

С. А. Молчанов, J. Sidorowicz

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ ПЛОТНОСТИ
ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА В ТОНКИХ ТРУБКАХ

1°. Пусть w_s - винеровский процесс в R^v , $a(s):[0, t] \rightarrow R^v$ - достаточно гладкая кривая. Задача об оценке (при малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$) вероятности вида $P\left\{\sup_{s \in [0, t]} |w_s - \delta a(\varepsilon)| \leq \varepsilon\right\}$, которую можно интерпретировать как вероятность прохождения винеровским процессом за время $[0, t]$ вдоль ε -окрестности кривой $\delta a(s)$ (ε - трубки), играет существенную роль в обосновании асимптотической теории, связанной с "функционалом действия" (А.Д.Вентцель, М.И.Фрейдлин, [1]). Однако в этой монографии изучаются только грубые логарифмические асимптотики. Уточненные логарифмические оценки той же вероятности найдены в работе А.Д.Вентцеля [2]. Точная асимптотика вероятности прохождения процессом w_s вдоль одномерной $v = 1$ трубки переменного сечения (но при $a \equiv 0$) получена А.А.Могульским [3]. Наконец, А.А.Новиков [4], [5], [6] анализировал близкие задачи несколько иным способом. В частности, он полностью изучил случаи трубки переменного, но - сферического сечения в любой размерности. Смотри по этому поводу лемму 2 ниже в тексте. Эта лемма является небольшим обобщением результата А.А.Новикова [6] и идейно близка к его подходу.

Многомерная ситуация $v > 1$ существенно сложнее. Причины этого: некоммутативность группы линейных преобразований в R^v , $v \geq 2$ и существование в R^v , $v \geq 2$ векторных полей, не являющихся потенциальными. Приходится привлекать новые методы

(разложение по собственным функциям оператора Лапласа в области, теория возмущений и т.п.).

2⁰. Перейдем к точным формулировкам. Пусть $D(0) \subset R^v$ связная ограниченная область с границей $\partial D(0)$ класса $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$; $T(s)$, $s \in [0, t]$ - семейство диффеоморфизмов $R^v \rightarrow R^v$ класса $C^{2+\alpha}$, которое (как функция параметра s) является гладким в смысле Фреше (класса $C^{2+\alpha}$). Предполагается, что $T(0) = E$. Тогда области $D(s) = T(s)D(0) \subset R^v$ связны, ограничены и имеют по крайней мере ту же гладкость границы $\partial D(s)$, что и $\partial D(0)$. Будем считать, что каждая из областей $D(s)$, $s \in [0, t]$, содержит начало координат $0 \in R^v$.

Семейство областей $D(s)$, $s \in [0, t]$ образует в $[0, t] \times R^v$ "трубку" $\mathcal{D}_{[0, t]} = \bigcup_{s=0}^t (\{s\} \times D(s))$ переменного сечения (см. рис. 1а).

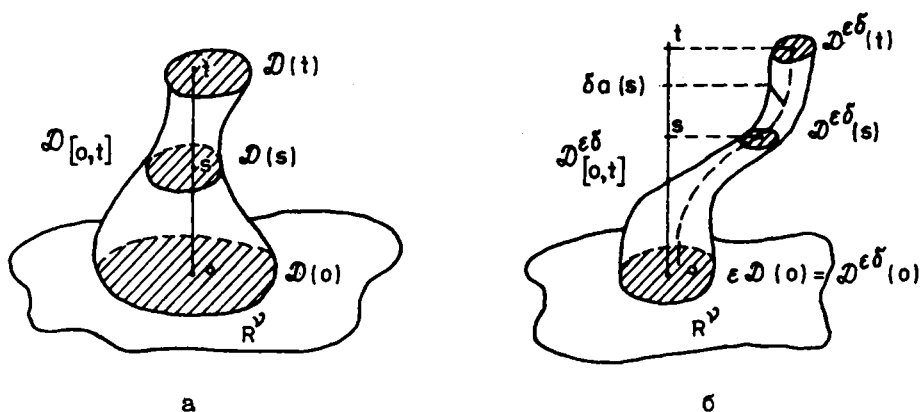


Рис. 1(а, б)

Пусть далее $a(s) : [0, t] \rightarrow R^v$, $a(0) = 0$ кривая класса $C^{2+\alpha}$, ϵ, δ - параметры. В дальнейшем предполагается, что $\epsilon \rightarrow 0$, а $\delta = \delta(\epsilon)$ меняется согласованным с ϵ образом. Допускаются варианты $\delta = 0$, $\delta = \text{const}$ и $\delta(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$. Кроме этого накладывается дополнительное ограничение $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\beta} \delta(\epsilon) = 0$. Это ограничение весьма существенно (см. ниже), так как при

$\epsilon^3 \delta(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$ возникает принципиально новые эффекты тепловой дифракции и вид асимптотических формул резко меняется *).

