DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XVI No 2 1983

Alain Pham Ngoc Dinh

SUR UN PROBLÈME HYPERBOLIQUE FAIBLEMENT NON LINÉAIRE À UNE DIMENSION

On étudie une équation hyperbolique non linéaire à une dimension, équation pouvant dépendre ou non d'un petit paramètre ε. Le problème approché associé au problème initial conduit à un système différentiel qui peut être résolu numériquement par la méthode des "Pas de géant". L'existence de la solution est démontrée par une méthode de compacité, le second membre $f(t,u)$ étant assujetti à certaines hypothèses. Il y a unicité de la solution qui tend vers la solution de l'équation des ondes quand ε tend vers 0.

1. Situation et formulation variationnelle du problème

On considère le problème suivant: trouver une fonction $u(x,t)$ satisfaisant à

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f(t,u) \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \end{cases}
$$

où $x \in]0,1[= \Omega$, $t \in]0,T[$.

Les hypothèses sur la fonction f seront faites un peu plus tard au paragraphe 2, la fonction f pouvant aussi dépendre explicitement de x; à cet effet un exemple P sera proposé dans le courant de cet article. Dans (1) ε est un nombre positif qui sera en général "petit". La petitesse du paramètre ε n'intervient aucunement dans la formulation théorique du problème (1) et dans l'existence de la solution de ce dernier, elle apparaîtra cependant dans la résolution du problème approché suivant une méthode déjà utilisée [2]. Signalons dans le livre de A. Haraux [3] l'exemple de l'équation non linéaire

$$u_{tt} - \Delta u = g(u^2)u \tag{2}$$

dont l'existence et l'unicité d'une solution locale sont démontrées par la théorie des semi-groupes pour chaque $(u_0, v_0) \in (H^1 \times L^2)(\mathbb{R})$, g étant une fonction bornée sur des ensembles bornés et $g(u^2)u$ bornée sur des ensembles bornés de $\mathbb{R}^+$. A. Haraux [3] a aussi considéré l'équation des ondes avec une non-linéarité logarithmique dans $]0,T[\times \mathbb{R}^3$

$$u_{tt} - \Delta u + mu - ku \operatorname{Log}(|u|^2) = 0, \tag{3}$$

équation introduite par I. Białynicki-Birula et J. Mycielski [1] pour laquelle un théorème d'existence et d'unicité et une propriété de stabilité sont établis. Dans cet article nous allons d'abord établir des estimations a priori basées sur une inégalité concernant les inéquations de Volterra (paragraphe 2). La solution du problème (1) est obtenue par passage à la limite en utilisant les théorèmes de compacité classiques (paragraphe 3). Il y a unicité de la solution (paragraphe 4) qui tend vers la solution de l'équation des ondes quand ε tend vers 0 (paragraphe 5).

Dans la suite de ce papier $u(t)$ représentera $u(x,t)$. Soit $\Phi(t)$ telle que

$$\phi \in D_T = \left\{ \phi / \phi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \frac{d\phi}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \phi(T) = 0 \right\}.$$

On rappelle que $L^2(0,T;H)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de $[0,T] \longrightarrow H$. C'est un espace de Hilbert séparable tel que $\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < \infty$, le produit scalaire étant défini par $\langle u,v\rangle = \int_0^T (u(t),\ v(t))_H dt$.

Considérons donc une $\phi \in D_T$, **multiplions** l'équation de (1) par ϕ et intégrons par rapport à x puis par rapport à t. Il vient après utilisation de la formule de Green

$$(4) \qquad \int_0^T\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdt - \int_0^T\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) dxdt =$$

$$= \varepsilon \int_0^T\int_0^1 f(t,u)\cdot\phi\, dxdt + \int_0^T u_1(x)\ \phi(x,0)dx.$$

Posons

$$(5) \qquad \begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, dx \\ (u'(t),\ \phi'(t))_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t}\, dx. \end{cases}$$

De (4) pour une fonction $f(t,u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ nous déduisons la formulation faible du problème (1): trouver $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ telle que $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et vérifiant l'équation

$$(6) \qquad \int_0^T a[u(t),\phi(t)]\,dt - \int_0^T (u'(t),\phi'(t))_{L^2(\Omega)}\,dt =$$

$$= (u_1,\phi(0))_{L^2(\Omega)} + \int_0^T (f,\phi)_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \forall \phi \in D_T,\ u(0)=u_0.$$

