

Jerzy Muszyński

ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРОГО „ОДНОРОДНОГО“ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Постановка задачи

Целью работы является исследование некоторого интегрального уравнения в банаховом пространстве. Исследуются существование и единственность его решения, а также его оценки и в связи с этим ограниченность, стремление к нулю этого решения и вопросы, связанные с его устойчивостью.

Пусть $I = \langle 0, \infty \rangle$, $\Omega = \{(t, s) \in I^2 : s \leq t\}$, $(B, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Предложим, что даны некоторые функции $p \in C(I \times B, B)$, $U \in C(\Omega \times B, B)$ и пусть $u_0 \in B$ является параметром.

Рассматривается следующее интегральное уравнение

$$(1) \quad u(t) = p(t, u_0) + \int_0^t U(t, s, u(s)) ds.$$

В первой части работы вводятся следующие предположения: существует некоторое постоянное $k \geq 0$ и некоторые функции ψ, χ , что

$$E1. \quad \psi \in C(I, I), \quad (\forall t \in I) \psi(t) > 0,$$

$$E2. \quad \chi \in C(I, I),$$

$$E3. \quad (\forall t \in I)(\forall u \in B) \|p(t, u)\| \leq \psi(t) \|u\|,$$

$$E4. \quad (\forall (t, s) \in \Omega)(\forall u \in B) \|U(t, s, u)\| \leq \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \chi(s) \|u\|^{k+1},$$

U выполняет на $\Omega \times B$ локальное условие Липшица относительно последнего аргумента.

Последнее предположение обозначает, что для каждого множества $D \subset \Omega \times B$, ограниченного в натуральной топологии произведения $R \times R \times B$, существует такая постоянная $L_D \geq 0$, что для любых $(t, s) \in \Omega$ и $u, v \in B$ таких, что $(t, s, u), (t, s, v) \in D$

$$(2) \quad \|U(t, s, u) - U(t, s, v)\| \leq L_D \|u - v\|.$$

Во второй части, относящейся к вопросам устойчивости усиливаются предположения E3, E4 - предполагается, что

$$E3'. \quad (\forall t \in I)(\forall u, v \in B) \|p(t, u) - p(t, v)\| \leq \psi(t) \|u - v\|;$$

$$(\forall t \in I)p(t, 0) = 0,$$

$$E4'. \quad (\forall (t, s) \in \Omega)(\forall u, v \in B) \|U(t, s, u) - U(t, s, v)\| \leq$$

$$\leq \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \chi(s) [\max(\|u\|, \|v\|)]^k \|u - v\|; (\forall (t, s) \in \Omega) U(t, s, 0) = 0.$$

Очевидно, что из условий E1, E2, E3', E4', вытекают условия E1-E4. Условия $p(t, 0) = 0$, $U(t, s, 0) = 0$ гарантируют, что уравнение (1) при $u_0 = 0$ имеет нулевое решение, определенное на I. Из-за этого уравнение (1) называем "однородным"; случай, когда не будет предполагать этих условий будет предметом другой статьи. Работа является продолжением и обобщением статей [5] и [6].

Предмет нашего исследования - уравнение (1) - тесно связан с некоторой задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, наведен этой задачей и ее обобщает. Объясним это прежде, чем перейдем к непосредственному исследованию.

2. Задача Коши для обыкновенного уравнения

Пусть $\{A(t): t \in I\}$ является семейством линейных, не обязательно ограниченных операторов, действующих в пространстве B и таких, что семейство операторов $\{R(t,s):(t,s) \in \Omega\} \subset L(B)$ непрерывных по $(t,s) \in \Omega$ определяет оператор Коши для уравнения

$$(3) \quad v' = A(t)v$$

(см. например [3]). Пусть дана функция $f \in C(I \times B, B)$, рассмотрим вместе с уравнением (3) уравнение

$$(4) \quad u' = A(t)u + f(t, u).$$

Любое решение этого уравнения с начальным условием $(u_0 \in B)$

$$(5) \quad u(0) = u_0$$

является решением интегрального уравнения

$$(6) \quad u(t) = R(t, 0)u_0 + \int_0^t R(t, s)f(s, u(s))ds.$$

Уравнение (6) является частным случаем уравнения (1), причем

$$(7) \quad p(t, u) = R(t, 0)u, \quad U(t, s, u) = R(t, s)f(s, u).$$

Поэтому исследования решений уравнения (1) относятся в частности к решениям уравнения (6) и следовательно к так называемым слабым решениям задачи (4), (5) (см. [3], исследования когда эти слабые решения являются решениями можно провести подобно как в цитированной позиции литературы).