Введем новые области

$$D^{\epsilon\delta}(s) = \delta(\epsilon)a(s) + \epsilon D(s), \quad s \in [0, t]$$

соответствующую трубку $\mathcal{D}_{[0,t]}^{\epsilon\delta} \subset [0, t] \times R^3$ (см. рис.1 б') и обозначим через $p^{\epsilon\delta}(s, t, x, y)$ решение следующей задачи в области $\mathcal{D}_{[0,t]}^{\epsilon\delta}$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p^{\epsilon\delta}}{\partial s} + \frac{1}{2} \Delta_x p^{\epsilon\delta} = 0, & (s, x) \in \mathcal{D}_{[0,t]}^{\epsilon\delta}, \quad y \in D^{\epsilon\delta}(t), \quad 0 \leq s \leq t; \\ p^{\epsilon\delta}(s, t, x, y) = 0, & x \in \partial D^{\epsilon\delta}(s); \\ p^{\epsilon\delta}(t, t, x, y) = \delta(x - y). \end{cases}$$

С точки зрения теории случайных процессов $p^{\epsilon\delta}(s, t, x, y)$ - переходная плотность винеровского процесса в трубке $\mathcal{D}_{[0,t]}^{\epsilon\delta}$ переменного сечения $D^{\epsilon\delta}(s)$, $s \in [0, t]$, обрывающегося на границе трубки. Другими словами

$$\begin{aligned} & p^{\epsilon\delta}(s, t, x, y) dy = \\ & = \mathbb{P} \left\{ w_\tau \in \delta a(\tau) + \epsilon D(\tau), \quad \tau \in [s, t]; \quad w_t \in y + dy \mid w_s = x, \quad x \in D(s) \right\}. \end{aligned}$$

При наших предположениях гладкости задача (1) имеет единственное решение (класса $C^{4+\alpha}$) и для него применимы классические априорные оценки Шаудера вплоть до границы (см. [7]).

Основная цель работы - найти при фиксированных t ; $D(s)$, $s \in [0, t]$; $a(s)$, $s \in [0, t]$; $x_0 \in D(0)$, $y_0 \in D(t)$ асимптотику при $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon^3 \delta(\epsilon) = o(1)$ переходной плотности

*) Случай $\delta \epsilon^3 = \text{const.}$ разбирается теми же методами, что и в настоящей работе, хотя соответствующий ответ иной.

$$\tilde{p}^{\varepsilon\delta}(0, t, x_0, y_0) = \varepsilon^\nu p^{\varepsilon\delta}(0, t, \varepsilon x_0, \varepsilon y_0 + \delta a(t)).$$

3°. Напомним в нужной нам форме несколько хорошо известных фактов из спектральной теории (см. [9]) и теории диффузионных процессов:

а) Для любого $s \in [0, t]$ спектральная задача $-\frac{1}{2}\Delta e = \lambda e$; $e(x) = 0$, $x \in \partial D(s)$ в области $D(s)$ имеет дискретный спектр $0 < \lambda_0(s) < \lambda_1(s) \leq \lambda_2(s) \leq \dots$. Соответствующие собственные функции $e_i(s, x)$, $i=0, 1, 2, \dots$, нормированные условием

$\int_{D(s)} e_i^2 dx = 1$ образуют в $\mathcal{L}^2(D(s))$ полную ортогональную систему. Младшая собственная функция $e_0(s, x)$ такова, что

$e_0(s, x) > 0$, $x \in D(s)$ $\frac{d}{dn^+} e_0(s, x) > 0$, $x \in \partial D(s)$, где n^+ - внешняя нормаль к границе $D(s)$.

В силу наших предположений гладкости на семейство $D(s)$, $s \in [0, t]$ оценки

$$\lambda_1(s) - \lambda_0(s) > 0; \min \frac{d}{dn^+} e_1(s, x) > 0; \sup_{x \in D(s)} |e_0(s, x)| < \infty$$

равномерны по $s \in [0, t]$.

б) Пусть $p^{(s)}(u, x, y)$, $(u, x, y) \in [0, \infty) \times D(s) \times D(s)$ фундаментальное решение задачи

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dp^{(s)}}{du} = \frac{1}{2} \Delta_x p^{(s)} = \frac{1}{2} \Delta_y p^{(s)}; \\ p^{(s)}(u, x, y) = 0, \quad x \in \partial D(s); \\ p^{(s)}(0, x, y) = \delta(x-y) \end{cases}$$

в бесконечном цилиндре $[0, \infty) \times D(s)$. Другими словами $p^{(s)}(u, x, y)$ - переходная плотность винеровского процесса в области $D(s)$ (s - параметр!), обрывающегося на границе $D(s)$.

Тогда (см. [9])

$$(2') \quad p^{(s)}(u, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k(s)u} e_k(s, x) e_k(s, y).$$

Ряд (2') сходится равномерно по $(x, y) \in D(s) \times D(s)$ и $u \geq u_0 > 0$, причем равностепенно по $s \in [0, t]$.

Из п.п. а) легко выводится (ср. [9]), что

$$(3) \quad p^{(s)}(u, x, y) = e^{-\lambda_0(s)u} e_0(s, x) e_0(s, y) [1 + O(e^{-\theta u})],$$

$\theta > 0$ и не зависит от s , оценка 0 в (3) равномерна по $s \in [0, t]$.

γ) Собственное значение $\lambda_0(s)$ и соответствующая функция $e_0(s, x)$ являются гладкими по s в класса $C^{2+\alpha}$, причем их эволюция описывается классической теорией возмущений [9]. Это связано с простотой $\lambda_0(s)$, $s \in [0, t]$.

δ) Ниже будет многократно использоваться стандартная в подобных вопросах формула Гирсанова-Камерова-Мартина (ГКМ), см. скажем [1]. Мы сформулируем ее в нужном нам частном случае.