La formulation faible (6) est équivalente à la suivante [5]: trouver $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ telle que $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et vérifiant

$$
(7) \quad \begin{cases} a[u(t),v] + \dfrac{d}{dt}(u'(t),v)_{L^2(\Omega)} = \varepsilon(f(t,u(t)),v)_{L^2(\Omega)} \\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u'(0) = u_1 \in L^2(\Omega). \end{cases}
$$

Dans (7) $\frac{d}{dt}(u',v)_{L^2(\Omega)}$ est la dérivée au sens distribution sur $]-\infty,T[$ de la fonction

$$
\begin{cases} (u'(t),v)_{L^2(\Omega)}, & t>0 \\ 0, & t<0. \end{cases}
$$

2. Le problème approché - estimations a priori

Les fonctions $v_k(x) = \sin(k\pi x)$ forment une "base" de $H_0^1(\Omega)$ (i.e. linéairement indépendantes et dont les combinaisons linéaires finies sont denses dans $H_0^1(\Omega)$). Considérons donc une fonction $u_n(t)$ écrite sous la forme

$$
(8) \qquad u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{kn}(t) v_k(x),
$$

et satisfaisant au problème

$$
(9) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_n'(t),v_p)_{L^2(\Omega)} + a[u_n(t),v_p] = \varepsilon(f(t,u_n),v_p)_{L^2(\Omega)} \\ u_n(0) = u_{0n}(x), \quad t \in]0,T[, \quad 1 \leqslant p \leqslant n \\ u_n'(0) = u_{1n}(x) \end{cases}
$$

qui est le problème approché de (7) (méthode de Faedo-Galerkin [6]) et où

$$(10)\quad \begin{cases} u_{0n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn} \cdot v_k(x) \longrightarrow u_0(x) \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{fort} \\ \\ u_{1n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kn} \cdot v_k(x) \longrightarrow u_1(x) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort} \end{cases}$$

$$a(v_k, v_p) = \frac{k^2\pi^2}{2} \delta_{kp}, \quad (v_p, v_k) = \frac{1}{2} \delta_{kp},$$

δ_{kp} étant le symbole de Kronecker.

Les $\xi_{pn}(t)$ satisfont alors au système

$$(11)\quad \begin{cases} \xi''_{pn}(t) + (p^2\pi^2)\xi_{pn}(t) = 2\varepsilon(f(t,u_n(t)),v_p)_{L^2(\Omega)} \\ \\ \xi_{pn}(0) = \eta_{pn}, \ \xi'_{pn}(0) = \gamma_{pn}, \ t \in]0,T[, \quad 1 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Hypothèses sur f

i) f sera localement lipschitzienne par rapport à u $\Leftrightarrow \forall T > 0, \ \exists A(t)$

$$(12)\quad \begin{aligned} &|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq A(t)|u_1 - u_2|, \\ &t \in]0,T[\quad \text{et} \quad A(t) \in L^2(]0,T[), \end{aligned}$$

ii) $f(t,u)$ est continue par rapport à l'ensemble des 2 variables (t,u),

iii) $|f(t,u)| \leqslant f_1(t,|u|)$, $f_1(t,v)$ étant continue par rapport à (t,v), non décroissante en $v \geqslant 0$ pour chaque $t \geqslant 0$ et localement de carré intégrable en t pour chaque $v \geqslant 0$.

Les hypothèses (12,i) et (12,ii) entraînent, d'après les résultats généraux sur les équations différentielles non linéaires, que le système différentiel non linéaire (11) définit $u_n(t)$ de façon unique dans un intervalle $[0,T_n]$, T_n dépendant de n. Le système (11) peut être résolu à l'aide de la méthode des "Pas de géant" à condition que le paramètre ε soit "petit" et que la fonction f soit "développable" c'est-à-dire que les inconnues $\xi_{kn}(t)$ de $u_n(t)$ dans (8) puissent apparaître explicitement dans le second membre [2].

L'hypothèse (12,iii) est classique dans les équations intégrales de Volterra [4]. Nous allons montrer maintenant par des estimations "a priori" que $\| u_n'(t)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\| u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ sont bornées indépendamment de n.

