DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XVI No 2 1983

Cz. Burniak, Z. Lewandowski, J. Pituch

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE HOMOTOPIQUE ET D'UN CRITÈRE D'UNIVALENCE DANS LA CLASSE DES FONCTIONS CONVEXES VERS L'AXE IMAGINAIRE

1. Désignons par S_0 la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans $E = E_1$, où $E_r = \{z : |z| < r\}$, et soit $S \subset S_0$ la classe des fonctions de la forme $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, $z \in E$.

Le domaine $D \neq \mathbb{C}$ est dit convexe vers l'axe imaginaire, si pour tout couple de points w_1, w_2 appartenant à ce domaine et tels que $\operatorname{re} w_1 = \operatorname{re} w_2$ le segment d'extrémités w_1, w_2 est contenu dans D.

Soit T la classe de ces domaines. Posons encore

$$J_0 = \{f \in S_0 : f(E) \in T\}, \quad J = \{f : f \in J_0 \cap S\}.$$

Robertson [6] a donné en 1936 une condition à laquelle satisfont les fonctions de la classe J qui vérifient alternativement certaines hypothèses supplémentaires. Ce résultat peut être énoncé comme il suit.

Théorème 1.1. Supposons que $f \in S$ satisfait à l'une des conditions

(a) $f \in J$ et f est holomorphe dans $\bar{E} = E \cup \partial E$,

(b) il existe un δ, $0 < \delta = \delta(f)$, tel que $f(E_r) \in T$ pour $r \in (1-\delta; 1)$;

alors il existe des nombres réels μ, ν, $0 \leqslant \mu \leqslant \pi$, $0 \leqslant \nu \leqslant \pi$, tels que

$$(1.1) \quad \mathrm{re}\left\{-ie^{i\mu}(1 - 2\cos\vartheta\, e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)f'(z)\right\} \geqslant 0.$$

Dans le même travail [6] il a été aussi démontré que les fonctions holomorphes dans E, qui satisfont à la relation (1.1), sont univalentes dans E.

Hengartner et Schober [3] ont étudié en 1970 la classe J_0, en admettant une normalisation différente de celle qui a été adoptée dans [6]. Les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y ont été remplacées par la suivante: il existe des suites $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$, $n = 1,2,\ldots$, de points du cercle E telles que α) $z_n' \to 1$, $z_n'' \to -1$, ou β) $z_n' \to 1$, $z_n'' \to 1$, ou γ) $z_n' \to -1$, $z_n'' \to -1$, les relations

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{re}\, f(z_n') = \sup_{z\in E} \mathrm{re}\, f(z), \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{re}\, f(z_n'') = \inf_{z\in E} \mathrm{re}\, f(z)$$

ayant lieu dans chacun de ces cas. Les auteurs ont obtenu, dans le trois cas considérés, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f holomorphe dans E appartienne à la classe J_0. Ces conditions mènent à des cas particuliers de l'inégalité (1.1). Ce résultat a été établi sans utiliser les hypothèses restrictives (a) ou (b).

En profitant des résultats du travail [3] et en appliquant une transformation de Möbius convenable, Royster et Ziegler [7] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f holomorphe dans E appartienne à la classe J_0. Cette condition est identique à l'inégalité (1.1) pour $\mu \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [0,\pi]$. De même que dans [3], ces auteurs ont donné une interprétation géométrique des paramètres μ et ϑ. Le théorème principal établi dans [7] sera cité ici comme théorème 3.1.

Les démonstrations des théorèmes fondamentaux dans [3] sont difficiles et exigent une discussion de plusieurs cas pour chacune des variantes α), β) et γ); la démonstration in extenso n'y a été donnée que dans le cas α). Pour ne pas trop allonger le travail, les auteurs se sont bornés à indiquer la méthode utilisée dans la démonstration des autres cas.

Dans le présent travail nous allons démontrer le théorème 3.1 autrement que dans [7], c'est-à-dire sans en appeler au résultat de [3]. Notre méthode est différente de celle de [3]; elle est élémentaire, uniforme et consiste uniquement à appliquer les simples méthodes mentionnées dans le titre du travail: la méthode homotopique et une certaine condition suffisante d'univalence.