Пусть $w_s, s \in [0, t]$ - винеровский процесс в R^v
 $y_s = w_s - \delta a(s), s \in [0, t]$ - "сдвинутый" винеровский процесс. Обозначим через Φ^W и Φ^Y отвечающие этим процессам меры в пространстве $C[0, t]$ непрерывных функций со значениями в R^v , выходящих из 0. Тогда меры Φ^W и Φ^Y абсолютно непрерывны и (при $\dot{a}(s) = da(s)/ds$)

$$(4) \quad \frac{d\Phi^Y}{d\Phi^W} w. = \exp \left\{ -\delta \int_0^t (\dot{a}, dw_s) - \frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds \right\}.$$

4°. Введем, наконец, основной объект нашего исследования и применим формулу (4):

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^{\varepsilon\delta}(0, t, x_0, y_0) &= \frac{1}{dy} \mathcal{P}_{\varepsilon x_0} \left\{ w_s \in D^{\varepsilon\delta}(s), s \in [0, t]; w_t \in \delta a(t) + \varepsilon y_0 + \varepsilon dy \right\} = \\
&= \frac{1}{dy} M_{\varepsilon x_0}^W \chi_{w_s \in D^{\varepsilon\delta}(s), s \in [0, t]; w_t \in \delta a(t) + \varepsilon y_0 + \varepsilon dy}^* = \\
&= \frac{1}{dy} M_{\varepsilon x_0}^Y \chi_{y_s \in \varepsilon D(s), s \in [0, t]; y_t \in \varepsilon y_0 + \varepsilon dy} = \\
&= \frac{1}{dy} M_{\varepsilon x_0}^W \left\{ \exp \left[-\delta \int_0^t (\dot{a}, dw_s) - \frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \chi_{w_s \in \varepsilon D(s), s \in [0, t]; w_t \in \varepsilon y_0 + \varepsilon dy} \right\}.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в стохастическом члене, полагая $u = s/\varepsilon^2$ и используя автомодельность винеровского процесса $w_s \longleftrightarrow w_{s/\varepsilon^2}$ приходим к основному представлению

$$\begin{aligned}
(5) \quad \tilde{p}^{\varepsilon\delta}(0, t, x_0, y_0) &= \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds - \delta\varepsilon [(\dot{a}(t), y_0) - (\dot{a}(0), x_0)] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{dy} M_{x_0}^W \exp \left[\delta\varepsilon^3 \int_0^{t/\varepsilon^2} (\ddot{a}(\varepsilon^2 u), w_u) du \right] \times \\
&\quad \times \chi_{w_u \in D(u/\varepsilon^2), u \in [0, t/\varepsilon^2]; w_{t/\varepsilon^2} \in y_0 + dy} = \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds - \delta\varepsilon [(\dot{a}(t), y_0) - (\dot{a}(0), x_0)] \right\} \times \\
&\quad \times Q^{\varepsilon\delta}(0, t/\varepsilon^2, x_0, y_0).
\end{aligned}$$

*) Как обычно, χ_A - индикатор события A определяется формулой $\chi_A(w.) = \begin{cases} 1; & w. \in A \\ 0; & w. \notin A. \end{cases}$

5⁰. Приведем сначала грубую оценку $Q^{\epsilon\delta}$ и, тем самым, $\tilde{p}^{\epsilon\delta}$ или же $p^{\epsilon\delta}$. Она справедлива без всяких ограничений на рост функции $\delta = \delta(\epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$ и, как можно показать, при гораздо менее ограничительных предположениях гладкости относительно $a(\cdot)$ и семейства $D(\cdot)$. Ограничимся, однако, перечисленными выше в п.п. 2⁰ условиями, имея в виду дальнейшие уточнения асимптотики.

Т е о р е м а 1. Если x_0 и y_0 меняются в компактных подмножествах $\tilde{D}(0) \subset D(0)$ и $\tilde{D}(t) \subset D(t)^*$, соответственно, то равномерно по $x_0 \in \tilde{D}(0)$, $y_0 \in \tilde{D}(t)$ при $\epsilon \rightarrow 0$

$$(6) \ln \tilde{p}^{\epsilon\delta}(0, t, x_0, y_0) = -\frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds - \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \lambda_0(s) ds + o(\epsilon\delta) + o\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Доказательство теоремы проводится путем аппроксимации трубки $\mathcal{D}[0, t]$ системами вписанных и описанных цилиндров с последующим использованием оценки (3). Мы не проводим этих рассуждений, так как наша цель получить точную асимптотику.

6⁰. Перейдем теперь к более детальному анализу выражения (5) предполагая, что $\delta(\epsilon)\epsilon^3 = o(1)$. Начнем со следующей леммы, представляющей самостоятельный интерес (содержащий, в частности, результаты [3] в несколько уточненном виде). Идея доказательства этой леммы, впрочем, близка к использованной в работах [3] и [4] хотя в них рассматривается случай $\nu = 1$. Эта идея при $\nu > 1$ проходит лишь при очень жестком ограничении на систему $D(s)$: гомотетичность этих областей при разных s . Причина, по которой общий случай требует новых методов объяснялась выше в п.п. 1⁰.

Л е м м а 1. Пусть $T(s) = A(s)E$ — семейство гомотетий $R^\nu \rightarrow R^\nu$, $A(s)$ — функция класса $C^{2+\alpha}$, $A: [0, t] \rightarrow R^1$,

*) Здесь предполагаем, что все $D(s)$ звёзды относительно 0.