Считая, что уравнение (3) является "невозбужденным", а уравнение (4) "возбужденным", часто ставится вопрос какие

свойства решений уравнения (3) переносятся на решения уравнения (4). Часто исследуемой задачей является следующая: пусть известно, что решения уравнения (3) стремятся к нулю, будет ли так для решений уравнения (4) (при соответствующих предположениях относительно функции f)? Обычно здесь предполагается, что решения уравнения (3) стремятся к нулю экспоненциально (например, во многих исследованиях в [1] предполагается, что $\|R(t,s)\| \leq N e^{-\nu(t-s)}$ для некоторых $N \geq 0$ и $\nu > 0$), предполагается обычно, что функция f подлинейна (для некоторых функций α, β имеем $\|f(t,u)\| \leq \alpha(t) \|u\| + \beta(t)$). Рассмотрим более общий случай (при наших предположениях об "однородности" задачи), а именно

$$(8) \quad (\exists c > 0)(\exists \varphi \in C(I, (0, \infty)))(\forall (t,s) \in \Omega) \|R(t,s)\| \leq c \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}$$

и

$$(9) \quad (\exists k \geq 0)(\exists \varrho \in C(I, I))(\forall t \in I)(\forall u \in B) \|f(t,u)\| \leq \varrho(t) \|u\|^{k+1}.$$

Второе условие обозначает, что рассматриваемая "нелинейность" имеет "тип" $\|u\|^{k+1}$. Предположение (8) обобщает рассмотренное выше при $c=M$ и $\varphi=e^{-\nu t}$.

В случае, когда $A \in C(I, \mathcal{L}(B))$, выступающую в условии (8) функцию φ можно найти по A благодаря следующему предложению (при этом $c=1$).

Предложение. Для любой функции $\varrho \in C(I, R)$ имеем

$$(10) \quad (\forall (t,s) \in \Omega) \|R(t,s)\| \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)},$$

где

$$(11) \quad \varphi(t) = \exp \int_0^t [\|A(\tau) + \varrho(\tau)I\| - \varrho(\tau)] d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $v \in C(I, B)$ является решением уравнения $v' = A(t)v$, выберем и фиксируем любое $s \in I$; введем функции $\gamma \in C(I, R)$, $w \in C(< s, \infty), B)$, определенные формулами (последняя для $t \geq s$)

$$(12) \quad \gamma(t) = \exp\left(\int_0^t \varrho(s) ds\right), \quad w(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(s)} v(t).$$

Вторая функция является решением уравнения $w' = [A(t) + \varrho(t)I]w$, причем $w(s) = v(s)$, а поэтому для нее $w(t) = v(s) + \int_s^t [A(\tau) + \varrho(\tau)I] w(\tau) d\tau$. Отсюда вытекает, что $\|w(t)\| \leq \|v(s)\| + \int_s^t \|A(\tau) + \varrho(\tau)I\| \|w(\tau)\| d\tau$ и по лемме Гронвалля-Беллмана $\|w(t)\| \leq \|v(s)\| \exp \int_s^t \|A(\tau) + \varrho(\tau)I\| d\tau$. Поэтому

$$(14) \quad \|R(t, s)v(s)\| = \|v(t)\| = \frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} \|w(t)\| \leq \\ \leq \frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} \exp \int_s^t \|A(\tau) + \varrho(\tau)I\| d\tau \cdot \|v(s)\| = \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \|v(s)\|$$

и отсюда $\|R(t, s)\| \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}$.

Из этого предложения вытекает неравенство $\|R(t, s)\| \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}$, где

$$\varphi(t) = e^{\mu(A(t))}, \quad \mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|hA + I\| - 1}{h}$$

(так называемая логарифмическая норма оператора A) из [3], стр.153.

