DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XV No 3 1982

Zdzisław Puzio

PREMIER PROBLÈME DE FOURIER POUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASI-LINÉAIRES DU TYPE PARABOLIQUE

L'objet de ce travail est une extension du travail [4] au cas d'un système (1) d'équations quasi-linéaires est sous les hypothèses moins fortes pour les coefficients d'équations qui peuvent être non-bornés. On a résolu le problème (1), (10), (11) par la méthode de la fonction de Green et à l'appui du théorème de Banach-Cacciopoli.

1. Énoncé du problème

Considérons dans la région $D = \Omega \times (0,T\rangle$ l'équation

$$\hat{\Psi}[u] = f(x,t,u,D_x u), \tag{1}$$

où

$$u = [u^1,\dots,u^m] \quad (m \geq 1),$$

$$D_x u = \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u^m}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u^1}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial u^m}{\partial x_n}\right],$$

$$\hat{\Psi}[u] = \left[\hat{\Psi}^1[u],\dots,\hat{\Psi}^m[u]\right],$$

$$\hat{\varphi}^{i}[u(x,t)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{i}_{\alpha\beta}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial^2 u^i(x,t)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} b^{i}_{\alpha}(x,t,u(x,t)) \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x_\alpha} + c^i(x,t)u^i(x,t) - \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t}$$

$$(i=1,\dots,m),$$

$$f(x,t,u,D_x u) = \left[f^1(x,t,u,D_x u),\dots,f^m(x,t,u,D_x u)\right],$$

Ω est un domaine borné dans l'espace euclidien R^n à n dimensions R^n $(n \geqslant 2)$. En outre

$|xy|$ désigne la distance euclidienne des points $x,y \in R^n$,

$|xp_x| = \inf_{y\in\partial\Omega}|xy|$, $I = (0,T\rangle$, $S = \partial\Omega \times I$, $Q = \langle -q,q\rangle$,

où q et T sont des constantes positives.

Admenttons les hypothèses suivantes:

I. La surface $\partial\Omega$ vérifie la condition de Liapounoff avec un exposant $\varkappa \in (0,1\rangle$.

II. Les fonctions réelles $a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m)$ $(i=1,\dots,m;$ $\alpha,\beta=1,\dots,n)$ sont définies dans la région $D_a = \bar{D}\times Q^m$, vérifient dans D_a les conditions de Hőlder-Lipschitz

$$(2) \qquad \left|a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m) - a^i_{\alpha\beta}(\bar{x},\bar{t},\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\left[|x\bar{x}|^h + |t-\bar{t}|^{h'} + \sum_{j=1}^{m} |p_j-\bar{p}_j|\right]$$

(où $h,h' \in (0,1\rangle$),

possèdent dans D_a des dérivées partielles, relativement aux variables $p_1,\dots,p_m$, bornées et vérifiant les inégalités

$$(3)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial p_j} a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m) - \frac{\partial}{\partial p_j} a^i_{\alpha\beta}(\bar{x},\bar{t},\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[|x\bar{x}|^h + |t-\bar{t}|^{h'} + \sum_{k=1}^{m} |p_k-\bar{p}_k|\right]$$

$$(i,j = 1,\dots,m;\ \alpha,\beta=1,\dots,n).$$

III. Les formes quadratiques

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m)\lambda_\alpha\lambda_\beta,\ (i=1,\dots,m),$$

sont définies-positives dans la région D_a.

IV. Les fonctions réelles $b^i_\alpha(x,t,p_1,\dots,p_m)$, $(i=1,\dots,m;$ $\alpha=1,\dots,n)$ sont définies et continues dans la région $D_b=D\times Q^m$, vérifient dans D_b les inégalités

$$(4)\qquad \left|b^i_\alpha(x,t,p_1,\dots,p_m)\right| \leqslant \mathrm{const}\ t^{-\delta}|xp_x|^{-\gamma}$$

et satisfont aux conditions suivantes

$$(5)\qquad \left|b^i_\alpha(x,t,p_1,\dots,p_m) - b^i_\alpha(\bar{x},t,\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[|x\bar{x}|^h t^{-\delta} + \sum_{j=1}^{m} |p_j-\bar{p}_j|\right]$$

dans tout région $D^*_b = \Omega^*\times I\times Q^m$, où Ω^* est un domaine fermé situé à l'intérieur du domaine Ω ;
δ, γ sont des constantes non négatives vérifiant des inégalités $\gamma+2\delta < 1$, $\delta < \min(\frac{h}{2}, h')$.

V. Les fonctions réelles $c^i(x,t)$, $(i=1,\dots,m)$, sont définies et continues dans la région D, vérifient les inégalités

$$|c^i(x,t)| \leqslant \text{const } t^{-\delta}|xp_x|^{-1-\gamma} \tag{6}$$

et satisfont aux conditions de Hölder

$$|c^i(x,t) - c^i(\bar{x},t)| \leqslant \text{const}|x\bar{x}|^h t^{-\delta} \tag{7}$$

dans tout domaine $D^* = \Omega^* \times I$.