$A > 0$, $A(0)=1$ и $D(0)$ — область класса $C^{2+\alpha}$ (очевидно, что и $D(s) = A(s)D(0)$ принадлежит тому же классу). Тогда

$$(7) \quad q^\varepsilon(0, t/\varepsilon^2, x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{dy} \mathcal{P}_{x_0} \left\{ w_u \in D(u \varepsilon^2), u \in [0, t/\varepsilon^2]; w_{t/\varepsilon^2} \in y_0 + dy \right\} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{\infty} e_0(0, x_0) e_0(t, y_0) \exp \left[- \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \lambda_0(s) ds \right] \left[1 + O(\exp(-\theta t/\varepsilon^2)) \right],$$

$$\theta > 0$$

(функции $e_0(s, x)$ и $\lambda_0(s)$, $s \in [0, t]$ определены в п.п. 3^o, α). Другими словами, действует естественный аналог формулы (3).

Доказательство. Заметим, что

$$q^\varepsilon dy = \mathcal{P}_{x_0} \left\{ \frac{w_u}{A(u \varepsilon^2)} \in D(0), u \in [0, t/\varepsilon^2], \frac{w_{t/\varepsilon^2}}{A(t)} \in \frac{y_0}{A(t)} + \frac{dy}{A(t)} \right\}$$

и введем новый процесс $Z_u = \frac{w_u}{A(u \varepsilon^2)}$, $Z_0 = x_0$.

Тогда

$$q^\varepsilon dy = \mathcal{P}_{x_0}^Z \left\{ Z_u \in D(0), u \in [0, t/\varepsilon^2] \right\},$$

$$Z_{t/\varepsilon^2} \in \frac{y_0}{A(t)} + \frac{dy}{A(t)} \Big\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{x_0} \{ \mathcal{L} \}.$$

Очевидно, что

$$dZ_u = \frac{dw_u}{A} - \varepsilon^2 \frac{w_u A'}{A^2} du, \quad Z_0 = x_0$$

и положим $dv_u = \frac{dw_u}{A(u\varepsilon^2)}$, $v_0 = x_0$.

По формуле ГМК

$$q^\varepsilon dy = M_{x_0} \chi_{\mathcal{L}}^{Z_\cdot} = M_{x_0} \chi_{\mathcal{L}}^{V_\cdot} \frac{d\varphi^Z}{d\varphi^V} V_\cdot = M_{x_0} \left\{ \exp -\varepsilon^2 \left[\int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{A' w_u}{A} dw_u - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon^4}{2} \int_0^{t/\varepsilon^2} \left(\frac{A' w_u}{A} \right)^2 du \right] \chi_{v_u \in D(0)}, u \in [0, t/\varepsilon^2], v_{t/\varepsilon^2} \in \frac{y_0}{A} + \frac{dy}{A} \right\}.$$

Очевидно, что на $\mathcal{L}$ $\frac{\varepsilon^4}{2} \int_0^{t/\varepsilon^2} \left(\frac{A' w_u}{A} \right)^2 du = O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим теперь стохастический член и применим формулу ИТО, т.е.

$$-\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{A'(u\varepsilon^2)}{A(u\varepsilon^2)} w_u du = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{A'}{A} (dw_u^2 - \gamma du) = \\ = \frac{\gamma \varepsilon^2}{2} \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{A'}{A} du - \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \frac{A'}{A} w_u^2 \Big|_0^{t/\varepsilon^2} - \int_0^{t/\varepsilon^2} \varepsilon^2 w_u^2 \frac{A'' A - A'^2}{A^2} du \right\} = \\ = \frac{\gamma}{2} \ln A(t) - O(\varepsilon^2).$$

Итак

$$\begin{aligned}
 & q^\varepsilon(0, t/\varepsilon^2, x_0, y_0) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \\
 & \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{dy} A^{3/2}(t) \varphi_{x_0}^V \left\{ v_u \in D(0), u \in [0, t/\varepsilon^2]; v_{t/\varepsilon^2} \in \frac{y_0}{A(t)} + \frac{dy}{A(t)} \right\} = \\
 & = \frac{1}{dy} \frac{1}{A^{3/2}(t)} \varphi_{x_0} \left\{ v_u \in D(0), u \in [0, t/\varepsilon^2]; v_{t/\varepsilon^2} \in \frac{y_0}{A(t)} + dy \right\} = \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{A^{3/2}(t)} r \left(0, t/\varepsilon^2, x_0, \frac{y_0}{A(t)} \right).
 \end{aligned}$$

По процессу v_u отвечает неоднородный (по времени) производящий оператор $\frac{1}{2} \frac{\Delta}{A^2(u\varepsilon^2)}$, поэтому его переходная плотность r удовлетворяет в цилиндре $[0, t/\varepsilon^2] \times D(0)$ параболическому уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_x r}{A^2} = 0, \quad r(t/\varepsilon^2, t/\varepsilon^2, x, y) = \delta(x-y).$$