Multiplions (9) par $\xi_{pn}'(t)$ et sommons. Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, a(u_n,u_n) = \varepsilon(f(t,u_n),u_n')_{L^2(\Omega)},$$

d'où par intégration

$$\text{(13)} \quad \| u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_n(t),u_n(t)) =$$

$$= \| u_{1n}\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_{0n},u_{0n}) + 2\,\varepsilon\int_0^t (f(\theta,u_n),u_n')_{L^2(\Omega)}\,d\theta$$

soit encore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_n,u_n) \leq \|u_{1n}\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_{0n},u_{0n}) +$$

(14)

$$+ \varepsilon^2 \int_0^t \|f(\theta,u_n(\theta))\|^2_{L^2(\Omega)} d\theta + \int_0^t \|u_n(\theta)\|^2_{L^2(\Omega)} d\theta.$$

Puisque u_{0n} et u_{1n} convergent dans $H^1_0(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ respectivement vers u_0 et u_1, alors $\|u_{1n}\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\|u_{0n}\|^2_{H^1_0(\Omega)}$ sont bornées indépendamment de n. Nous utiliserons ici la norme du gradient équivalente à la norme usuelle i.e.

$$a(u_n,u_n) = \|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

D'où

(15)
$$\|u_{1n}\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_{0n},u_{0n}) \leq C_1,$$

C_1 étant constante indépendante de n.

On sait qu'en une dimension $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ avec injection continue. Il en résulte, en utilisant les hypothèses (12,ii) et (12,iii)

(16)
$$\|f(\theta,u_n(\theta))\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1(\theta,|u_n|)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1(\theta,|u_n|)\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})}.$$

Or

(17)
$$|u_n(t)| \leq \|u_n\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2}\,\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \quad \text{(injection continue).}$$

La relation (16) entraîne, en utilisant encore (12,iii),

(18) $\|f(\theta,u_n(\theta))\|_{L^2(\Omega)} \leq \| f_1(\theta,\|u_n\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})})\| = f_1(\theta,\|u_n\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})})$,

car f_1 est maximum en $\|u_n\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})}$.

Finalement, en utilisant à nouveau l'injection continue (17), on a

(19) $$\|f(\theta,u_n(\theta))\|_{L^2(\Omega)} < f_1(\theta,\sqrt{2}\,\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}).$$

Posons

$$S_n(t) = \|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Par (14), (15), (19) et pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$ on a

(20) $$S_n(t) \leq C_1 + \int_0^t f_1^2(\theta,\sqrt{2}\,\sqrt{S_n(\theta)})d\theta + \int_0^t S_n(\theta)d\theta,$$

inégalité de la forme $S_n(t) \leq C_1 + \Sigma_1\,[S_n(\theta)]$, où Σ_1 représente une somme d'opérateurs de Volterra tous non décroissants. D'où [4]

(21) $$S_n(t) \leq S(t), \quad t \in [0,\bar{T}[,$$

où $S(t)$ est la solution maximum de

$$S(t) = C_1 + \Sigma_1\,[S(t)],$$

solution définie dans $[0,\bar{T}[$. $S_n(t)$ est donc bornée dans $[0,\hat{T}]$, $\hat{T} < \bar{T}$ ($\hat{T}$ sera appelé dans la suite T). Il s'ensuit que

(22) $\|u_n'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\|u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ sont bornées indépendamment de n.

De (22) on en déduit que, lorsque n tend vers l'infini,

$$(23)\quad \begin{cases} u_n \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_n' = \dfrac{du_n}{dt} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

3. Passage à la limite et solution du problème (1)

Rappelons que

$$L^\infty(0,T;H_0(\Omega)) = [L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))]'$$

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) = [L^1(0,T;L^2(\Omega))]',$$

où X' désigne le dual de X.

On peut donc extraire de $\{u_n\}$ une suite $\{u_\mu\}$ telle que

i) $u_\mu \to u$ dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ faible * i.e.

$$(24)\quad \int_0^T (u_\mu(t),g(t))_{L^2(\Omega)}\,dt \to \int_0^T (u(t),g(t))_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

$$\forall g \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

ii) $u_\mu' \to u'$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ faible *.

De (23) il en résulte en particulier que u_n demeure dans un borné de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et u_n' dans un borné de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Donc u_n demeure dans un borné de $H^1(]0,T[\times\Omega) = H^2(Q)$ car

$$(25)\quad \|u_n\|^2_{H^1(Q)} = \|u_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2,$$

C_2 étant constante indépendante de n.