VI. Les fonctions réelles $f^i(x,t,p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_{mn})$, $(i=1,\dots,m)$, sont définies et continues dans la région $D_f = D\times Q^m\times R^{mn}$, vérifient les inégalités

$$|f^i(x,t,p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_{mn})| \leqslant \tag{8}$$

$$\leqslant M_f t^{-\delta}|xp_x|^{-\gamma} + M_f' \sum_{j=1}^{mn} |q_j|^r,$$

où $r \in (0,1\rangle$, $M_f, M_f' > 0$, et satisfont aux conditions de Hölder-Lipschitz

$$|f^i(x,t,p_1,\dots,q_{mn}) - f^i(\bar{x},t,\bar{p}_1,\dots,\bar{q}_{mn})| \leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant K_f|x\bar{x}|^h t^{-\delta} + K_f' \sum_{j=1}^{m} |p_j-\bar{p}_j| + K_f' \sum_{j=1}^{mn} |q_j-\bar{q}_j|,$$

où K_f, K_f' sont des constantes positives.

Nous posons le problème de la recherche d'une fonction $u(x,t) = [u^1(x,t),\dots,u^m(x,t)]$ qui vérifie

1) l'équation (1) en tout $(x,t) \in D$,

2) la condition initiale

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \quad (\text{en tout } x \in \Omega), \tag{10}$$

3) la condition limite

(11) $$\lim_{\Omega \ni x \to p \in \partial\Omega} u(x,t) = 0 \quad \text{(en tout } (p,t) \in S).$$

2. <u>Construction de la solution fondamentale dans tout l'espace</u>

Prolongeons les fonctions $a^i_{\alpha\beta}$, b^i_α, c^i, $(i=1,\dots,m;$ $\alpha,\beta=1,\dots,n)$, sur tout l'espace R^n (t restant dans l'intervalle $\langle 0,T\rangle$) de façon que

a) les fonctions $a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m)$ vérifient dans la région $\{(x,t,p_1,\dots,p_m): x \in R^n,\ t \in I,\ p_1,\dots,p_m \in Q\}$, l'inégalité (2) et l'hypothèse III,

b)

$$a^i_{\alpha\beta}(x,t,p_1,\dots,p_m) = \begin{cases} 1 & (\alpha=\beta) \\ 0 & (\alpha\neq\beta) \end{cases}$$

pour $x \in R^n-\Omega_1$, $t \in \langle 0,T\rangle$, $p_1,\dots,p_m \in Q$ ($\Omega_1 \subset R^n$ est borné, arbitrairement choisi et $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$),

c) $b^i_\alpha(x,t,p_1,\dots,p_m) = 0$ pour $x \in R^n-\Omega$, $t \in I$, $p_1,\dots,p_m \in Q$,

d) $c^i(x,t) = 0$ pour $x \in R^n-\Omega$, $t \in I$.

Considérons maintenant dans la région $R^n \times I$ l'équation

(12) $$\hat{\Psi}_{(u)}[v(x,t)] = 0,$$

où

$$v(x,t) = [v^1(x,t),\dots,v^m(x,t)],$$

$$\hat{\Psi}_{(u)}[v] = [\hat{\Psi}^1_{(u)}[v],\dots,\hat{\Psi}^m_{(u)}[v]],$$

$$(13)\qquad \hat{\Psi}_{(u)}[v] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{i}_{\alpha\beta}(x,t,u(x,t))\frac{\partial^2 v^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n} b^{i}_{\alpha}(x,t,u(x,t))\frac{\partial v^i}{\partial x_\alpha} + c^i(x,t)v^i(x,t) - \frac{\partial v^i}{\partial t}$$

$$(i=1,\dots,m),$$

les composantes de la fonction $u(x,t) = [u^1(x,t),\dots,u^m(x,t)]$ sont des fonctions réelles, bornées, arbitraires dans la région $R^n \times I$ et vérifient les conditions

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} u^i(x,t) = 0, \quad \text{pour} \quad x \in R^n - \Omega, \ t \in (0,T\rangle \\ |u^i(x,t)-u^i(\bar{x},\bar{t})| \leqslant K(|x\bar{x}|^{\theta} + |t-\bar{t}|^{\theta'/2}) \end{array}\right\} i=1,\dots,m,$$

θ, θ' étant des nombres de l'intervalle $(2\delta,1)$ et K une constante positive.

De même que dans le travail [8] nous construisons la solution fondamentale de l'équation (12) sous la forme

$$\Gamma_{(u)}(x,t;y,\tau) = \left[\Gamma^1_{(u)}(x,t;y,\tau),\dots,\Gamma^m_{(u)}(x,t;y,\tau)\right],$$

avec

$$(15)\qquad \Gamma^i_{(u)}(x,t;y,\tau) = \omega^{i;y,\tau}_{(u)}(x,t;y,\tau) + \bar{\omega}^i_{(u)}(x,t;y,\tau),$$

$$(i=1,\dots,m),$$

où on a posé

$$(16)\qquad \omega^{i;y,\tau}_{(u)}(x,t;y,\tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\theta^{i;z,\zeta}_{(u)}(x,y)}{4(t-\tau)}\right],$$

$$(17)\qquad \theta^{i;z,\zeta}_{(u)}(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A^{i}_{\alpha\beta}(z,\zeta;u(z,\zeta))(x_\alpha-y_\alpha)(x_\beta-y_\beta),$$