Оно решается разложением Фурье по собственным функциям $e_k(0, x)$ области $D(0)$. Получим

$$\begin{aligned}
 & r(0, t/\varepsilon^2, x_0, \frac{y_0}{A(t)}) = \\
 & = \sum_k e_k(0, x_0) e_k(0, \frac{y_0}{A(t)}) \exp \left[- \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{\lambda_k(u)}{A^2(u\varepsilon^2)} du \right] = \\
 & = A^{3/2}(t) \sum_k e_k(0, x_0) e_k(t, y_0) \exp \left[- \int_0^{t/\varepsilon^2} \lambda_k(u\varepsilon^2) du \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^{1/2}(t) e_0(0, x_0) e_0(t, y_0) \exp \left[- \int_0^{t/\epsilon^2} \lambda_0(u \epsilon^2) du \right] \left[1 + O \left(e^{-\frac{\theta t}{\epsilon^2}} \right) \right] = \\
&= A^{1/2}(t) e_0(0, x_0) e_0(t, y_0) \exp \left[- \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \lambda_0(u) du \right] \left[1 + O \left(e^{-\frac{\theta t}{\epsilon^2}} \right) \right].
\end{aligned}$$

(Мы использовали в последней выкладке формулы преобразования собственных значений и собственных функций при гомотетии). Подставляя это значение в полученную формулу для q^ϵ , закончим доказательство леммы 1.

Л е м м а 2. Пусть $T = T$ таково, что $T \delta \epsilon^3 \rightarrow 0$, $T^2 \epsilon^2 \rightarrow 0$, $T(\epsilon) \rightarrow \infty$. Тогда равномерно по $x_0 \in D(0)$, $y_0 \in D(T \epsilon^2)$

$$\begin{aligned}
(8) \quad \tilde{p}^{\epsilon \delta}(0, T, x_0, y_0) &\underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} e_0(T \epsilon^2, y_0) e_0(0, x_0) \exp \left[- \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{T \epsilon^2} \lambda_0(s) ds + \right. \\
&\quad \left. + O(T^2 \epsilon^2) \right] \left[1 + O(\exp(-\theta T)) \right].
\end{aligned}$$

Для доказательства нужно аппроксимировать "трубку" $\mathcal{D}_{[0, T \epsilon^2]}$, трубками, сечения которых гомотетичны $D(0)$ с коэффициентами подобия равными $1 + O(T \epsilon^2)$, воспользоваться формулой (5), леммой 1 и очевидными оценками типа

$$\delta \epsilon^3 \int_0^T (\ddot{a}, w_s) ds = O(T \epsilon^3).$$

Нужная в лемме 2 аппроксимация поясняется на рис. 2. Эта аппроксимация позволяет получить равномерную оценку по $x_0 \in D(0)$. Подчеркнем, что цилиндрическая аппроксимация, примененная в теореме 1, дает плохую оценку при x_0 близких к $\partial D(0)$.

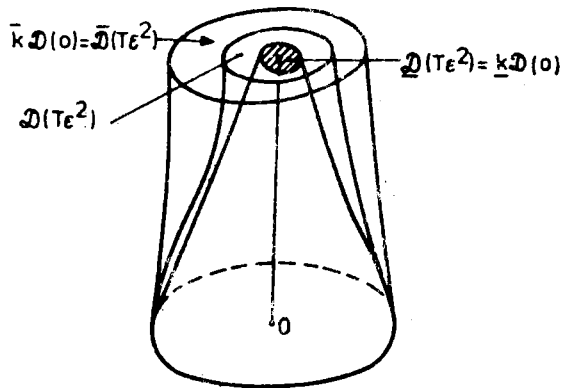


Рис. 2

7°. Вернемся теперь к более точной оценке основного выражения (5) (п.п. 4°). Разобьем $[0, t/\epsilon^2]$ на интервалы длины $T = T(\epsilon)$ и воспользуемся марковским свойством. Имеем

$$\begin{aligned}
 (5') \quad Q^{\epsilon\delta}(0, t/\epsilon^2, x_0, y_0) &= \frac{1}{dy} M_{x_0} \exp \left[\delta\epsilon^3 \int_0^T (\ddot{a}(\epsilon^2 u), w_u) du \right] \times \\
 &\times \chi_{w_u \in D(u\epsilon^2), u \in [0, T]} M_{w_T} \exp \left[\delta\epsilon^3 \int_T^{2T} (\ddot{a}, w_u) du \right] \times \\
 &\times \chi_{w_u \in D(u\epsilon^2), u \in [T, 2T]} \times \dots \\
 &\dots \times M_{w_{t/\epsilon^2 - T}} \exp \left[\delta\epsilon^3 \int_{t/\epsilon^2 - T}^{t/\epsilon^2} (\ddot{a}, w_u) du \right] \times \\
 &\times \chi_{w_u \in D(u\epsilon^2), u \in [t/\epsilon^2 - T, t/\epsilon^2]} ; w_{t/\epsilon^2} \in y_0 + dy.
 \end{aligned}$$

Точность леммы 2 не достаточна для получения нужной асимптотической формулы, так как остаточный член в экспоненте будет иметь порядок $T^2 \varepsilon^2 \times t / \varepsilon^2 T = O(T)$. Однако мы не можем воспользоваться леммой 2 лишь в последнем члене представления (5') это позволит нам заменить задачу об оценке (5) и (5') технически гораздо более простой задачей исследования выражения

$$\begin{aligned}
 (5'') \quad Q^{\varepsilon \delta}(0, t/\varepsilon^2, x_0, e_0(t, \cdot)) = \\
 = M_{x_0} \exp \left\{ \delta \varepsilon^3 \int_0^{t/\varepsilon^2} (\ddot{a}(\varepsilon^2 u), w_u) du \right\} \times \\
 \times e_0(t, w_{t/\varepsilon^2}) \chi_{w_u \in D(u\varepsilon^2), u \in [0, t/\varepsilon^2]},
 \end{aligned}$$