De (25) et du théorème de l'injection compacte de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ (Rellich-Kondrachov) on en déduit que la suite $\{u_\mu\}$ extraite de $\{u_n\}$ outre (24) vérifie

(26) $u_\mu \longrightarrow u$ dans $L^2(Q)$ fort et $u_\mu \longrightarrow u$ presque partout

(théorème de Riesz-Fischer).

Nous allons montrer maintenant que

(27) $(f(t,u_\mu),v_j)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (f(t,u),v_j)_{L^2(\Omega)}$ dans $L^\infty(0,T)$ faible $*$.

Tout d'abord

$$\|f(t,u_\mu(t))\|_{L^2(\Omega)} \leqslant f_1(t, \sqrt{2}\,\|u_\mu(t)\|_{H_0^1(\Omega)}) \leqslant f_1(t, \sqrt{2}\, S(t))$$

(par (19) et (21)), d'où

(28) $f(t,u_\mu(t)) \longrightarrow w(t)$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ faible $*$.

f étant continue et $u_\mu \longrightarrow u$ presque partout, ceci entraîne que

(29) $$f(t,u_\mu(t)) \longrightarrow f(t,u(t)).$$

Il est clair d'autre part que $\|f(t,u_\mu(t))\|_{L^2(Q)} \leqslant C_3$, C_3 étant constante indépendante de t.
On peut alors appliquer le Lemme 1 (cf. appendix):

(30) $f(t,u_\mu(t)) \longrightarrow f(t,u(t))$ dans $L^2(Q)$ faible
i.e. $f(t,u(t)) = w(t)$.

Par conséquent

(31) $f(t,u_\mu(t) \longrightarrow f(t,u(t))$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ faible $*$.

De (31) on déduit que

$$(f(t,u_\mu(t)),w)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (f(t,u(t)),w)_{L^2(\Omega)}$$

dans $L^\infty(0,T)$ faible $*$, $\forall w \in L^2(\Omega)$.

On a donc (27) avec $w = v_j \in H_0^1(\Omega)$ $(v_k(x) = \sin k\pi x)$.
D'autre part (24) entraîne évidemment

$$(32)\quad a(u_\mu(t),v_j) \longrightarrow a(u(t),v_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } * \text{ quand } \mu \to \infty.$$

De même

$$(33)\quad (u'_\mu,v_j)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u',v_j)_{L^2(\Omega)} \quad \text{dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } * \text{ quand } \mu \to \infty.$$

On peut alors passer à la limite dans (9) que l'on utilise pour $n = \mu > j$ ($p = j$ fixé). Finalement on obtient, grâce à (27), (32) et (33),

$$(34)\quad \frac{d}{dt}\left[(u',v_j)_{L^2(\Omega)}\right] + a(u,v_j) = \varepsilon(f(t,u),v_j)_{L^2(\Omega)}$$

dans $L^\infty(0,T)$ faible $*$. D'où, d'après les propriétés de la "base" v_j, on a

$$(35)\quad \frac{d}{dt}\left[(u',v)_{L^2(\Omega)}\right] + a(u(t),v) = \varepsilon(f(t,u),v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est la formulation variationnelle (7), la solution $u(t)$ étant telle que

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = u' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Il nous reste à montrer que les conditions aux limites sont satisfaités i.e.

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1. \end{cases}$$

(a) $\underline{u(0) = u_0}$

$$u_{\mu}(0) = u_{0\mu} \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad (\text{par } (10)),$$

d'autre part u_{μ}, $u'_{\mu} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. Ceci entraîne, par le Lemme 2 (cf. appendix), que $u_{\mu}(t)$ est continue de $[0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$. De même u est continue de $[0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ i.e.

$$\|u_{\mu}(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \|u_{\mu}(0) - u_{\mu}(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{\mu}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t) - u(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

$\|u_{\mu}(0) - u_{\mu}(t)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u(t) - u(0)\|_{L^2(\Omega)}$ tendent vers 0, car $u_{\mu}(t)$ et $u(t)$ sont continues,

$\|u_{\mu}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$, car $u_{\mu}(t) \longrightarrow u(t)$, quand $\mu \longrightarrow \infty$, dans $L^2(\Omega)$ fort, du fait de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et de (22).

Finalement $u(0) = u_0$.