$A^{i}_{\alpha\beta}$ (pour tout $i=1,\dots,m$) désignant les éléments de la matrice inverse de la matrice $\left[a^{i}_{\alpha\beta}\right]$, et enfin

$$(18)\qquad \tilde{\omega}^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{R^n} \omega^{i;z,\zeta}_{(u)}(x,t;z,\zeta)\ \Phi^{i}_{(u)}(z,\zeta;y,\tau)dzd\zeta;$$

la fonction $\Phi^{i}_{(u)}$ $(i=1,\dots,m)$ figurant dans la formule (18) est une solution de l'équation intégrale singulière de Volterra de la forme

$$(19)\qquad \Phi^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) = N^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{R^n} N^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta)\times \Phi^{i}_{(u)}(z,\zeta;y,\tau)dzd\zeta,\quad (i=1,\dots,m),$$

Le noyau de l'équation (19) donné par les formules

$$N^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta) = \lambda^{i}_{(u)}(x,t)\hat{\Psi}^{i}_{(u)}\left[\omega^{i;z,\zeta}_{(u)}(x,t;z,\zeta)\right],$$

$$\lambda^{i}_{(u)}(x,t) = (2\sqrt{\pi})^{-n}\left\{\det\left[A^{i}_{\alpha\beta}(x,t,u(x,t))\right]\right\}^{1/2}$$

vérifie, d'après les inégalités de [7] (p.147), une limitation aux singularités faibles

(20) $$\left|N^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_N(K)\left[|xz|^{-n-2+2\mu+h_1} + t^{-\delta}|xp_x|^{-\gamma}|xz|^{-n-1+2\mu} + \right.$$

$$\left. + t^{-\delta}|xp_x|^{-1-\gamma}|xz|^{-n+2\mu}\right](t-\zeta)^{-\mu}\exp(-k|xz|^{\chi}),$$

où $h_1 = \min(h, 2h', \theta, \theta')$, $k > 0$, $\chi \in (1,2\rangle$, μ est un nombre choisi arbitrairement dans l'intervalle

$$\left(\max\left(\frac{1+\gamma}{2}, 1 - \frac{h_1}{2}\right), 1 - \delta\right)$$

et $C_N(K)$ est une constante positive qui dépend du coefficient de Hölder K pour la fonction u. Il existe donc la solution unique de l'équation (19) donnée par la formule de Volterra

(21) $$\Phi^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) = N^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{R^n} R^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta)N^{i}_{(u)}(z,\zeta;y,\tau)dzd\zeta, \quad (i=1,\dots,m),$$

où (pour $i=1,\dots,m$)

$$R^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{ik}_{(u)}(x,t;z,\zeta),$$

$$N^{i0}_{(u)}(x,t;z,\zeta) = N^{i}_{(u)}(x,t;z,\zeta),$$

$$N^{ik}_{(u)}(x,t;z,\zeta) =$$

$$= \int_{\zeta}^{t}\int_{R^n} N^{i}_{(u)}(x,t;w,\xi)N^{i\;k-1}_{(u)}(w,\xi;z,\zeta)dwd\xi, \qquad (k=1,2,\ldots).$$

La série $R^{i}_{(u)}$ $(i=1,\ldots,m)$ des noyaux itérés est absolument et uniformément convergente excepté un certain nombre des composantes non-bornées dans la région

$$\{(x,t;z,\zeta) : (x,t),(z,\zeta) \in R^n \times I\}.$$

On peut démontrer aussi (cf. [2]) que les fonctions $\Phi^{i}_{(u)}$ $(i=1,\ldots,m)$ vérifient la condition de Hölder

$$(22) \qquad \left|\Phi^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau) - \Phi^{i}_{(u)}(\bar{x},t;y,\tau)\right| \leqslant \frac{\text{const}\,|x\bar{x}|^{h^*}}{\inf_{x\in D^*} |xy|^{3+n}}$$

dans tout domaine borné et fermé $D^* \subset R^n$, ne contenant pas de point y, et pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

La fonction $\Gamma_{(u)}(x,t;y,\tau)$ donnée par les formules (15)-(18) est donc définie pour tout couple des points $x,y \in R^n$, $x \neq y$ et pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ et vérifie l'équation (12) en tout point $x \in R^n - \partial\Omega$, $x \neq y$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Les fonctions $\Gamma^{i}_{(u)}$ $(i=1,\ldots,m)$ et ses dérivées admettent des limitations de la même forme que les fonctions $\omega^{i;y,\tau}_{(u)}$ (voir [7] p.147) à savoir

$$(23) \qquad \left|\partial^s_x \Gamma^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_\Gamma(K)(t-\tau)^{-\mu}|xy|^{2\mu-n-s} \exp\left[-k|xy|^{\varkappa}\right],$$

où $s = 0,1,2$, $\mu \in (0,1)$, $C_\Gamma(K)$ est une constante positive dépendant du coefficient K (∂^s_x désigne la dérivée partielle d'ordre s et $\partial^0_x \Gamma^{i}_{(u)} = \Gamma^{i}_{(u)}$).