которое, как легко видеть (формула Каца-Фейнмана) является решением $Q(s, t/\varepsilon^2, x)$ (при $s = 0, x = x_0$) следующей задачи Коши

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dQ}{ds} + \frac{1}{2} \Delta Q + \delta \varepsilon^3 (\ddot{a}(s\varepsilon^2), x) Q = 0, & s \in [0, t/\varepsilon^2], \\ Q(t/\varepsilon^2, t/\varepsilon^2, x) = e_0(t, x), \quad Q(s, t/\varepsilon^2, x) = 0 \text{ при } x \in D(s\varepsilon^2) \end{cases}$$

в трубке $\mathcal{D}_{[0, t/\varepsilon^2]} = \bigcup_{s=0}^{t/\varepsilon^2} \{s\} \times D(s\varepsilon^2)$.

Поскольку $\varepsilon^3 \delta \rightarrow 0, T\varepsilon^3 \delta \rightarrow 0$, то на отрезке $[t/\varepsilon^2 - T, t/\varepsilon^2]$ в соответствующем последнем члене представления (5') справедлив естественный аналог леммы 2.

Л е м м а 2'. Если $T\varepsilon^3 \delta \rightarrow 0, T^2 \varepsilon^2 \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned}
 (8') \quad & \frac{1}{dy} M_{w_{t/\epsilon^2-T}} \left\{ \exp \left[\delta \epsilon^3 \int_{t/\epsilon^2-T}^{t/\epsilon^2} (\ddot{a}(u\epsilon^2), w_u) du \right] \times \right. \\
 & \left. \times \chi_{w_u \in D(u\epsilon^2), u \in [t/\epsilon^2-T, t/\epsilon^2]; w_{t/\epsilon^2} \in y_0 + dy} \right\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \\
 & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{e}_0(t, y_0), \tilde{e}_0(t - T\epsilon^2, w_{t/\epsilon^2-T}) \times \\
 & \times \exp \left[- \int_{t/\epsilon^2-T}^{t/\epsilon^2} \tilde{\lambda}_0(u\epsilon^2) du + O(T^2\epsilon^2) \right],
 \end{aligned}$$

где $\tilde{e}_0(s, x)$, $\tilde{\lambda}_0(s)$ старшие собственные функции и значение оператора $\frac{1}{2} \Delta - \delta \epsilon^3 (\ddot{a}(s), x)$ в области $D(s)$ с нулевыми граничными условиями на $\partial D(s)$.

В силу леммы 2' в задаче (9) мы можем заменить $e_0(t, x)$ на $\tilde{e}_0(t, x)$ и соответствующее решение $\tilde{Q}$ будет эквивалентно при $\epsilon \rightarrow 0$ (равномерно по x_0 и y_0) исходному решению Q . Задачу (9) выгодно решать в других переменных. Положим $D = D(t)$ и заметим, что $D(s) = T(s)T^{-1}(t)D$, где $T(s)$ — диффеоморфизмы, введенные в п.п. 2^о. Отображение $D \rightarrow D(s)$ задает естественные координаты в $D(s)$ и превращает исходную трубку $\mathcal{D}_{[0, t]}$ в цилиндр $[0, t] \times D$. В этих новых координатах задача (9) для функции $\tilde{Q} \circ \delta$ приобретает следующий вид (начальные условия модифицированы)

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial s} + \sum_{i,j} a_{ij}(s\epsilon^2, x) \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s\epsilon^2, x) \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_i} + \\ & + \sum_i \epsilon^2 \tilde{b}_i + \delta \epsilon^2 C(s\epsilon^2, x) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial s} + A(s\epsilon^2)Q = 0, \quad (s, x) \in [0, t/\epsilon^2] \times D, \\ & \tilde{Q}(t/\epsilon^2, t/\epsilon^2, x) = \tilde{e}_0(t, x), \quad \tilde{Q}(s, s, x) = 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \right.$$

Коэффициенты a_{ij} , b_i , c во всяком случае класса $C^{2+\alpha}$, их явный вид не существен, надо только помнить, что соответствующий эллиптический оператор $A(s\epsilon^2)$ это просто $\frac{1}{2}\Delta + \epsilon^3\delta(\ddot{a}, x)$ в надлежащих координатах. Разобьем $[0, t/\epsilon^2]$ на интервалы длины $T = T(\epsilon)$ (эта функция была введена ранее) и решим на каком-то интервале $kT \leq s \leq (k+1)T$ - точнее говоря в цилиндре $[kT, (k+1)T] \times D$ - задачу (9') с нулевыми граничными условиями на ∂D и условием $\tilde{Q}((k+1)T, (k+1)T, x) = \tilde{e}_0((k+1)T\epsilon^2, x)$ на верхней грани цилиндра. В дальнейшем через $\tilde{e}_k(s\epsilon^2, x)$, $\tilde{\lambda}_k(s\epsilon^2)$, $k=0, 1, 2, \dots$ будут обозначаться собственные значения оператора $A(s\epsilon^2)$ в области D , $s \in [0, t/\epsilon^2]$ (сравни с обозначениями леммы 2').

