DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XV No 2 1982

Magdalena Tryjarska

SUR L'INTÉGRALE DE FOURIER-POISSON RELATIF À L'OPÉRATEUR DIFÉRENTIEL D'ORDRE PAIR

Soit l'opérateur différentiel

$$P_{x,t} \equiv (-1)^p\ a(x,t)\ D_x^{2p} + \sum_{j=0}^{2p-1} b_j(x,t) D_x^j + D_t^1$$

défini pour $(x,t) \in R_+^2 := \{(x,t) : t > 0\}$, $p \in N$.

Admettons que les coefficients de $P_{x,t}$ sont des fonctions réelles, définies et bornées dans R_+^2 et qu'elles y satisfont aux conditions suivantes

(I) $$a(x,t) \geqslant a_0,$$

(II) $$|a(x,t) - a(\hat{x},\hat{t})| \leqslant k\ (|x - \hat{x}|^h + |t - \hat{t}|^{\frac{h}{2p}}),$$

(III) $$|b_j(x,t) - b_j(\hat{x},t)| \leqslant k_j|x - \hat{x}|^h,\ j=0,1,\dots,2p-1,$$

avec des constantes positives a_0, k, k_0, $k_1,\dots,k_{2p-1}$ et avec $h \in (0,1\rangle$. L'opérateur $P_{x,t}$ est donc parabolique à coefficients höldériens.

Les problèmes aux limites pour les équations avec l'opérateur du type $P_{x,t}$ étaient récemment examinés par E.Baderko (v. [1]). La présente note est consacrée à une certaine propriété (utile pour établir l'unicité de tels problèmes) de l'intégrale de Fourier-Poisson relatif à l'opérateur $P_{x,t}$.

Pour construire la solution fondamentale de l'opérateur $P_{x,t}$ rappelons que celle de l'opérateur

$$P^{o}_{x,t} \equiv (-1)^{p}\, a_{o} D^{2p}_{x} + D^{1}_{t},$$

à coefficient constant $a_o > 0$, est de la forme (v. [2])

$$w(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^1} \exp\left[-a_o \alpha^{2p}(t-\tau) + i\alpha\cdot(x-\xi)\right] d\alpha.$$

Il s'ensuit que l'intégrale

$$(1) \qquad w^{y,\theta}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^1} \exp\left[-a(y,\theta)\alpha^{2p}(t-\tau) + i\alpha\cdot(x-\xi)\right] d\alpha$$

présente une quasi-solution de l'opérateur $P_{x,t}$. Posant

$$\beta = \left[a(y,\theta)\ (t-\tau)\right]^{\frac{1}{2p}} \cdot \alpha$$

on obtient (1) dans la forme

$$w^{y,\theta}(x,t;\xi,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[a(y,\theta)(t-\tau)\right]^{-\frac{1}{2p}} \int_{R^1} \exp(-\beta^{2p})\ \exp\left[\frac{i\beta\cdot(x-\xi)}{\sqrt[2p]{a(y,\theta)(t-\tau)}}\right] d\beta,$$

d'où on peut déduire, en moyennant la méthode analogue à celle de [2], l'évaluation suivante

$$(2) \quad |w^{y,\theta}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant A(t-\tau)^{-\frac{1}{2p}} \exp\left[- \frac{B|x-\xi|^{2pP}}{(t-\tau)^{P}}\right], \quad P=(2p-1)^{-1},$$

A et B étant des constantes positives. En séparant les singularités dans (2), on arrive à l'inégalité

$$(2') \quad |w^{y,\theta}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{2p\mu-1}, \qquad \mu \in (0, \tfrac{1}{2p}),$$

où la constante positive C dépend de μ, A, B.