(b) $$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

On a $(u'_\mu, v_j) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$ (par (33)). De plus

$$(u''_\mu, v_j) = \varepsilon(f(t,u_\mu),v_j)_{L^2(\Omega)} - a(u_\mu, v_j) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$$

(par (27) et (32)), et comme $(u''_\mu, v_j)_{L^2(\Omega)} = \frac{d}{dt}(u'_\mu, v_j)_{L^2(\Omega)}$ (dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$). D'où, par le même Lemme 2, $(u'_\mu, v_j)_{L^2(\Omega)}$ est continue de $[0,T] \to \mathbb{R}$.

De même $(u', v_j)_{L^2(\Omega)}$ est continue de $[0,T] \to \mathbb{R}$ et

(36) $$|(u'_\mu(0) - u'(0), v_j)_{L^2(\Omega)}| \leq$$

$$\leq |(u'_\mu(0) - u'_\mu(t), v_j)_{L^2(\Omega)}| + |(u'_\mu(t) - u'(t), v_j)_{L^2(\Omega)}| +$$

$$+ |(u'(t) - u'(0), v_j)_{L^2(\Omega)}| .$$

Dans (36) le premier et le troisième terme du second membre tendent vers 0, car $(u'_\mu(t), v_j)_{L^2(\Omega)}$ et $(u'(t), v_j)_{L^2(\Omega)}$ sont continues en t. Enfin $|(u'_\mu(t) - u'(t), v_j)_{L^2(\Omega)}| \to 0$, quand $\mu \to \infty$, grâce à (22), d'où convergence faible dans $L^2(\Omega)$. Finalement $(u'_\mu(0), v_j)_{L^2(\Omega)} \to (u'(0), v_j)_{L^2(\Omega)}$, quand $\mu \to \infty$.

D'autre part $u'_\mu(0) = u_{1\mu} \to u_1$ dans $L^2(\Omega)$ fort (par (10)), quand $\mu \to \infty$ i.e.

$$u'(0) = u_1 .$$

4. Unicité de la solution du problème (1)

Pour démontrer l'unicité nous utiliserons un procédé classique dans les équations hyperboliques linéaires [6].

Soient donc u et v deux solutions du problème (1) et posons $w = u - v$. La fonction w est alors une solution du problème suivant

$$(37)\quad \begin{cases} w'' - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varepsilon\left[f(t,u) - f(t,v)\right] \\ \\ w(0) = w'(0) = 0;\ w \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\ w' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Soit $S \in]0,T[$, définissons $\psi(t)$ par

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^S w(\sigma)d\sigma, & S \geqslant t \\ \\ 0 \quad , & S < t. \end{cases}$$

Posons

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)d\sigma \Rightarrow \psi(t) = w_2(t) - w_1(S) \quad (S \geqslant t).$$

Multiplions alors scalairement (37) par $\psi(t)$. Toutes les intégrations par parties étant justifiées, il vient alors

$$(38)\quad -\int_0^S (w',\psi')_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^S \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{L^2(\Omega)} dt =$$

$$= \varepsilon \int_0^S (f(t,u) - f(t,v),\psi)_{L^2(\Omega)}dt.$$

Soit encore, car $\psi' = w$,

$$-\frac{1}{2}\int_0^S \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^S a(\psi',\psi)dt =$$

$$= \varepsilon \int_0^S (f(t,u) - f(t,v),\psi)_{L^2(\Omega)}dt$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}\int_0^S \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^S \frac{d}{dt}(\|\psi(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)})dt' =$$

$$= \varepsilon\int_0^S (f(t,u) - f(t,v),\psi)_{L^2(\Omega)}dt,$$

(39) $$-\frac{1}{2}\left[\|w(S)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(S)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right] =$$

$$= \varepsilon\int_0^S (f(t,u) - f(t,v),\psi)_{L^2(\Omega)}dt.$$

Or, $f(t,u)$ étant lipschitzienne par rapport à u, il vient

$$|(f(t,u) - f(t,v),\psi)_{L^2(\Omega)}| \leqslant A(t)\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|\psi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et (39) se transforme en

(40) $$\sigma(S) = \|w(S)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(S)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\int_0^S A(t)\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left[\|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \|w_1(S)\|_{H_0^1(\Omega)}\right]dt.$$