3. Détermination de la fonction de Green

D é f i n i t i o n . Nous appelons premier fonction de Green relative à l'équation (12) pour le domaine Ω une telle fonction

$$G_{(u)}(x,t;y,\tau) = \left[G^1_{(u)}(x,t;y,\tau),\dots,G^m_{(u)}(x,t;y,\tau)\right]$$

des deux couples de variables dans

$$x,y \in \Omega, \quad x \neq y, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T$$

déterminée par des conditions suivantes:

a) la fonction $G_{(u)}$ tend vers zéro, si le point x tend vers un point arbitraire $p \in \partial\Omega$, le point y restant fixé à l'intérieur du domaine Ω et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$;

$$\lim_{x \to p} G_{(u)}(x,t;y,\tau) = 0, \tag{24}$$

b) la fonction $G_{(u)}$ est une somme de la forme

$$G_{(u)}(x,t;y,\tau) = \Gamma_{(u)}(x,t;y,\tau) - H_{(u)}(x,t;y,\tau), \tag{25}$$

où la fonction $H_{(u)} = \left[H^1_{(u)},\dots,H^m_{(u)}\right]$ est continue dans $x,y \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ et possède la propriété limite

$$\lim_{t \to \tau} H_{(u)}(x,t;y,\tau) = 0, \tag{26}$$

c) la fonction $H_{(u)}$ satisfait à l'équation (12) par rapport aux variables x,t en tout point $x \in \Omega$ (même si $x = y$) et pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, à savoir

$$\hat{\Psi}_{(u)}\left[H_{(u)}(x,t;y,\tau)\right] = 0. \tag{27}$$

Il en résulte que la composante régulière $H_{(u)}$ de la fonction de Green, dépendant de la fonction donnée $u = [u^1,\dots,u^m]$, est une solution du premier problème de Fourier suivant.
La fonction $H_{(u)}$ vérifie donc
1) l'équation (27)
2) la condition initiale (26)
3) la condition limite

$$(28) \qquad \lim_{x\to p\in\partial\Omega} H_{(u)}(x,t;y,\tau) = \Gamma_{(u)}(p,t;y,\tau),$$

y étant fixé à l'intérieur du domaine Ω et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$.

De même que dans le travail [3] la fonction $H^i_{(u)}$ peut être déterminée par l'intégrale

$$(29) \quad H^i_{(u)}(x,t;y,\tau) = \int_\tau^t \int_{\partial\Omega} \Gamma^i_{(u)}(x,t;q,\zeta)\psi^i_{(u)}(q,\zeta;y,\tau)dqd\zeta, \qquad (i=1,\dots,m),$$

analogue au potentiel de simple couche, où la densité $\psi^i_{(u)}$ $(i=1,\dots,m)$ est une solution de l'équation intégrale de Volterra de la forme

$$(30) \quad -\frac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^n\left(\det\left[A^i_{\alpha\beta}(p,t,0)\right]\right)^{-\frac{1}{2}} \psi^i_{(u)}(p,t;y,\tau) +$$

$$+\int_\tau^t \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dT_p}\Gamma^i_{(u)}(p,t;q,\zeta)\, \psi^i_{(u)}(q,\zeta;y,\tau)dqd\zeta =$$

$$= \frac{d}{dT_p}\Gamma^i_{(u)}(p,t;y,\tau), \qquad (i=1,\dots,m),$$

dans la région $Q_1 = \{(q,\zeta;y,\tau) : q\in\partial\Omega,\ y\in\Omega,\ \zeta,\ \tau\in I\}$.
La dérivée transversale $\frac{d\Gamma^i_{(u)}}{dT_p}$ est déterminée par la formule

$$\frac{d}{dT_p}\Gamma^i_{(u)}(p,t;y,\tau) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(p,t,0)\cos(n_p,x_\beta)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma^i_{(u)}(p,t;y,\tau), \qquad (i=1,\dots,m),$$

et admet une limitation à singularités faibles séparées (voir [7] p.99)

$$\left|\frac{d}{dT_p}\Gamma^i_{(u)}(p,t;q,\zeta)\right| \leqslant C(K)(t-\zeta)^{-\mu_1}|pq|^{\varkappa_1+2\mu_1-n-1},$$

où $\varkappa_1 = \min(h_1,\varkappa)$, $C(K)$ est une constante positive et μ_1 est choisi dans l'intervalle $(1-\varkappa_1/2,1)$.

L'équation intégrale (30) a donc une solution unique donnée par la formule de Volterra

$$(31)\qquad \varphi^i_{(u)}(p,t;y,\tau) = \overset{*}{\varphi}{}^i_{(u)}(p,t;y,\tau) +$$

$$+\int_\tau^t\int_{\partial\Omega}\overset{*}{R}{}^i_{(u)}(p,t;q,\zeta)\overset{*}{\varphi}{}^i_{(u)}(q,\zeta;y,\tau)\,dq\,d\zeta, \qquad (i=1,\dots,m),$$

où

$$\overset{*}{\varphi}{}^i_{(u)}(p,t;y,\tau) = -2(2\sqrt{\pi})^{-n}\left(\det\left[A^i_{\alpha\beta}(p,t,0)\right]\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dT_p}\Gamma^i_{(u)}(p,t;y,\tau)$$

et $\overset{*}{R}{}^i_{(u)}$ est le noyau résolvant du noyau

$$N^i_{(u)}(p,t;q,\zeta) = -\overset{*}{\varphi}{}^i_{(u)}(p,t;q,\zeta);$$

$\overset{*}{R}{}^{i}_{(u)}$ est donc donné par la série des noyaux itérés absolument et uniformément convergente dans la région

$$\{(p,t;q,\zeta) : p,q\in\partial\Omega \wedge t,\zeta\in I\}$$

excepté un certain nombre des composantes non-bornées.