Если выполнены предположения (8) и (9) и функция f локально липшицева, то функции p, U определенные формулой (7) выполняют условия E1-E4 с $\psi(t) = c \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}$, $\chi(t) = c \varrho(t)$. Условие E3' также выполнено, для выполнения условия E4'

требуется, чтобы функция f выполняла условие типа $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \chi(t) [\max(\|u\|, \|v\|)]^k \|u - v\|$. Такое условие в $B = R$ выполняет например функция $f(t, u) = \chi(t) u^{k+1}$. При наших исследованиях (для $k > 0$) мы должны считаться со следующей проблемой: для некоторых $u_0 \in B$ решения уравнения (1) могут быть определены на целом I , а для некоторых u_0 так не будет. Например скалярное интегральное уравнение $u(\cdot) = e^{-t} u_0 + \int_0^t e^{s-t} u^2(\cdot) ds$, эквивалентное задаче Коши $u' = -u + u^2$, $u(0) = u_0$ имеет решения вида $u(t) = \frac{u_0}{u_0 - (u_0 - 1)e^t}$ определенные на I если $u_0 \leq 1$ и на некоторых интервалах $(0, \beta)$ для $u_0 > 1$ (при этом $u(t) \rightarrow \infty$ когда $t \rightarrow \beta^-$).

Примером применения наших исследований может быть бесконечная система скалярных уравнений

$$(15) \quad x'_n = -\frac{2t}{1+t^2} x_n + x_{n+1}^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

с начальным условием $x_n(0) = c_n$ (для некоторых $c_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$). Это конечнострочная, но не треугольная, система по определению из [2], гл. 6. Эта система эквивалентна системе интегральных уравнений

$$(16) \quad x_n(t) = \frac{c_n}{1+t^2} + \int_0^t \frac{s^2+1}{t^2+1} x_{n+1}^2(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если введем пространство Банаха l^∞ бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_{k \in N} |x_k|$, то эту систему можно записать как

$$(17) \quad x(t) = \frac{1}{1+t^2} c + \int_0^t \frac{s^2+1}{t^2+1} f(x(s)) ds,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots)$, $f(x) = (x_2^2, x_3^2, \dots)$, $c = (c_1, c_2, \dots)$.
 Легко показать, что $f \in C(1^\infty, 1^\infty)$ и что для любого $x \in 1^\infty$ имеем $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$. Уравнение (17) является частным случаем уравнения (1) (в $B = 1^\infty$) с

$$p(t, u) = \frac{1}{1+t^2} u, \quad U(t, s, u) = \frac{s^2+1}{t^2+1} f(u),$$

для которого выполнены E1-E4 с $k = 1$, $\psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\chi(t) = 1$ (выполнены здесь также условия E3', E4', в последнем нужно взять $\chi(t) = 2$).

3. Теорема о сравнении решений

В этом пункте рассмотрим два интегральных уравнения, одно в банаховом пространстве B , второе в R и сравним эти решения. Нижедоказанную теорему будем считать подготовительной теоремой в нашей задаче из 1.

Т е о р е м а 1. Пусть некоторые функции $p \in C(I \times B, B)$, $U \in C(Q \times B, B)$, $q \in C(I \times I, I)$, $W \in C(Q \times I, I)$ такие, что для каждого $t \in I$ функция $q(t, \cdot)$ строго растущая на I , для каждого $(t, s) \in Q$ функция $W(t, s, \cdot)$ растущая на I , функция U локально липшицева по последнему аргументу на $Q \times B$. Пусть

$$(18) \quad (\forall t \in I)(\forall u \in B) \|p(t, u)\| \leq q(t, \|u\|)$$

и

$$(19) \quad (\forall (t, s) \in Q)(\forall u \in B) \|U(t, s, u)\| \leq W(t, s, \|u\|).$$

Предположим, что $u_0 \in B$, $v_0 \in I$ такие параметры, что $\|u_0\| < v_0$. Тогда если уравнение

$$(20) \quad w(t) = q(t, w_0) + \int_0^t W(t, s, w(s)) ds$$

имеет решение w на некотором интервале J (где $J = \langle 0, a \rangle$, $\langle 0, a \rangle$ или же $\langle 0, \infty \rangle$), то уравнение

$$(21) \quad u(t) = p(t, u_0) + \int_0^t U(t, s, u(s)) ds$$

имеет также решение u , определенное на этом интервале J , каждое другое решение этого последнего уравнения равно этому решению на общем интервале их определения и

$$(22) \quad (\forall t \in J) \|u(t)\| < w(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $T > 0$ будет любым, таким, что $I_T := \langle 0, T \rangle \subset J$. Введем в рассмотрение множество

$$(23) \quad D_T := \{(t, s, u) : t \in I_T, s \in \langle 0, t \rangle, \|u\| \leq w(s)\}$$