L'utilisation de l'inégalité

$$2ab \leqslant \frac{1}{\alpha}a^2 + \alpha b^2, \quad \forall\alpha > 0$$

nous amène de (40) à

$$\sigma(S) \leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right) \int_0^S A(t).\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \tag{41}$$

$$+ \varepsilon\alpha \int_0^S A(t)\|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt +$$

$$+ \varepsilon\alpha' \int_0^S A(t)\|w_1(S)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt, \quad \forall\alpha \text{ et } \alpha' > 0.$$

Soit encore

$$\sigma(S) \leqslant 2\varepsilon \operatorname{Max}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right) \int_0^S A(t).\sigma(t) dt + \tag{42}$$

$$+ \varepsilon\alpha'\|w_1(S)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \int_0^S A(t) dt.$$

$A(t)$ est de carré intégrable sur $[0,T]$, d'où $A(t)$ intégrable sur $[0,T]$. Il s'ensuit alors que

$$\varepsilon\alpha'\|w_1(S)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \int_0^S A(t) dt \leqslant \varepsilon\alpha'\sigma(S)\mathcal{A}(T). \tag{43}$$

En choisissant α' tel que $\varepsilon\alpha'\mathcal{A}(T) \leqslant 1$, ce qui sera toujours possible si ε est petit, nous obtenons finalement grâce à (42) et (43):

$$\sigma(S) \leqslant C(T) \int_0^S A(t)\sigma(t) dt \leqslant C(T) \left(\int_0^T A^2(t) dt\right)^{1/2} \left(\int_0^S \sigma^2(t) dt\right)^{1/2},$$

où $C(T)$ est une constante ne dépendant que de T; c'est-à-dire encore

$$\sigma^2(S) \leqslant C^2(T) \int_0^T A^2(t)dt \int_0^S \sigma^2(t)dt. \tag{44}$$

Le lemme de Gromwall entraîne $\sigma^2(S) = 0$ i.e. $u = v$.

On a donc le théorème que voici.

T h é o r è m e 1. Le problème (1) avec $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ sous les hypothèses (12) admet une solution et une seule.

R e m a r q u e . De (23) et grâce à l'unicité de la solution u, c'est toute la suite $\{u_n\}$ qui converge vers u dans $L^2(Q)$ fort.

5. Limite quand ε tend vers 0

Soit u_ε la solution unique de l'équation variationnelle (7). Appelons $u_{n,\varepsilon}$ la suite u_n définie par (8). Par (23) on a

$$\begin{cases} \| u_{n,\varepsilon} \|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} \leqslant M \\ \| u'_{n,\varepsilon} \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leqslant M, \end{cases} \tag{45}$$

où M est une constante indépendante de n et ε.

Il en résulte, par le théorème de Banach-Alaogu, que la solution u_ε est telle que

$$\begin{cases} \| u_\varepsilon \|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} \leqslant M \\ \| u'_\varepsilon \|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leqslant M. \end{cases} \tag{46}$$

De (46) il suit en particulier que

$$\| u_\varepsilon \|_{H^1(Q)} \leqslant M\sqrt{2T}, \quad \forall \varepsilon, \quad 1 \geqslant \varepsilon > 0.$$

On peut donc extraire de $\{u_\varepsilon\}$ une suite $\{u_{\varepsilon_j}\}$, où ε_j tend vers 0, quand j tend vers l'infini, et telle que

$$(47)\quad \begin{cases} u_{\varepsilon_j} \to \bar{u} & \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^1) \text{ faible } *, \text{ quand } j \to \infty \\ u'_{\varepsilon_j} \to \bar{u}' & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2) \text{ faible } *, \text{ quand } j \to \infty \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} u_{\varepsilon_j} \to \bar{u} & \text{dans } L^2(Q) \text{ fort, quand } j \to \infty \\ u_{\varepsilon_j} \to \bar{u} & \text{dans } Q \text{ p.p., quand } j \to \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_j\, f(t,u_{\varepsilon_j}) \to 0$, quand j tend vers l'infini, p.p. dans Q.

D'autre part

$$\|\varepsilon f(t,u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(t,u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq f_1(t,M\sqrt{2}) \leq C', \ \forall t \in [0,T],$$

C' étant constante indépendante de ε, car f_1 est continue. D'où $\|\varepsilon_j\, f(t,u_{\varepsilon_j})\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ est bornée indépendamment de ε_j. Donc il existe une sous-suite extraite encore appelée $\{\varepsilon_j\}$ telle que

$$\varepsilon_j\, f(t,u_{\varepsilon_j}) \to g(t) \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

Mais

$$\|\varepsilon_j\, f(t,\, u_{\varepsilon_j})\|^2_{L^2(Q)} \leq C'^2 T, \quad \forall j,$$

alors, d'après le Lemme 1, ceci entraîne que $\varepsilon_j\, f(t,u_{\varepsilon_j}) \to 0$ dans $L^2(Q)$ faible. Donc

(49) $\qquad \varepsilon_j f(t,u_{\varepsilon_j}) \to 0$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ faible *.