En s'appuyant maintenant sur les formules (31), (32) et sur l'inégalité (23) nous obtenons une limitation de la forme

$$(33)\qquad \left|\psi^{i}_{(u)}(p,t;y,\tau)\right| \leqslant C_{\psi}(K)(t-\tau)^{-\mu}|py|^{2\mu-n-1}, \qquad (i=1,\dots,m),$$

où $\mu\in(0,1)$ et $C_{\psi}(K)$ est une constante positive.
De même que dans le travail [3] (p.300) on peut démontrer que les composantes de la fonction de Green vérifient l'inégalité de la forme

$$(34)\qquad \left|G^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau)\right| \leqslant C_{G}(K)(t-\tau)^{-\mu}|xy|^{2\mu-n}, \quad (i=1,\dots,m),$$

où $\mu\in\left(1-\frac{|h_1}{2}, 1\right)$ et $C_G(K)$ est une constante positive dépendant du coefficient K.

4. Résolution du problème

Considérons le système d'équations intégro-différentielles de la forme

$$(35)\qquad u^{i}(x,t) = -\int_0^t\int_{\Omega} G^{i}_{(u)}(x,t;y,\tau)\lambda^{i}_{(u)}(y,\tau)\times$$

$$\times f^{i}\left[y,\tau,u(y,\tau),D_y u(y,\tau)\right]dyd\tau, \qquad (i=1,\dots,m),$$

aux fonctions inconnues $u^1(x,t),\dots,u^m(x,t)$ définies, bornées et différentiables dans la région D. D'après les formules (25), (29) nous pouvons écrire les équations (35) sous la forme

$$(36)\qquad u^i(x,t) = -\int_0^t\int_\Omega \Gamma^i_{(u)}(x,t;y,\tau)\,\varrho^i(y,\tau,u,D_y u)\,dy\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \Gamma^i_{(u)}(x,t;q,\zeta)\,\eta^i(q,\zeta,u,D_q u)\,dq\,d\zeta,\quad (i=1,\dots,m),$$

où

$$(37)\qquad \varrho^i(y,\tau,u,D_x u) = \lambda^i_{(u)}(y,\tau)f^i\left[y,\tau,u,u(y,\tau),D_y u(y,\tau)\right],$$

$$(38)\qquad \eta^i(q,\zeta,u,D_x u) = \int_0\int_\Omega \psi^i_{(u)}(q,\zeta;y,\tau)\,\varrho^i(y,\tau,u,D_y u)\,dy\,d\tau.$$

Désignons maintenant (pour $i=1,\dots,m;\ \nu=1,\dots,n$)

$$u^i(x,t) = u^i_0(x,t),$$

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x_\nu} = u^i_\nu(x,t),$$

$$\Gamma^i_{(u)}(x,t;y,\tau) = \Gamma^i_0(u;x,t;y,\tau),$$

$$\frac{\partial\Gamma^i_{(u)}(x,t;y,\tau)}{\partial x_\nu} = \Gamma^i_\nu(u;x,t;y,\tau)$$

et considérons le système de $m(n+1)$ équations intégrales

(39) $$u^i_\nu(x,t) =$$

$$= -\int_0^t\int_\Omega \Gamma^i_\nu(u;x,t;y,\tau)\,\varrho^i(y,\tau,u^1_0(y,\tau),\dots,u^m_n(y,\tau))dyd\tau +$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} \Gamma^i_\nu(u;x,t;q,\zeta)\;\eta^i(q,\zeta,u^1_0,\dots,u^m_n)dqd\zeta$$

$$(i=1,\dots,m;\ \nu=0,1,\dots,n)$$

à $m(n+1)$ fonctions inconnues

$$u^1_0(x,t),\dots,u^m_0(x,t),\dots,u^1_n(x,t),\dots,u^m_n(x,t).$$

Nous démontrerons par l'application du théorème de Banach-Cacciopoli (voir [6], p.14) que le système (39) possède la solution unique.

Nous considérons donc un espace fonctionel Λ composé de tous les systèmes $U(x,t) = \left[u^1_0(x,t),\dots,u^m_n(x,t)\right]$ de fonctions vérifiant les conditions:

(40)

1. Les fonctions $u^i_0(x,t)$, $(i=1,\dots,m)$, sont définies dans la région $\bar{D}$ et vérifient dans $\bar{D}$ l'inégalité
$$\left|u^i_0(\bar{x},\bar{t}) - u^i_0(x,t)\right| \leqslant K\left[|xx|^\theta + |t-\bar{t}|^{\theta'/2}\right],$$
où K est une constante positive, θ, $\theta' \in (2\delta,1)$.
2. Les fonctions $u^i_\nu(x,t)$, $(i=1,\dots,m;\ \nu=1,\dots,n)$, sont définies et continues dans D et
$$\left|u^i_\nu(x,t)\right| \leqslant \mathrm{const}\left|xp_x\right|^{-\gamma},$$
où $\gamma \in \langle 0,1)$.