(т.е. тройка $(t, s, u) \in D_T$ если $t \in I_T$, $s \in \langle 0, t \rangle$ и $u \in B$ такое, что $\|u\| \leq w(s)$, где w решение уравнения (20), а $w(s)$ его величина для выбранного s). Очевидно, что D_T является ограниченным подмножеством множества $\Omega \times B$ и поэтому существует такая постоянная L_{D_T} (будем ее обозначать через L_T), что для любых $(t, s, u), (t, s, v) \in D_T$ имеем

$$(24) \quad \|U(t, s, u) - U(t, s, v)\| \leq L_T \|u - v\|.$$

Рассмотрим теперь множество функций

$$(25) \quad \tilde{C}_T := \{u \in C(I_T, B) : (\forall t \in I_T) \|u(t)\| \leq w(t)\}.$$

Очевидно, что это замкнутое подмножество банахового пространства $C(I_T, B)$ (с нормой $\max$), поэтому функция

$$(26) \quad \varrho(u, v) = \max_{t \in I_T} \|u(t) - v(t)\|$$

является в множестве $\tilde{C}_T$ метрикой и $(\tilde{C}_T, \varrho)$ является полным метрическим пространством.

Введем в этом пространстве оператор K , такой что если $u \in \tilde{C}_T$, то

$$(27) \quad (Ku)(t) = p(t, u_0) + \int_0^t U(t, s, u(s)) ds.$$

Очевидно, что $K: \tilde{C}_T \rightarrow C(I_T, B)$. Докажем, что если $u \in \tilde{C}_T$, то $Ku \in \tilde{C}_T$. Имеем (для любого $t \in I_T$)

$$(28) \quad \begin{aligned} \|(Ku)(t)\| &\leq \|p(t, u_0)\| + \int_0^t \|U(t, s, u(s))\| ds \leq \\ &\leq q(t, \|u_0\|) + \int_0^t W(t, s, \|u(s)\|) ds, \end{aligned}$$

(ввиду предположений (18), (19)), а так как $\|u_0\| < v_0$, $\|u(s)\| \leq w(s)$ ($u \in \tilde{C}_T$) то ввиду монотонных свойств функций q и W имеем

$$(29) \quad \|(Ku)(t)\| < q(t, v_0) + \int_0^t W(t, s, w(s)) ds = w(t),$$

так как w является решением уравнения (20). Нами доказано, что для любого $u \in \tilde{C}_T$ и $t \in I_T$

$$(30) \quad \|(Ku)(t)\| < w(t)$$

и поэтому очевидно, что $K: \tilde{C}_T \rightarrow \tilde{C}_T$ (см. определение (25)).

Заметим теперь, что если $u, v \in \tilde{C}_T$, то для любых $t \in I_T$, $s \in \langle 0, t \rangle$ имеем $\|u(s)\| \leq w(s)$, $\|v(s)\| \leq w(s)$, откуда $(t, s, u(s)), (t, s, v(s)) \in D_T$ и поэтому

$$(31) \quad \|U(t, s, u(s)) - U(t, s, v(s))\| \leq L_T \|u(s) - v(s)\|.$$

Исходя из этого неравенства и определения (27) получаем, что для любых $u, v \in \tilde{C}_T$

$$(32) \quad \begin{aligned} \|(Ku)(t) - (Kv)(t)\| &\leq \left\| \int_0^t [U(t, s, u(s)) - U(t, s, v(s))] ds \right\| \leq \\ &\leq L_T \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \leq L_T \varrho(u, v) t. \end{aligned}$$

Методом математической индукции легко доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем в этом случае

$$(33) \quad \|(K^n u)(t) - (K^n v)(t)\| \leq \frac{(L_T t)^n}{n!} \varrho(u, v)$$