Сдвинем начало отсчета времени в точку $(k+1)T$ положим $s' = (k+1)T - s$ и $\mathcal{A}(s'\epsilon^2) = A((k+1)T^2 - s\epsilon^2)$. В итоге мы придем к задаче (опуская для краткости штрихи)

$$(9'') \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial s} = \mathcal{A}(s\epsilon^2)\tilde{Q}, & (s, x) \in [0, T] \times D; \\ \tilde{Q}(0, x) = \tilde{e}_0((k+1)T\epsilon^2, x); \\ \tilde{Q}(s, x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases}$$

Решение задачи (9'') будем искать методом разложения по параметру. Общая теория такого сорта развита в [9], гл. IV.

Обозначим для краткости через $\bar{\lambda}_k(s\epsilon^2)$, $\bar{e}_k(s\epsilon^2, x)$, $k=0, 1, 2, \dots$ собственные значения и функции оператора $\mathcal{A}(s\epsilon^2)$ в D (с нулевыми условиями на ∂D). Фактически $\bar{\lambda}_k(s\epsilon^2) = \tilde{\lambda}_k((k+1)T - s)\epsilon^2$ и т.п. Очевидно $0 > \bar{\lambda}_0 > \bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 \dots$, пусть далее, $\hat{\lambda}_0 = 0$, $\hat{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_0$, $k=1, 2, \dots$ - собственные значения оператора $\hat{\mathcal{A}}(s\epsilon^2) = \mathcal{A}(s\epsilon^2) + \bar{\lambda}_0(s\epsilon^2)$; $\hat{e}_k(s\epsilon^2, \cdot) = \bar{e}_k(s\epsilon^2, \cdot)$ - соответствующие собственные функции.

Для решения задачи (9'') сначала произведем замену $\tilde{Q}(s\epsilon^2, x) = \hat{Q}(s\epsilon^2, x) \exp \left[- \int_0^s \bar{\lambda}_0(s\epsilon^2) ds \right]$, тогда

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial s} = [\hat{A}(s\epsilon^2) + \bar{\lambda}_0(s\epsilon^2)] \hat{Q} = \hat{A}(s\epsilon^2) Q; \\ \hat{Q}(0, x) = \hat{e}_0(0, x) = \tilde{e}_0((k+1)T\epsilon^2, x); \quad \hat{Q}(s, x) = 0, \quad x \in D. \end{cases}$$

Положим (возможность такого разложения обоснована в [7])

$$(10) \quad \begin{cases} \hat{A}(s\epsilon^2) = \hat{A}(0) + s\epsilon^2 B + s^2 \epsilon^4 R, \\ \hat{Q}(s, x) = u_0(s, x) + \epsilon^2 u_1(s, -x) + \epsilon^4 u_2(s, x), \end{cases}$$

где $\|u_2\|_{2+\alpha} \leq \text{const}$, а функции u_0 и u_1 удовлетворяют стандартным уравнениям теории возмущений

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial s} = \hat{A}(0) u_0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} = \hat{A}(0) u_1 + s B u_0, \quad s \in [0, T]; \\ u_0(0, x) = \hat{e}_0(0, x); \quad u_1(0, x) = 0, \quad x \in D. \end{cases}$$

Операторы B и R в формуле (10) второго порядка, их коэффициенты класса $C^{2+\alpha}$, так, что, скажем,

$$\|B \hat{e}_0(s, x)\|_{2+\alpha} \leq \text{const}$$

и т.п.

Уравнение первого приближения $\frac{\partial u_0}{\partial s} = \hat{A}(0) u_0$ имеет очевидное решение $u_0(s, x) \equiv \hat{e}_0(0, x)$ поскольку $\hat{\lambda}_0 \equiv 0$. Уравнение второго приближения

*) Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|_\alpha$ - гельдеровская норма порядка α , $\alpha < 1$; $\|\cdot\|_{2+\alpha}$ - суммарная гельдеровская норма вторых производных.

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \hat{A}(0)u_1 + s B u_0, \quad (s, x) \in [0, T] \times D;$$

$$u_1(0, x) = 0; \quad u_1(s, x) = 0, \quad x \in \partial D$$

решается разложением по собственным функциям $\hat{e}_k(0, x) = \hat{e}_k(x)$, $k=0, 1, \dots$ оператора $\hat{A}(0)$ в D . Имеем

$$(12) \quad u_1(s, x) = \frac{s^2(B \hat{e}_0, \hat{e}_0)}{2} \hat{e}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_k(B \hat{e}_0, \hat{e}_k) \times \\ \times \exp \left[\hat{\lambda}_k s \right] \int_0^s u_0 e^{-\hat{\lambda}_k u} du = \frac{s^2(B \hat{e}_0, \hat{e}_0)}{2} \hat{e}_0 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_k(B \hat{e}_0, \hat{e}_k) \left[-\frac{s}{\hat{\lambda}_k} - \frac{1}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\exp(\hat{\lambda}_k s)}{\hat{\lambda}_k^2} \right].$$

Заметим теперь, что согласно классической теории возмущений простого спектра (см. [9]) старшую собственную функцию оператора $\hat{A}(s\epsilon^2)$ можно представить в виде (пока без нормировки)

$$(13) \quad \hat{e}_0(s\epsilon^2, x) = \hat{e}_0(x) + s\epsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{e}_k(x)(B \hat{e}_0, \hat{e}_k)}{\hat{\lambda}_k} + O(s^2 \epsilon^4).$$