2. Avant de formuler et de démontrer le théorème 3.1 nous établirons dans ce chapitre quelques théorèmes dont nous profiterons dans la suite.

Théorème 2.1. Soit $\Phi(z,t) = a_1(t)z+a_2(t)z^2+\dots$ pour tout t fixé, $t\in[t_1,t_2]$, $t_1<t_2$, une fonction univalente dans E admettant pour tout $z\in E$ fixé une dérivée $\Phi'_t(z,t)$ continue dans l'intervalle $[t_1,t_2]$. Si pour tout couple de points $t,t'\in[t_1,t_2]$ tels que $t<t'$ on a $\Phi(E,t)\subset\Phi(E,t')$, l'inégalité suivante a lieu

$$(2.1)\qquad \operatorname{re}\frac{\Phi'_t(z,t)}{z\,\Phi'_z(z,t)}\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad t\in[t_1,t_2], \quad z\in E.$$

Démonstration. 1° Supposons d'abord que $a_1(t)>0$ pour $t\in[t_1,t_2]$. Dans ce cas le théorème 2.1 a été énoncé et établi dans [1].

2° Rejetons maintenant l'hypothèse $a_1(t)>0$. Alors on a évidemment $a_1(t)\neq 0$, puisque pour tout $t\in[t_1,t_2]$ la fonction $\Phi(\cdot,t)$ est univalente dans E. Soit $\arg a_1(0)$ l'argument principal. Par hypothèse a_1 est une fonction différentiable par rapport à t. Formons la chaîne

$$F(z,t) = \Phi(ze^{-i\cdot\arg a_1(t)},t) = |a_1(t)|\,z+\dots$$

et posons $ze^{-i\arg a_1(t)} = v$. On obtient

$$\frac{F'_t(z,t)}{z\,F'_z(z,t)} = -i\frac{d}{dt}\arg a_1(t)+\frac{\Phi'_t(v,t)}{v\,\Phi'_v(v,t)}\;.$$

Pour $F(z,t)$ on a le cas 1^o, donc le premier membre de la dernière égalité a une partie réelle non négative. De là on tire l'inégalité (2.1), ce qui établit le théorème 2.1.

Le théorème suivant (th.2.2) concerne une extension du principe de correspondance des bords que voici. Soient D et D^* des domaines simplement connexes limités par des courbes de Jordan C et C^*, et supposons que D^* soit un domaine borné. Si une fonction f, analytique dans D et continue dans $\bar{D} = D \cup C$, représente biunivoquement C sur C^* en conservant le sens de parcours des bords, la fonction f effectue la représentation univalente de D sur D^*.

Dans [5] ce critère se trouve étendu au cas où C^* est un contour non borné et où $w = \infty$ est un point-frontière simple, le contour C étant borné.

On peut considérer le cas où $w = \infty$ est un point-frontière de multiplicité n du domaine D^*. Soient $\beta_k \pi$, $0 \leqslant \beta_k \leqslant 2$, les mesures des angles entre les asymptotes du contour C^* qui correspondent aux différents sommets w_k, au point $w = \infty$, $k = 1,2,\dots,n$. Admettons que l'application $w = f(z)$ fait correspondre aux sommets w_k les points ζ_k sur la courbe C et que $\alpha_k \pi$, $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2$, est la mesure de l'angle entre les tangentes au contour C au point ζ_k, $k = 1,\dots,n$, et enfin que f détermine une correspondance biunivoque entre les contours C et C^*. Alors on a le théorème que voici.

T h é o r è m e 2.2. Soit f une fonction holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$ sauf aux points ζ_k, $k = 1,\dots,n$, et soit pour $z \in D$

$$(2.2) \qquad \lim_{z \to \zeta_k} \left\{ f(z)(z-\zeta_k)^{\tau_k} \right\} = A_k, \quad \tau_k > 0, \; A_k \neq 0,\infty, \; k=1,\dots,n.$$

Si l'on a, sous ces hypothèses, l'inégalité

$$(2.3) \qquad -2 < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tau_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k < 2,$$

la fonction f effectue la représentation biunivoque de D sur D^*.