La solution fondamentale de l'opérateur $P_{x,t}$ a pour l'expression

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{R^1} w^{y,\theta}(x,t;y,\theta)\Phi(y,\theta;\xi,\tau)\,dy\,d\theta$$

la fonction Φ étant une solution de l'équation intégrale

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = P_{x,t}\left[w^{y,\theta}(x,t;\xi,\tau)\right] +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{R^1} P_{x,t}\left[w^{y,\theta}(x,t;y,\theta)\right] \Phi(y,\theta;\xi,\tau)\,dy\,d\theta.$$

On peut donc en déduire (v. [2] p.128) les évaluations suivantes pour la solution fondamentale et ses dérivées

(3) $$|D_x^j \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leq A_j(t-\tau)^{-\frac{j+1}{2p}} \exp\left[-\frac{B_j|x-\xi|^{2pP}}{(t-\tau)^P}\right]$$

ou bien les évaluations avec les singularités séparées

(3') $$|D_x^j \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leq A'_j(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{2p\mu-j-1}\exp(-\varkappa|x-\xi|),$$

où $j = 0,1,\dots,2p-1$ et A_j, A'_j, B_j, $\varkappa$ sont des constantes positives, l'exposant μ est à fixer. Pour $|x-\xi|$ assez grand on peut profiter de la limitation (v. [2], (17))

(4) $$|D_x^j \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leq A''_j(t-\tau)^{\mu_1} \exp(-\varkappa|x-\xi|),$$

$j = 0,1,\dots,2p-1$, avec A_j et μ_1 positives.

Considérons le potentiel (relatif à l'opérateur $P_{x,t}$) dit l'intégrale de Fourier-Poisson

(5) $$J(x,t) = \int_{R^1} \Gamma(x,t;\xi,0)\,\varrho(\xi)d\xi,$$

ϱ étant sa densité. Il s'ensuit de (3) que le potentiel (5) et ses dérivées vérifient les inégalités suivantes

(6) $$|D_x^j J(x,t)| \leq C_j t^{-\mu}, \qquad j = 0,1,\dots,2p-1,$$

où $\mu \in \left(\frac{j}{2p}, \min\left(1, \frac{j+1}{2p}\right)\right)$ et C_j sont des constantes dépendant de A'_j et de $\sup_{R^1}|\varrho(x)|$.

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème : Si la fonction ϱ est continue et bornée dans R^1, l'intégrale (5) possède la propriété suivante

$$\lim_{r \to +\infty} J(x,t) = 0, \quad r = \sqrt{x^2+t^2}. \tag{7}$$

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'il existe une telle fonction $g \in C(\langle r_0,+\infty))$ s'annulant à l'infini qu'on ait

$$|J(x,t)| \leqslant g(r), \qquad r = \sqrt{x^2+t^2}. \tag{8}$$

A cette fin examinons trois cas différents:

1. Soit $0 \leqslant |x| < t$ et $\sqrt{x^2+t^2} > r_0$, ce qui donne la relation $r_0 < r < t\sqrt{2}$. Il s'ensuit, vu (6) pour $j = 0$, l'inégalité suivante

$$|J(x,t)| \leqslant \text{const.}\ r^{-\mu}, \quad r > r_0, \tag{9}$$

où $\mu \in (0, \frac{1}{2p})$. La propriété (7) subsiste donc dans le cas envisagé.

2. Soit $0 < t \leqslant x$ et $\sqrt{x^2+t^2} > r_0$. Il en découle la relation

$$0 < t \leqslant x < r < x\sqrt{2}, \quad r > r_0. \tag{10}$$

Décomposons l'intégrale (5) par le moyen suivant

$$(11)\qquad J(x,t) = \left(\int_{-\infty}^{-x^q} + \int_{-x^q}^{x^q} + \int_{x^q}^{+\infty} \right) \Gamma(x,t;\xi,0)\varrho(\xi)d\xi =$$

$$= J_1(x,t) + J_2(x,t) + J_3(x,t)$$

avec $q \in (0, \frac{1}{2})$. Pour évaluer l'intégrale $J_1(x,t)$, posons $-\mu = \mu_0 > 0$ et $\varkappa = 0$ dans (3′) pour $j = 0$, ce qui nous donne

$$(12)\qquad |\Gamma(x,t;\xi,0)| \leqslant A_0' \; t^{\mu_0} |x-\xi|^{-(2p\mu_0+1)}$$

et, par conséquence, on obtient l'inégalité

$$|J_1(x,t)| = \left| \int_{-\infty}^{-x^q} \Gamma(x,t;\xi,0)\varrho(\xi)d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant A^* t^{\mu_0} (x+x^q)^{-2p\mu_0} \leqslant A^* t^{\mu_0} x^{-2p\mu_0}$$

avec la constante A^* dépendant de μ_0, A_0 et de $\sup_{R^1_+} |\varrho(x)|$.