Заметим теперь, что

$$\hat{A}(s\epsilon^2)e_0(s\epsilon^2, x) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{A}}{\partial s} e_0 + \hat{A} \frac{\partial \hat{e}_0}{\partial s} = 0.$$

Подставляя $s = 0$ получим

$$B \hat{e}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_k(x) \frac{(B \hat{e}_0, \hat{e}_k)}{\hat{\lambda}_k} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что $(B \hat{e}_0, \hat{e}_0) = 0$. Собирая оценки, получим, что решение $\hat{Q}$ задачи (9) допускает оценку

$$(14) \quad \hat{Q}(s, x) = \hat{e}_0(x) - \epsilon^2 s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{e}_k(B \hat{e}_0, \hat{e}_k)}{\hat{\lambda}_k} + O(\epsilon^3) + O(\epsilon^4 T^2).$$

Но из (13)

$$\| \hat{e}_0(x) - \epsilon^2 s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{e}_k(B \hat{e}_0, \hat{e}_k)}{\hat{\lambda}_k} \| = 1 + O(\epsilon^4 T^2).$$

Тем самым, для решения $\tilde{Q}$ задачи (9'') мы получаем представление

$$(15) \quad \tilde{Q}(T\epsilon^2, x) = \bar{e}_0(T\epsilon^2, x) \exp \left[- \int_0^T \bar{\lambda}_0(s\epsilon^2) ds + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^4 T^2) \right] = \\ = \tilde{e}_0(\epsilon^2 kT, x) \exp \left[- \int_{kT}^{(k+1)T} \tilde{\lambda}_0(s\epsilon^2) ds + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^4 T^2) \right].$$

После леммы 2 (или 2') мы имели по сути очень близкую оценку, но остаток в экспоненте имел вид $O(T^2 \epsilon^2)$ а не $O(T^2 \epsilon^4)$. Уточнение (15) является решающим. Пользуясь на каждом шагу, (а их $t/\epsilon^2 T$) в основной формуле (5') оценкой (15) без труда приходим к оценке

$$(16) \quad Q^{\epsilon\delta}(0, t/\epsilon^2, x_0, y_0) = \\ = \tilde{e}_0(t, y_0) \tilde{e}_0(0, x_0) \exp \left[- \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \tilde{\lambda}_0(s) ds + O\left(\frac{1}{T}\right) + O(T\epsilon^2) \right].$$

Вспоминая формулу (5) и пользуясь соотношением (16) приходим к основному результату работы (обозначения снова удобно слегка изменить

Т е о р е м а 2. Если $\epsilon^3 \delta(\epsilon) \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, то при перечисленных выше ограничениях

$$(17) \quad \tilde{p}^{\epsilon\delta}(0, t, x_0, y_0) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{P}_{\epsilon x_0} \left\{ w_s \in \delta a(s) + \epsilon D(s), s \in [0, t]; \right. \\ \left. w_t \in \delta a(t) + \epsilon y_0 + \epsilon dy \right\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{2} \int_0^t |\dot{a}|^2 ds - \delta \epsilon ((\ddot{a}(t), y_0) - (\ddot{a}(0), x_0)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \lambda_0^{\epsilon\delta}(s) ds \right\} e_0^{\epsilon\delta}(0, x_0) e_0^{\epsilon\delta}(t, y_0),$$

где $\lambda_0^{\epsilon\delta}(s)$ и $e_0^{\epsilon\delta}(s, x)$ - старшее собственное значение и соответствующая собственная функция задачи $-\frac{1}{2}\Delta e - (\ddot{a}(s), x)\epsilon^3\delta e = \lambda e$ в области $D(s)$ с нулевыми условиями на $\partial D(s)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Д. В е н т ц е л ь , М.И. Ф р е й д л и н : Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, Москва 1979.
- [2] А.Д. В е н т ц е л ь : О точке первого выхода диффузионного процесса с малой диффузией на границу, Mat. Zametki, Akad. Nauk SSSR, 12 (1977).
- [3] М о г у л ь с к и й : Great deviations for Wiener process, Abstracts of the 12th European Meeting of Statist., Varna, 1979, p.164.
- [4] А.А. Н о в и к о в : Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей невыхода винеровского процесса на подвижную границу, Mat. Sb. 12 (1979).

- [5] А.А. Н о в и к о в : The method of change of measure in the first passage problem for moving boundaries, Abstracts of the 12th European Meeting of Statist., Varna 1979.
- [6] А.А. Н о в и к о в : С малых отклонениях гауссовских процессов, Mat.Zametki Akad. Nauk SSSR, 29(1981) 291-301.
- [7] А. Ф р и д м а н : Уравнение с частными производными параболического типа. Moskwa 1968.
- [8] Н. .Д а н ф о р д , Дж.Т. Ш в а р ц : Линейные операторы, vol.I, 1962; vol.II, Moskwa 1966.
- [9] К. Ф р и д р и х е : Возмущение спектра в гильбертовом пространстве, Moskwa 1969.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА,
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МОСКВА, СССР;
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HIGHER ENGINEERING SCHOOL, KOSZALIN
Received June 28, 1980; revised version May 22, 1981.