Démonstration. Nous allons procéder comme dans [5], où $w = \infty$ était un point-frontière simple du domaine D^*. Soit γ_r^k, pour r suffisamment petit, l'arc de circonférence $|z - \zeta_k| = r$ contenu dans D, $D_r = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bar{E}_r(\zeta_k)$, où $E_r(\zeta_k) = \{ z : |z - \zeta_k| < r \}$ et soit $C_r = C \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_r(\zeta_k)$. Evidemment $\partial D_r = C_r \cup \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_r^k$. Ces constructions sont légitimes, puisque par hypothèse C est un contour.

Si $w_0 \in D^*$, l'hypothèse: $f(z) \to \infty$ si $z \to \zeta_k$, $k=1,\dots,n$, entraîne que r peut être choisi assez petit pour que la partie retranchée du domaine D ne contienne pas de w_0-points de la fonction f, c'est-à-dire de points z qui satisfont à l'équation $f(z) = w_0$. Par conséquent le nombre $N(w_0)$ des w_0-points de la fonction f est le même pour les domaines D et D_r. On sait que

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_r} \arg \{ f(z) - w_0 \} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_r} \arg\{ f(z) - w_0 \} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{\gamma_r^k} \arg\{ f(z) - w_0 \} .$$

En faisant un raisonnement analogue à celui de ([5] p.108), on obtient les égalités

$$(2.4) \quad \Delta_{C_r} \arg\{ f(z) - w_0 \} = \Delta_{C_r^*} \arg(w - w_0) = \left(2 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \right) \pi + O(r),$$

$$(2.5) \qquad \Delta_{\gamma_r^k} = \alpha_k \tau_k \pi + O(r),$$

où $C_r^* = f(C_r)$ et $O(r) \to 0$ pour $r \to 0$.

Des considérations précédentes, ainsi que de (2.4) et (2.5) il résulte que

$$N(w_0) = 1 + 2^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\tau_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k\right). \tag{2.6}$$

Des relations (2.3) et (2.6) il s'ensuit que $0<N(w_0)<2$, d'où $N(w_0) = 1$, c'est-à-dire que toute valeur $w_0 \in D^*$ est admise exactement une fois dans D par la fonction f.

Si w_1 est un point extérieur du domaine D^*, la formule (2.4) prend la forme

$$\Delta_{C_r}\arg\{ (z) - w_1 \} = -\pi\sum_{k=1}^{n} \beta_k + O(r), \tag{2.7}$$

et alors

$$N(w_1) = 2^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\tau_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k\right). \tag{2.8}$$

En tenant compte de (2.3), on en déduit que $-1<N(w_1)<1$, d'où $N(w_1) = 0$. Le domaine D ne contient donc pas de w_1-points de la fonction f. Le théorème 2.2 se trouve ainsi démontré.

R e m a r q u e . La nécessité d'énoncer et de démontrer le théorème 2.2 découle du fait que son analogue de [5] (p.109) est faux. Le théorème, qui y est énoncé, affirme que si $w = \infty$ est un point frontière de multiplicité n du domaine D^*, il suffit que la condition $\mu_k < \frac{\beta_k+2}{\alpha_k}$ soit remplie au moins par un sommet pour que la fonction f effectue la représentation univalente de D sur D^*. A titre de contre-exemple on peut citer la fonction f: $f(z) = \frac{z}{1+z} - \frac{z}{(1-z)^2}$.

3. Les résultats de [3], [7], peuvent être énoncés sous la forme du théorème suivant qui figure comme théorème 1

dans [7]; nous allons le démontrer à l'aide d'une méthode uniforme et par une voie différente.

