilon := t_\varepsilon + \frac{1^2k^2}{\pi^2(1^2+k^2)} \ln\frac{h^\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \bar{t}_\varepsilon := \max\left[t_\varepsilon, \tilde{t}_\varepsilon\right].$$

Nous avons $q(\tilde{t}_\varepsilon) = \varepsilon : h^\varepsilon$. La fonction $q = q(t)$ décroît d'une façon monotone, donc pour $t \geqslant \bar{t}_\varepsilon > 0$ nous avons

$$(3.8) \qquad \left|v_\varepsilon(x,y,t)\right| = \left|v_\varepsilon^0(x,y,t)\right| = \left|v_\varepsilon^1(x,y,t)\right| \cdot q(t) \leqslant \\ \leqslant h^\varepsilon q(t) \leqslant h^\varepsilon q(\tilde{t}_\varepsilon) = \varepsilon.$$

Enfin posons

$$(3.9) \qquad r(x,y,t;\varepsilon) := u(x,y,t) - w(x,y) - v_\varepsilon(x,y,t).$$

La fonction $w = w(x,y) := w(x,y,t)$ vérifiant (2.7) vérifie (2.3) aussi, donc les fonctions

$$u = u(x,y,t), \quad w = w(x,y) = w(x,y,t), \quad v = v_\varepsilon(x,y,t)$$

et, l'équation (2.3) étant linéaire et homogène, la fonction $r = r(x,y,t,\varepsilon)$ vérifie aussi cette équation (2.3). Cette dernière fonction vérifie aussi pour tous les $(x,y) \in K$ la condition (initiale)

$$r(x,y,t_\varepsilon;\varepsilon) = u(x,y,t_\varepsilon) - w(x,y) - v_\varepsilon(x,y,t_\varepsilon) =$$

$$= \left[w_\varepsilon(x,y) - w(x,y)\right] + \left[\bar{g}_\varepsilon(x,y) - g_\varepsilon(x,y)\right].$$

De (3.1) pour $t = t_\varepsilon$, (3.2), (2.8) et du théorème bien connu sur les extrema des solutions des équations elliptiques nous aurons $|w_\varepsilon(x,y) - w(x,y)| \leqslant \varepsilon$ pour $(x,y) \in K$. Vu (3.3), il s'ensuit

$$|r(x,y,t_\varepsilon;\varepsilon)| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad (x,y) \in K.$$

Considérons la condition aux limites

$$r(x,0,t;\varepsilon) = u(x,0,t) - w(x,0) - v_\varepsilon(x,0,t) = \bar{a}_0(x,t) - a_0(x);$$

on a donc

$$|r(x,0,t;\varepsilon)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in \langle 0;1\rangle \quad \text{et} \quad t \geqslant t_\varepsilon \geqslant 0.$$

De même, nous aurons

$$|r(x,k,t;\varepsilon)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in \langle 0;1\rangle \quad \text{et} \quad t \geqslant t_\varepsilon \geqslant 0,$$

$$|r(0,y,t;\varepsilon)| \leqslant \varepsilon, \quad |r(1,y,t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad y \in \langle 0;k\rangle \quad \text{et} \quad t \geqslant t_\varepsilon.$$

Vu le théorème sur les extrema des solutions des équations paraboliques, il s'ensuit

$$\sup_{(x,y,t)\in P(t_\varepsilon)} |r(x,y,t;\varepsilon)| =$$

$$= \max\left[\sup_{(x,y)\in K} |r(x,y,t_\varepsilon;\varepsilon)|, \sup_{\substack{t\in\langle t_\varepsilon;+\infty) \\ (x,y)\in\partial' K}} |r(x,y,t;\varepsilon)|\right] \leqslant 2\varepsilon.$$

Vu (3.8) et (3.9), il s'ensuit que pour $t \geqslant \bar{t}_\varepsilon \geqslant 0$ et pour $(x,y) \in K$ on a

$$|u(x,y,t) - w(x,y)| \leqslant |r(x,y,t;\varepsilon)| + |v_\varepsilon(x,y,t)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $t(\varepsilon) := \bar{t}_{\varepsilon/3} \geqslant 0$ tel que si $t \geqslant t(\varepsilon)$ et $(x,y) \in K$, alors $|u(x,y,t) - w(x,y)| \leqslant \varepsilon$, et la formule (2.10) est vraie, ce qui achève notre démonstration.

4. On peut facilement élargir le champs d'application de notre méthode de démonstration. À la place du rectangle K on peut introduire (à l'aide des transformations conformes) un ensemble homéomorphe à K. On peut l'appliquer non seulement à l'équation (2.3) à deux variables spaciales, mais aussi aux équations $\Delta u = u_t$ à $n \geqslant 1$ quelconque de variables spaciales (il faut alors définir la fonction g_ε de manière qu'elle soit de classe C^{n+1}) et même aux équations qui se laissent transformer dans l'équation $\Delta u = u_t$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A r o s i o : Asymptotic behaviour as $t \to +\infty$ of solutions of linear parabolic equations with discontinuous coefficients in a bounded domain, Comm. Partial Differential Equations 4 (1979) 769-794.

[2] R. B e l l m a n : On the existence and behaviour of nonlinear partial differential equations of parabolic type, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948) 21-44.

[3] I. Ł o j c z y k - K r ó l i k i e w i c z : Propriétés limites des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation presque linéaire du type parabolique, Bull. Acad. Sci., Sér. Sci. Math., Astr., Phys. 8 (1960) 587-603.

[4] R.H. Martin jr.: Asymptotic stability and critical points for nonlinear quasimonotone parabolic systems, J. Differential Equations 30 (1978) 391-432.
[5] L. Tonelli: Serie trinonometriche. Bologna 1928.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW,
00-901 WARSZAWA
Received October 12, 1983.