On définit la distance des deux points $U = \left[u^1_0,\dots,u^m_n\right]$, $\bar{U} = \left[\bar{u}^1_0,\dots,\bar{u}^m_n\right]$ de l'espace Λ par la formule

$$\delta(U,\bar{U}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{D} \left|u_0^i(x,t) - \bar{u}_0^i(x,t)\right| +$$

$$+ \max_{1\leqslant i\leqslant m} H\left[u_0^i(x,t) - \bar{u}_0^i(x,t)\right] +$$

$$+ \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant \nu\leqslant n}} \sup_{D}\left[\left|xp_x\right|^{\gamma} \left|u_\nu^i(x,t) - \bar{u}_\nu^i(x,t)\right|\right],$$

où

$$H\left[u_0^i(x,t)\right] = \sup_{\substack{(x,t)\in\bar{D}\\ (\bar{x},\bar{t})\in\bar{D}}} \frac{\left|u_0^i(x,t) - u_0^i(\bar{x},\bar{t})\right|}{|x\bar{x}|^{\theta} + |t-\bar{t}|^{\theta/2}} .$$

L'espace Λ ainsi défini est métrique et complet. Les égalités (39) permettent définir la transformation

$$U = \left[u_0^1,\dots,u_n^m\right] \to V = \left[v_0^1,\dots,v_n^m\right] = \mathcal{F}[U]$$

de l'espace Λ par les relations

$$(41)\qquad v_\nu^i(x,t) = -\int_0^t\int_\Omega \Gamma_\nu^i(u;x,t;y,\tau)\,\varrho^i(y,\tau,U)\,dyd\tau +$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} \Gamma_\nu^i(u;x,t;q,\zeta)\,\eta^i(q,\zeta,U)\,dqd\zeta,$$

$$(i=1,\dots,m;\ \nu=0,1,\dots,n),$$

où on a désigné $u = \left[u_0^1,\dots,u_0^m\right]$.

Nous démontrerons maintenant que le point transformé V appartient à Λ. Dans ce but nous admettons dans la région D les inégalités suivantes

$$(42)\qquad \begin{cases} \left|u_0^i(x,t)\right| \leqslant q \\ \left|u_0^i(x,t) - u_0^i(\bar{x},\bar{t})\right| \leqslant K\left[|x\bar{x}|^{\theta} + |t-\bar{t}|^{\theta/2}\right] \\ \left|u_\nu^i(x,t)\right| \leqslant g\left|xp_x\right|^{-\gamma} \end{cases}$$

où K,g sont des constantes positives arbitrairement choisies, $i=1,\dots,m$; $\nu=1,\dots,n$.

En s'appuyant sur des suppositions II, IV, V et sur (42) nous aurons des inégalités

$$(43)\qquad \begin{cases} \left|\lambda^i_{(u)}(y,\tau)\right| \leqslant \text{const} \\ \left|f^i(y,\tau,U)\right| \leqslant \text{const}\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]\tau^{-\delta}\left|yp_y\right|^{-\gamma}, \end{cases}$$

$$(i=1,\dots,m).$$

En appliquant les formules (33), (38), (43) nous obtenons l'inégalité

$$(44)\qquad \left|\eta^i(p,\zeta,U)\right| \leqslant C_\eta(K)\left[M_f'+mM_f(q^r+ng^r)\right]\zeta^{1-\bar{\mu}-\delta}, \qquad (i=1,\dots,m),$$

où $C_\eta(K)$ est une constante positive et $\bar{\mu}\in\left(\frac{1+\gamma}{2}, 1-\delta\right)$. D'après les inégalités (43), (44) et les théorèmes de [7] (p.98-102), où $\delta<1/2$, nous aurons les inégalités suivantes

$$\left|v_0^i(x,t)\right| \leqslant C_1(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+g^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta},$$

$$\left|v_0^i(x,t) - v_0^i(\bar{x},\bar{t})\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta}\left[|x\bar{x}|^{\theta} + |t-\bar{t}|^{\theta'/2}\right],$$

$$\left|v_\nu^i(x,t)\right| \leqslant C_3(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta}\left|xp_x\right|^{-\gamma},$$

$$(i=1,\dots,m;\ \nu=1,\dots,n),$$

où $C_1(K)$, $C_2(K)$, $C_3(K)$ sont des constantes positives. Nous en concluons que le point transformé V appartient à Λ si les constantes du problème vérifient les inégalités

$$(45)\qquad \begin{cases} C_1(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta} \leqslant q \\ C_2(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta} \leqslant K \\ C_3(K)\left[M_f+mM_f'(q^r+ng^r)\right]T^{1-\bar{\mu}-\delta} \leqslant g. \end{cases}$$

Nous démontrerons à présent que la transformation définie par les relations (41) vérifie l'inégalité

$$\delta(\bar{V},V) \leqslant \alpha\,\delta(\bar{U},U),$$

où $\bar{V} = \left[\bar{v}_0^1,\dots,\bar{v}_n^m\right]$, $V = \left[v_0^1,\dots,v_n^m\right]$ sont liées avec $\bar{U} = \left[\bar{u}_0^1,\dots,\bar{u}_n^m\right]$, $U = \left[u_0^1,\dots,u_n^m\right]$, respectivement, par les formules (41) et α est une constante positive inférieure à l'unité pour la constante T suffisamment petite.