Théorème 3.1. Soit f une fonction holomorphe dans E et non constante. La relation $f \in J_0$ a lieu si et seulement s'il existe des nombres μ et ν, $0 \leqslant \mu \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \nu \leqslant \pi$, tels que

$$(3.1)\quad \mathrm{re}\{-ie^{i\mu}(1-2\cos\nu\, e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)f'(z)\} \geqslant 0, \quad z \in E.$$

Remarque. Le théorème énoncé dans [7] donne aussi une interprétation géométrique des extrémités simples $f(e^{i(\mu-\nu)})$, $f(e^{i(\mu+\nu)})$. Pour cette interprétation nous renvoyons le lecteur aux remarques finales qui suivent la démonstration du théorème 3.1.

Démonstration. 1° Soit $f \in S_0$ et $f(E) \in T$. Sans nuire à la généralité nous admettrons dorénavant que $f(0) = 0$. Il existe donc une suite de domaines contenant l'origine tels que chacun d'eux s'obtient du plan en en retranchant un nombre fini de demi-droites parallèles à l'axe imaginaire, suite qui converge vers le noyau $D = F(E)$ au sens de Carathéodory. Cette simple construction a été donnée dans la démonstration du Lemme 1 de [2] (p.3-4); c'est pourquoi nous ne nous en occuperons pas. Dans cette partie de la démonstration on peut donc admettre que $D = f(E)$ est un domaine obtenu du plan $\mathbb{C}$ en en retranchant un nombre fini de demi-droites parallèles à l'axe imaginaire. Nous allons approcher le domaine D par une suite ascendante de domaines limités par des courbes de Jordan telles que chacune d'elles a deux points communs au plus avec chaque droite parallèle à l'axe imaginaire. Supposons que ∂D soit composé de demi-droites fermées $g_1, g_2, \dots, g_k$ de sommets resp. $w_1, w_2, \dots, w_k$ dirigés vers le bas, et de demi-droites fermées $d_1, d_2, \dots, d_l$ de sommets resp. $v_1, v_2, \dots, v_l$ dirigés vers le haut. Admettons que $\mathrm{re}\, w_1 < \mathrm{re}\, w_2 < \dots < \mathrm{re}\, w_k$ et $\mathrm{re}\, v_1 < \mathrm{re}\, v_2 < \dots < \mathrm{re}\, v_l$. Il existe un nombre $M_1 > 0$ tel que la bande $|\mathrm{Im}\, w| < M_1$ contient tous les sommets $w_1,\dots,w_k,v_1,\dots,v_l$. Désignons par $w'_0,w'_1,w'_2,\dots,w'_k$ les points de la droite $\operatorname{Im} w = M_1$ tels que $\operatorname{re} w'_s = 2^{-1}(\operatorname{re} w_s + \operatorname{re} w_{s+1})$, $s = 1,\dots,k-1$ et $w'_0 = \operatorname{re} w_1 - 1 + iM_1$, $w'_k = \operatorname{re} w_k + 1 + iM_1$. D'une manière analogue définissons les points $v'_0,v'_1,\dots,v'_l$ sur la droite $\operatorname{Im} w = -M_1$. Formons la ligne brisée fermée Γ_1 dont les sommets consécutifs sont: $-M_1,v'_0,v_1,v'_1,\dots,v_l,v'_l,M_1,w'_k,w_k,w'_{k-1},\dots,w_1,w'_0,-M_1$. La construction de la courbe Γ_1 se rapporte aussi au cas où ∂D contient au moins une demi-droite de sommet dirigé vers le bas et au moins une demi-droite de sommet dirigé vers le haut. Si ∂D ne contient pas de demi-droite de sommet dirigé vers le haut, on entend par Γ_1 la ligne brisée dont les sommets consécutifs sont: $-M_1$ $-iM_1,M_1,w'_k,w_k,w'_{k-1},\dots,w_1,w'_0,-M_1$. D'une façon analogue, si ∂D ne contient pas de demi-droite de sommet dirigé vers le bas, on entend par Γ_1 la ligne brisée dont les sommets consécutifs sont $-M_1,v'_0,v_1,v'_1,v_2,\dots,v_l,v'_l,M_1,iM_1,-M_1$. Le nombre M_1 peut être choisi assez grand pour que la ligne brisée Γ_1 soit le bord d'un domaine de Jordan $D_1 \in T$ et $0 \in D_1$. Cela résulte directement de la construction. Il en résulte aussi que si le point η décrit la courbe Γ_1, en parcourant le domaine D_1 dans le sens positif du point M_1 au point $-M_1$, $\operatorname{re}\eta$ décroît. Il s'ensuit que $D_1 \in T$.