On arrive donc, suivant (10), à l'évaluation

$$(13)\qquad |J_1(x,t)| \leqslant \text{const. } r^{-(2p-1)\mu_0}, \quad r > r_0, \quad \mu_0 > 0, \quad p \in N.$$

Examinons ensuite l'intégrale $J_2(x,t)$ prise sur l'ensemble $Q := (-x^q, x^q)$. Soit $r_0 \geqslant 2$. On a donc

$$x \geqslant 2, \quad x^q < x \quad \text{et} \quad x-\xi > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in Q.$$

L'inégalité (12) nous donne

$$|J_2(x,t)| \leqslant A^{**} \sup_Q |\varrho(\xi)| \; t^{\mu_0} \int_Q (x-\xi)^{-(1-2p)\mu_0} \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} \; t^{\mu_0} \, \text{mes}Q \, (x-x^q)^{-(1-2p)\mu_0}$$

avec $\text{mes}Q = 2x^q$. Il découle de (10) que

$$(14) \qquad x-x^q > \frac{r}{\sqrt{2}} - r^q > r\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - r_0^{q-1}\right) > 0$$

pour $r > r_0 \geqslant 2$ ce qui nous ramène à l'évaluation suivante

$$(15) \qquad |J_2(x,t)| \leqslant \text{const.} \; r^{-(2p-1)\mu_0 - 1 + q},$$

$$r > r_0, \; \mu_0 > 0, \; q \in (0, \tfrac{1}{2}), \quad p \in N.$$

Enfin pour l'intégrale $J_3(x,t)$ on peut écrire

$$|J_3(x,t)| \leqslant \text{const.} \; t^{-\frac{1}{2p}} \int_{x^q}^{+\infty} \exp\left[-(B_0'+B_0'')\left(|x-\xi| \; t^{-\frac{1}{2p}}\right)^{2pP}\right] d\xi,$$

où $B_0' + B_0'' = B_0$, $B_0' B_0'' > 0$, la constante positive B_0 étant celle de (2). Il suffit maintenant profiter de la formule

$$\int_a^b \varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = \psi(a) \int_a^c \varphi(\xi)\,d\xi + \psi(b) \int_c^b \varphi(\xi)\,d\xi.$$

avec $c \in (a,b)$, légitime pour φ continue, ψ continue et monotone dans $\langle a,b \rangle$. On obtient donc

$$(16) \qquad |J_3(x,t)| \leqslant \text{const.}\ t^{-\frac{1}{2p}} \exp\left[-B_0'\left(|x-x^q|\, t^{-\frac{1}{2p}}\right)^{2pP}\right]$$

$$\int_{x^q}^{c_x} \exp\left[-B''\left(|x-\xi|\, t^{-\frac{1}{2p}}\right)^{2pP}\right] d\xi .$$

En posant $\eta = t^{-\frac{1}{2p}}(x-\xi)$ et tenant compte de (14) on ramène (16) à la forme suivante

$$|J_3(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\ \exp\left[-B_0'\left(r^{1-\frac{1}{2p}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - r_0^{q-1}\right)\right)^{2pP}\right] \int_{Q_t} \exp\left[-B_0|\eta|^{2pP}\right] d\eta ,$$

où

$$Q_t := \left\langle (x^q-x)t^{-\frac{1}{2p}},\ (c_x-x)t^{-\frac{1}{2p}} \right\rangle \subset R^1 .$$

Il s'ensuit donc l'évaluation

$$(17) \qquad |J_3(x,t)| \leqslant \text{const.}\ \exp(-\beta r),\ r > r_0,$$

avec

$$\beta := B_0'\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - r_0^{q-1}\right)^{2pP} > 0.$$

Or, la propriété (7) découle, dans ce cas-ci, des relations (11), (13), (15) et (17).

Par analogie, la propriété (7) subsiste de même dans le cas suivant

3. $0 < t < -x, \quad \sqrt{x^2+t^2} > r_0.$

Le théorème est donc démontré.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. B a d e r k o : Étude du problème de Dirichlet pour une équation 2p-parabolique dans un domaine non-cylindrique, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, série A, 4 (1978) 221-224.

[2] W. P o g o r z e l s k i : Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. 76 (1959) 125-149.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW
Received February 4, 1981.