En s'appuyant sur des suppositions II, IV, V, VI et sur (42) nous aurons les inégalités suivantes (pour $i=1,\dots,m$; $\nu=0,1,\dots,n$)

$$(46)\qquad \left|\lambda^i_{(\bar{u})}(x,t)-\lambda^i_{(u)}(x,t)\right| \leqslant \text{const} \max_{1\leqslant j\leqslant m}\ \sup_{\bar{D}}\left|\bar{u}_0^j(x,t)-u_0^j(x,t)\right|,$$

$$(47)\qquad \left|f^i(y,\tau,\bar{U}(y,\tau)) - f^i(y,\tau,U(y,\tau))\right| \leqslant$$

$$\leqslant mK_f' \max_{1\leqslant j\leqslant m}\ \sup_{\bar{D}}\left|\bar{u}_0^j(x,t) - u_0^j(x,t)\right| +$$

$$+ mnK_f'\left|yp_y\right|^{-\gamma} \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant\alpha\leqslant n}}\ \sup_{D}\left[\left|yp_y\right|^{\gamma}\left|\bar{u}_\alpha^j(y,\tau)-u_\alpha^j(y,\tau)\right|\right],$$

(48) $$\left|\Gamma^i_\nu(\bar{u};x,t;y,\tau) - \Gamma^i_\nu(u;x,t;y,\tau)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_4(K)}{(t-\tau)^\mu\,|xy|^{n+s-2\mu}}\left[\max_{1\leqslant j\leqslant m}\ \sup_{\bar{D}}\left|\bar{u}^j_0-u^j_0\right| + \max_{1\leqslant j\leqslant m} H\left[\bar{u}^j_0-u^j_0\right]\right]$$

(où $s = 0$ si $\nu = 0$ et $s = 1$ si $\nu \neq 0$),

(49) $$\left|\eta^i(p,\zeta;\bar{U}) - \eta^i(p,\zeta;U)\right| \leqslant M_\eta\, \zeta^{\varepsilon_0}\delta(\bar{U},U),$$

où

$$M_\eta = \max\left\{C_5(K)\left[M_f+mM'_f(q^r+ng^r)\right], C_6(K)mnK'_f\right\},$$

ε_0 est un nombre de l'intervalle $(0,1)$,
$C_4(K)$, $C_5(K)$. $C_6(K)$ sont des constantes positives.
En s'appuyant sur les inégalités (46) - (49) nous obtenons

$$\left|\bar{v}^i_0(x,t) - v^i_0(x,t)\right| \leqslant A_1 T^{\varepsilon_1}\delta(\bar{U},U),$$

$$|xp_x|^\gamma\left|\bar{v}^i_\nu(x,t) - v^i_\nu(x,t)\right| \leqslant A_2 T^{\varepsilon_2}\,\delta(\bar{U},U),$$

$$H\left[\bar{v}^i_0(x,t) - v^i_0(x,t)\right] \leqslant A_3 T^{\varepsilon_3}\,\delta(\bar{U},U),$$

$(i=1,\dots,m;\ \nu=1,\dots,n)$,
où

$$A_1 = \max\left\{C_7(K)\left[M_f+mM'_f(q^r+ng^r)\right]+C_8(K)K'_f, C_9(K)K'_f\right\} + C_{10}(K)M_\eta,$$

$$A_2 = \max\left\{C_{11}(K)\left[M_f+mM'_f(q^r+ng^r)\right]+C_{12}(K)K'_f, C_{13}(K)K'_f\right\}+ C_{14}(K)M_\eta,$$

$$A_3 = C_{15}(K)\left[M_f+mM'_f(q^r+ng^r)\right]+C_{16}M_\eta;$$

$C_7(K),\dots,C_{15}(K)$ sont des constantes positives dépendant du coefficient K et une constante positive C_{16} ne dépend pas de coefficient K; ε_1, ε_2, ε_3 sont des nombres de l'intervalle $(0,1)$.

Il s'ensuit que

$$\delta(\bar{V},V) \leqslant (A_1+A_2+A_3)T^{\varepsilon}\ \delta(\bar{U},U),$$

où ε dépend de nombres ε_1, ε_2, ε_3 et $\varepsilon \in (0,1)$. Nous pouvons choisir la constante T suffisamment petite pour qu'on obtienne la condition

$$(50) \qquad 0 < (A_1+A_2+A_3)T^{\varepsilon} < 1.$$

D'après le théorème de Banach-Cacciopoli le système d'équations (39) possède donc la solution unique

$$\tilde{U}(x,t) = \left[\tilde{u}_0^1(x,t),\dots,\tilde{u}_0^m(x,t),\dots,\tilde{u}_n^1(x,t),\dots,\tilde{u}_n^m(x,t)\right] \in \Lambda.$$

Or, d'après les propriétés des intégrales qui figurent dans les équations (39) nous avons

$$\tilde{u}^i(x,t) = \frac{\partial \tilde{u}_0^i(x,t)}{\partial x_\alpha}, \quad (i=1,\dots,m;\ \alpha=1,\dots,n),$$

en tout point $(x,t) \in D$, les fonctions trouvées $\tilde{u}^i(x,t) = \tilde{u}_0^i(x,t)$ présentent donc la solution unique du système (35). Ensuite, en s'appuyant sur les hypothèses II, VI et sur les propriétés des intégrales dans (36), nous en concluons que les fonctions

$$\varrho^i(y,\tau,\tilde{U}(y,\tau)) = \lambda^i_{(\tilde{u})}(y,\tau)f^i\left[y,\tau,\tilde{u}_0^i(y,\tau),\dots,\tilde{u}_n^m(y,\tau)\right]$$

$$(i=1,\dots,m)$$

vérifient la condition de Hölder par rapport à y dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$. Il en résulte que les fonctions $\tilde{u}^i(x,t)$, $(i=1,\dots,m)$, vérifient (dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$) l'équation (1) et la condition initiale

$$\lim_{t\to 0} \tilde{u}^i(x,t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega .$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{x \to p\in\partial\Omega} \tilde{u}^i(x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0,T\rangle\ ,\ i=1,\dots,m. \tag{51}$$