Soit $M_1 < M_2 < M_3 < \dots$ et supposons que $M_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. La suite $\{D_n\}$, $D_n \in T$, des domaines construits de même qu'auparavant en remplaçant M_1 par M_n est une suite ascendante de domaines et $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D = f(E)$. Par conséquent D est le noyau au sens de Carathéodory de la suite $\{D_n\}$. Désignons par $\{f_n\}$, $n = 1,2,\dots$, la suite des fonctions $f_n \in S_0$ telles que $f_n(0) = 0$, $\arg f'_n(0) = \arg f'(0)$, où $f_n(E) = D_n$. En vertu du théorème de Carathéodory, il s'ensuit que $f_n \to f$ et que la convergence est uniforme sur tout sous-ensemble fermé du cercle E.

Il existe des nombres réels ψ_n et θ_n, $\psi_n > \theta_n$, $0 < \psi_n - \theta_n < 2\pi$, tels que $f_n(e^{i\theta_n}) = M_n$, $f_n(e^{i\psi_n}) = -M_n$. On peut admettre que $\theta_n = \mu_n - \nu_n$, $\psi_n = \mu_n + \nu_n$, où $\nu_n \in (0,\pi)$, $\mu_n \in (0,2\pi)$.

Formons, pour tout n fixé, l'homotopie

$$\Phi_n(z,t) = f_n(z) + th(z;\mu_n,\nu_n), \quad t \geq 0, \quad z \in E,$$

où

$$h(z;\mu,\nu) = \frac{ie^{-i\mu}z}{[1 - ze^{-i(\mu-\nu)}][1 - ze^{-i(\mu+\nu)}]} .$$

La fonction $h(\cdot;\mu,\nu)$, qui s'obtient simplement de la fonction $\dfrac{z}{1 - 2z\cos\nu + z^2}$, est une fonction univalente et étoilée dans E et $\mathbb{C}\setminus h(E;\mu,\nu)$ est composé de demi-droites disjointes appartenant à l'axe imaginaire et ne contenant pas l'origine. On voit sans peine que $\operatorname{Im} h(e^{i\varphi};\mu,\nu) > 0$ pour $\varphi \in (\mu-\nu,\mu+\nu)$ et $\operatorname{Im} h(e^{i\varphi};\mu,\nu) < 0$ pour $\varphi \in (\mu+\nu,\mu-\nu+2\pi)$, $\mu \in (0,2\pi)$ et $\nu \in (0,\pi)$. Des propriétés des fonctions f_n et de la définition de $\Phi_n(z,t)$ il résulte que si z décrit la circonférence unité dans le sens positif, du point $e^{i(\mu_n-\nu_n)}$ au point $e^{i(\mu_n+\nu_n)}$, $\operatorname{re}\Phi_n(e^{i\varphi},t)$ décroît de M_n à $-M_n$ et $\Phi_n(e^{i\varphi},t)$ décrit un arc de Jordan $\Gamma_n^+(t)$ qui s'étend jusqu'à l'infini et dont les asymptotes sont les droites $\operatorname{re} w = -M$, $\operatorname{re} w = M$. Si z décrit la circonférence unité ∂E dans le sens positif, du point $e^{i(\mu_n+\nu_n)}$ au point $e^{i(\mu_n-\nu_n+2\pi)}$, $\operatorname{re}\Phi_n(e^{i\varphi},t)$ croît de $-M_n$ à M_n et $\Phi_n(e^{i\varphi},t)$ décrit un arc de Jordan $\Gamma_n^-(t)$ qui s'étend jusqu'à l'infini et dont les asymptotes sont les droites $\operatorname{re} w = \pm M$. Si $\Gamma_n(t) = \Gamma_n^-(t) \cup \Gamma_n^+(t)$, $\Gamma_n(t)$ est le bord du domaine $D_n(t)$ et $\Phi_n(z,t)$ définit une correspondance biunivoque entre la circonférence unité ∂E et la courbe $\Gamma_n(t)$ respectant le sens de parcours de E et $D_n(t)$. La fonction $\Phi_n(\cdot,t)$ est holomorphe dans E sauf aux points $\zeta_1 = e^{i(\mu_n-\nu_n)}$, $\zeta_2 = e^{i(\mu_n+\nu_n)}$ et tend vers l'infini pour $z \to \zeta_1$ et $z \to \zeta_2$. Le point $w = \infty$ est un point frontière double du domaine $D_n(t)$. Dans ce cas, en vertu tu théorème 2.2, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \tau_1 = \tau_2 = 1$ et l'inégalité (2.3) se trouve satisfaite. Du théorème 2.2 il résulte donc que $\Phi_n(z,t)$ effectue la représentation univalente de E sur $D_n(t) \in T$. Si $t \to 0$, on a $D_n(t) \to D_n$ au sens de la convergence vers le noyau. De la construction il résulte directement que pour $0<t_1<t_2$ on a $\Phi_n(E,t_1) \subset \Phi_n(E,t_2)$. La fonction $\Phi_n(\cdot,t)$ satisfait aux hypothèses du théorème 2.1. De l'inégalité (2.1) on tire donc