Or, par (47), on a

$$(50)\quad \begin{cases} a(u_{\varepsilon_j},v_p) \to a(\bar{u},v_p) & \text{dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } * \\ \langle u'_{\varepsilon_j},v_p\rangle_{L^2(\Omega)} \to \langle \bar{u}',v_p\rangle_{L^2(\Omega)} & \text{dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Donc

$$(51)\quad \frac{d}{dt}\langle u'_{\varepsilon_j},v_p\rangle_{L^2(\Omega)} \to \frac{d}{dt}\langle \bar{u}',v_p\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Or, les u_{ε_j} vérifient l'équation

$$(52)\quad \frac{d}{dt}\langle u'_{\varepsilon_j},v_p\rangle_{L^2(\Omega)} = -a(u_{\varepsilon_j},v_p) + \varepsilon_j\langle f(t,u_{\varepsilon_j}),v_p\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, par (49), (50), (51) et (52), $\bar{u}$ vérifie l'équation

$$(53)\quad a(\bar{u},v_p) + \frac{d}{dt}\langle \bar{u}', v_p\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } *.$$

Les $\{v_p\}$ étant denses dans $H_0^1(\Omega)$, il en résulte en définitive que $\bar{u}$ satisfait à l'équation

$$(54)\quad \begin{cases} a(\bar{u},v) + \frac{d}{dt}\langle \bar{u}',v_p\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{avec } \bar{u} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad \bar{u}' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Par un raisonnement exactement semblable à celui utilisé au paragraphe 3 ((a), (b)), on démontre que la solution $\bar{u}$ de (54) est telle que

$$(55) \qquad \begin{cases} \bar{u}(0) = u_0 \\ \bar{u}'(0) = u_1 . \end{cases}$$

Donc $\bar{u}$ satisfait finalement au problème (54), (55). Il y a évidemment unicité de ce problème (faire $f = 0$ dans (7)).

Du fait de l'unicité du problème (54), (55) c'est toute la suite $\{u_\varepsilon\}$ qui tend vers $\bar{u}$ dans $L^2(Q)$ fort, quand ε tend vers 0.

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 2. u_ε solution unique du problème (7) tend vers un élément u solution unique du problème (54), (55) dans $L^2(Q)$ fort.

Remarque. Il peut être démontré, par des considérations analogues à celles qui précèdent, l'existence et l'unicité du problème suivant (P):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon\,[f_1(t,u) + f_2(x,t)] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

f_1 vérifiant les mêmes hypothèses que la fonction f précédemment considérée et $f_2 \in L^2(Q)$.

Appendix

Lemme 1. Soit un ouvert de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ et g_μ, $g \in L^q(\theta)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\| g_\mu \|_{L^q(\theta)} \leq C \quad \text{et} \quad g_\mu \to g \ \text{p.p. dans } \theta,$$

alors $g_\mu \to g$ dans $L^q(\theta)$ faible.

Lemme 2. Si $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors f est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \rightarrow X$.

BIBLIOGRAPHY

[1] I. Białynicki-Birula, J. Mycielski: Wave equations with logarithmic non linearities, Bull. Acad. Polon. Sci., 23 (1975) 461-466.

[2] J. Boujot, A. Pham Ngoc Dinh, J.P. Veyrier: Oscillateurs harmoniques faiblement perturbés: l'algorithme des "Pas de géant" RAIRO Analyse numérique, 4 (1980) 3-23.

[3] A. Haraux: Non linear evolution equations-global behavior of solutions. Lecture Notes in Math. 841, Springer (1981).

[4] V. Lakshmikantham, S. Leela: Differential and integral inequalities. Vol. I, Academic Press, 1969.

[5] J.L. Lions: Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer Verlag, 1961.

[6] J.L. Lions: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, 1969.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'ORLÉANS,
45046 - ORLEANS CEDEX, FRANCE
Received June 30, 1980; revised version October 1st, 1982.