Dans ce but nous considérons une sphère $K(p,\rho)$ centrée au point arbitraire $p \in \partial\Omega$ et de rayon ρ . En demandant que $x \in K(p,\rho) \cap \Omega$ et en appliquant la formule (35) nous aurons

$$\tilde{u}^i(x,t) = \tag{52}$$

$$= - \int_0^t \int_{K'} G^i_{(\tilde{u})}(x,t;y,\tau)\lambda^i_{(\tilde{u})}(y,\tau)f^i[y,\tau,\tilde{u}(y,\tau),D_y\tilde{u}(y,\tau)]\,dyd\tau -$$

$$- \int_0^t \int_{\Omega-K'} G^i_{(\tilde{u})}(x,t;y,\tau)\lambda^i_{(\tilde{u})}(y,\tau)f^i[y,\tau,\tilde{u}(y,\tau)D_y\tilde{u}(y,\tau)]\,dyd\tau,$$

où $K' = \Omega \cap K(x,2\rho)$.

En s'appuyant maintenant sur les inégalités (34), (43) et en admettant que $\mu \in (\gamma/2, 1-\delta)$ nous obtenons l'inégalité

$$\left|\int_0^t \int_{K'} G^i\lambda^i f^i dyd\tau\right| \leqslant \text{const}\ C_G(K)\left[M_f + mM'_f(q^r+ng^r)\right] t^{1-\mu-\delta}\, \rho^{2\mu-\gamma}.$$

Nous avons donc, pour $t > 0$ fixé, la condition

$$\left|\int_0^t \int_{K'} G^i\lambda^i f^i dyd\tau\right| < \frac{1}{2}\,\varepsilon\ , \tag{53}$$

si

$$\rho < \left[\frac{1}{2}\ \text{const}\ C_G(K)\left[M_f + mM'_f(q^r+ng^r)\right] t^{1-\mu-\delta}\, \varepsilon\right]^{1/(2\mu-\delta)} .$$

Remarquons que $|xy| > \varrho$ et c'est pourquoi les fonctions $G^i_{(\tilde{u})}(x,t;y,\tau)$, $(i=1,\dots,m)$, tendent uniformément vers zéro, si $x \to p \in \partial\Omega$ et $y \in \Omega - K'$. Il existe donc ϱ_1 tel que

$$(54) \qquad \left| \int_0^t \int_{\Omega-K'} G^i \lambda^i f^i dy d\tau \right| < \frac{1}{2}\varepsilon ,$$

si $|xp| < \varrho_1$ (pour tout $i=1,\dots,m$). En vertu de (53) et (54) nous en concluons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta = \min(\varrho_1, \varrho)$ tel que $|\tilde{u}^i(x,t)| < \varepsilon$, si $|xp| < \eta$. La propriété limite (51) est donc établie.

Finalement, en rapprochant les résultats obtenus, on peut énoncer le théorème suivant.

T h é o r è m e . Si les fonctions $a^i_{\alpha\beta}$, b^i_α, c^i, f^i et la surface $\partial\Omega$ vérifient les conditions I - VI et si la constante T est suffisamment petite pour que les constantes du problème vérifient les inégalités (45), (50), alors il existe une fonction $\tilde{u}(x,t) = [\tilde{u}^1(x,t),\dots,\tilde{u}^m(x,t)]$ qui satisfait à l'équation (1) en tout point $(x,t) \in D$, à la condition initiale (10) pour $x \in \Omega$ et à la condition limite (11) pour $(p,t) \in S$.

TRAVAUX CITÉS

[1] M. K r z y ż a ń s k i : Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné, Ann. Pol. Math. 4 (1957/58) 93-97.

[2] W. P o g o r z e l s k i : Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique, Ricerche di Matematica 5 (1956) 25-57.

[3] W. P o g o r z e l s k i : Étude d'une fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale, Ann. Pol. Math. 4 (1958) 288-307.

[4] W. P o g o r z e l s k i : Premier problème de Fourier pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue, Ann. Pol. Math. 6 (1959) 15-40.

[5] W. P o g o r z e l s k i : Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale, Ann. Pol. Math. 4 (1957) 61-92.

[6] W. P o g o r z e l s k i : Równania całkowe i ich zastosowania. Vol.II, Warszawa 1958.

[7] W. P o g o r z e l s k i : Równania całkowe i ich zastosowania. Vol.IV, Warszawa 1970.

[8] J. W o l s k a - B o c h e n e k : Contribution à la théorie de W. Pogorzelski concernant une équation parabolique et un système parabolique d'équations aux coefficients discontinus, Zeszyty Naukowe Politechn. Warszaw. Matematyka 11 (1968) 7-22.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW
Received December 18, 1980.