$$(3.2) \qquad \mathrm{re}\,\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi_n'(z,t)}{z\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Phi_n(z,t)} = \mathrm{re}\,\frac{h(z;\mu_n,\nu_n)}{z\,f_n'(z)+tzh_z'(z;\mu_n,\nu_n)} \geqslant 0, \quad z\in E.$$

En passant à la limite avec $t \to 0$, on obtient de (3.2)

$$(3.3) \qquad \mathrm{re}\,\frac{h(z;\mu_n,\nu_n)}{zf_n'(z)} \geqslant 0, \quad z \in E.$$

En tenant compte des notations introduites plus haut, on tire de (3.3)

$$(3.4) \quad \mathrm{re}\left\{-ie^{i\mu_n}(1-2e^{-i\mu_n}\cos\nu_n z+z^2e^{-2i\mu_n})f_n'(z)\right\} \geqslant 0, \quad z \in E.$$

Puisque f_n tend vers f uniformément sur tout $\bar{E}_r$, $r \in [0,1)$, et que les suites $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ sont bornées, il existe une suite partielle $\{n_k\}$ de l'ensemble N telle que $n_k \to \infty$, $\mu_{n_k} \to \mu$, $\nu_{n_k} \to \nu$. L'inégalité (3.4) pour $n = n_k$ donne, avec $k \to \infty$, la relation (3.1). Des limitations auxquelles satisfont μ_n et ν_n il résulte que

$\mu \in [0,2\pi]$, $\nu \in [0,\pi]$. Comme tout domaine de la classe T peut, ainsi que nous l'avons dit, être approché au sens de la convergence vers le noyau par des domaines canoniques tels que le domaine D, il résulte du théorème de Carathéodory, en passant encore à la limite, comme précédemment, que si $f \in S_0$ et $f(E) \in T$, il existe des nombres μ et ν satisfaisant à l'inégalité (3.1) et tels que $\mu \in [0,2\pi]$, $\nu \in [0,\pi]$. Le cas 1° du théorème 3.1 est ainsi établi.

2° Supposons maintenant que l'inégalité (3.1) soit vérifiée pour une fonction f non constante dans E. Dans ce cas aussi on ne nuira pas à la généralité en admettant que $f(0) = 0$. Dans cette partie de la démonstration nous distinguerons deux cas:

α) Supposons que dans (3.1) l'égalité ait lieu en un point $z \in E$. En vertu du principe de l'extrémum pour les fonctions harmoniques, on obtient

$$-ie^{i\mu}(1 - 2\cos\nu\, e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)f'(z) = -ci, \quad c \in R = (-\infty,\infty),$$

d'où

$$f'(z) = \frac{ce^{-i\mu}}{1 - 2\cos\nu\, e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2}, \quad c \neq 0. \tag{3.5}$$

En intégrant et en tenant compte de la condition $f(0) = 0$, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\sin\nu} \ln\left[e^{-2i\nu}\,\frac{z - e^{i(\mu+\nu)}}{z - e^{i(\mu-\nu)}}\right]. \tag{3.6}$$

Pour $\nu = 0$ ou $\nu = \pi$ il faut prendre pour f la fonction limite donnée par la formule $f(z) = \dfrac{cze^{-i\mu}}{1-ze^{-i\mu}}$.

Par conséquent f(E) est une bande verticale pour $\nu \in (0,\pi)$ ou un demi-plan à bord vertical pour $\nu = 0$ ou $\nu = \pi$, donc $f(E) \in T$ et la représentation (3.6) est univalente.

β) Supposons maintenant que l'inégalité (3.1) ait lieu pour $\mu \in [0, 2\pi]$, $\nu \in [0, \pi]$ sans qu'il y ait égalité. Alors on a

$$\mathrm{re}\left\{-ie^{i\mu}(1 - 2\cos\nu\, e^{-i\mu}z + e^{-2i\mu}z^2)f'(z)\right\} > 0, \quad z \in E. \tag{3.7}$$

Par définition de la fonction $h(\cdot, \mu, \nu)$ la fonction H donnée par la formule

$$H(z) = \int_0^z \frac{h(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\sin\nu} \ln\left[e^{-2i\nu} \frac{z - e^{i(\mu+\nu)}}{z - e^{i(\mu-\nu)}}\right]$$

représente le cercle E sur une bande dont les bords sont parallèles à l'axe réel. Nous ne jugeons pas nécessaire de reproduire ici en détail les calculus qui mènent aux points Ai, Bi, $A < B$, de l'axe imaginaire où les bords de la bande coupent cet axe; nos considérations ultérieures auront un caractère qualitatif. Pour tout $t \in (A,B)$ fixé et s variant dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ une droite L_t: $w = s+ti$ est parallèle à l'axe réel et contenue dans la bande en question. La contre-image de la droite L_t dans l'application H est un arc de Jordan $z_t = z_t(s) = H^{-1}(s+ti)$ contenu dans E et dont les extrémités sont $e^{i(\mu-\nu)}$, $e^{i(\mu+\nu)}$ (on voit facilement que c'est un arc de cercle, mais cela n'importe pas ici). De là on tire $H(z_t(s)) = s+ti$ et $H'(z_t(s)) \frac{d}{ds} z_t(s) = 1$, donc

$$H'(z_t(s)) = \frac{1}{\frac{d}{ds} z_t(s)}. \tag{3.8}$$

En vertu de la définition de $h(z; \mu, \nu)$, la condition (3.7) est équivalente à l'inégalité suivante: $\mathrm{re}\{zf'(z)/h(z,\mu,\nu)\} > 0$ pour $z \in E$, c'est-à-dire à

$$\mathrm{re}\, \frac{f'(z)}{H'(z)} > 0, \quad z \in E. \tag{3.9}$$

De (3.9) et (3.8) on tire: $\mathrm{re}[f'(z_t(s))\frac{d}{ds}z_t(s)] > 0$, donc

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{re}\,f(z_t(s)) > 0, \quad s \in (-\infty,\infty). \tag{3.10}$$

Par conséquent la fonction $\mathrm{re}\,f(z)$ est croissante sur les courbes $z_t(s)$. Comme la fonction H est convexe, on déduit de (3.9) que f est une fonction presque convexe, donc univalente [4]. Par conséquent, quand t varie de A à B, les courbes $z = z_t(s)$ n'ont comme points communs que leurs extrémités $e^{i(\mu+\nu)}$, $e^{i(\mu-\nu)}$ et elles balayent le cercle E. Il résulte de ces considérations que $f(D(t_1,t_2))$ est un domaine convexe vers l'axe imaginaire, où $D(t_1,t_2)\subset E$ désigne pour $t_1 \neq t_2$, $t_1,t_2 \in (A,B)$ le domaine simplement connexe limité par les arcs $z = z_{t_1}(s)$, $z = z_{t_2}(s)$, $s\in(-\infty,\infty)$, les points $e^{i(\mu+\nu)}$, $e^{i(\mu-\nu)}$ y étant adjoints. De là on déduit aisément que $f(E)\in T$, c'est-à-dire $f\in J_0$, ce qui achève la seconde partie de la démonstration et le théorème 3.1 se trouve ainsi établi.

Remarques finales. On a vu plus haut que $\mathrm{Im}\,h(e^{i\varphi},\mu,\nu) > 0$ si $\varphi\in(\mu-\nu,\mu+\nu)$ et $\mathrm{Im}\,h(e^{i\varphi},\mu,\nu) < 0$ si $\varphi\in(\mu+\nu,\mu-\nu+2\pi)$. Il en résulte, en tenant encore compte de la relation entre h et H, que le bord supérieur de la bande $A < \mathrm{Im}\,w < B$ correspond à l'intervalle $(\mu-\nu,\mu+\nu)$ ou bien le point ∞ au point μ dans le cas où $\nu = 0$, la bande devenant alors le demi-plan $\mathrm{Im}\,w > A$. Il découle de la définition de la fonction H que, si $s\to\infty$, on a $z_t(s)\to e^{i(\mu-\nu)}$, d'où, en tenant compte de (3.10), il résulte que $f(e^{i(\mu-\nu)})$ est l'extrémité simple du domaine $f(E)$ pour laquelle $\sup_{z\in E}\mathrm{re}\,f(z)$ est réalisé; cela veut dire qu'il existe une suite $\{z'_n\}$, $z'_n\in E$, $n=1,2,\dots$, $z'_n\to e^{i(\mu-\nu)}$ telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{re}\,f(z'_n) = \sup_{z\in E}\mathrm{re}\,f(z)$. D'une façon analogue, $f(e^{i(\mu+\nu)})$ est l'extrémité simple du domaine $f(E)$ pour laquelle $\inf_{z\in E}\mathrm{re}\,f(z)$ se trouve réalisé; cela veut dire qu'il existe une suite $\{z_n''\}$, $z_n'' \in E$, $n=1,2,\ldots$, $z_n'' \to e^{i(\mu+\nu)}$, telle que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{re} f(z_n'') = \inf_{z\in E} \operatorname{re} f(z)$ (normalisation de Hengartner et Schober). Cette interprétation, relative au cas $2^0\beta)$ se rapporte aussi au cas $2^0\alpha)$, où il s'agit de bandes de la forme (3.6), ce qui découle immédiatement de la formule (3.6) et du fait que $f(E)$ est une bande verticale.

Notons encore que la méthode appliquée dans la démonstration de la partie 2^0 du théorème 3.1 a mis à profit les idées, convenablement étendues, exposées dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bielecki, Z. Lewandowski: Sur certaines familles de fonctions α-étoilées, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961) 45-55.

[2] M. Biernacki: Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles, Prace Mat.-Fiz. 44 (1936) 293-314.

[3] W. Hengartner, G. Schober: On schlicht mappings to domains convex in one direction, Comment. Math. Helv., 45 (1970) 303-314.

[4] W. Kaplan: Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J. 1 (1952) 169-185.

[5] M. Лаврентьев, Б. Шабат: Методы теории функций комплексного переменного. Москва-Ленинград 1951.

[6] M. Robertson: Analytic functions starlike in one direction, Amer. J. Math. 58 (1936) 465-472.

[7] W. Royster, M. Ziegler: Univalent functions convex in one direction, Publ.Math. 23 (1976) 339-345.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, MARIA CURIE-SKLODOWSKA UNIVERSITY, 20-031 LUBLIN, POLAND
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF LUBLIN, 20-109 LUBLIN, POLAND
Received May 18, 1981.