и откуда

$$(34) \quad \varrho(K^n u, K^n v) \leq \frac{(L_T T)^n}{n!} \varrho(u, v).$$

Так как $(L_T T)^n / n! \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то откуда вытекает, что существует такое $n \in \mathbb{N}$, что K^n является оператором сжатия в полном метрическом пространстве $\tilde{C}_T$ (см. [1], стр. 79) и поэтому существует один и только один элемент $u \in \tilde{C}_T$ такой, что $Ku = u$, т.е. существует единственная функция $u \in \tilde{C}_T$ такая, что для $t \in I_T$

$$(35) \quad u(t) = p(t, u_0) + \int_0^t U(t, s, u(s)) ds.$$

Это равенство обозначает, что функция u является решением уравнения (21). Итак мы доказали, что уравнение (21), рассматриваемое для $t \in I_T$ имеет решение u определенное на I_T , принадлежащее к $\tilde{C}_T$, а так как для него $u = Ku$, то для этого решения ввиду неравенства (30) выполнено неравенство

$$(36) \quad (\forall t \in I_T) \|u(t)\| < v(t).$$

Докажем, что это решение - единственное максимальное решение уравнения (21), если ограничиваться $t \in I_T$. Пусть уравнение (21) имеет решение $v, t \in I_1$, где $0 \in I_1$ и $I_1 \subset I_T$, нужно доказать, что $(\forall t \in I_1) v(t) = u(t)$. Рассмотрим непрерывную функцию $\gamma, \gamma(t) = w(t) - \|v(t)\|$. Ввиду наших предположений имеем

$$(37) \quad \begin{aligned} \gamma(0) &= w(0) - \|v(0)\| = q(0, w_0) - \|p(0, u_0)\| \geq \\ &\geq q(0, w_0) - q(0, \|u_0\|) > q(0, w_0) - q(0, w_0) = 0. \end{aligned}$$

Докажем, что $\gamma(t) > 0$ для $t \in I_1$. Если бы так не было, то существовало бы такое $T_1 \in I_1$, что $\gamma(T_1) = 0$ и $\gamma(t) > 0$ для $t \in (0, T_1)$. Повторяя проведенное выше доказательство для $T = T_1$ приходим к выводу, что в I_{T_1} существует только одно решение, принадлежащее к $\tilde{C}_{T_1}$, но к этому пространству принадлежат и $u|_{I_{T_1}}$ и $v|_{I_{T_1}}$. Поэтому $u(t) = v(t)$ для $t \in I_{T_1}$ и $v(T_1) = u(T_1)$; мы пришли к противоречию, так как ввиду неравенства (36) имеем $\|u(T_1)\| < w(T_1)$ и $\gamma(T_1) = w(T_1) - \|v(T_1)\| = w(T_1) - \|u(T_1)\| > 0$. Итак $\gamma(t) > 0$ для $t \in I_1$. Возьмем любое $T_2 \in I_1$ и проведем подобное как выше рассуждение для $T = T_2$. Доказывается, что $v|_{I_{T_2}} = u|_{I_{T_2}}$ и поэтому

$v(T_2) = u(T_2)$, а ввиду того что T_2 это произвольная точка из I_1 отсюда вытекает, что $v(t) = u(t)$ на I_1 , что требовалось доказать.

Приступаем теперь к окончанию доказательства. Если $J = \langle 0, a \rangle$, то взяв $T = a$ видим, что тезисы нашей теоремы доказаны. Если $J = \langle 0, a \rangle$ или $J = \langle 0, \infty \rangle$, то выбираем растущую последовательность $(T_n) \subset J$, такую что $T_n \rightarrow a$ в первом случае (при $n \rightarrow \infty$) и $T_n \rightarrow \infty$ во втором. Определяем функцию $u, t \in J$, следующим образом. Выберём любое $t \in J$, существует тогда такое T_n , что $t \in \langle 0, T_n \rangle$, на отрезке $\langle 0, T_n \rangle$ как мы знаем существует решение u_n уравнения (21) (и такое, что $\|u_n(t)\| < w(t)$ для $t \in \langle 0, T_n \rangle$). Возьмем $u(t) = u_n(t)$. Легко доказать, что определенная таким образом на J функция u хорошо определена (если $t \in T_n$, $t \in T_m$ и $T_n < T_m$, то ввиду предыдущего анализа имеем $u_m|_{\langle 0, T_n \rangle} = u_n$ и поэтому $u_m(t) = u_n(t)$), является решением уравнения (21) (так как любая u_n является решением) и выполняет неравенство (36) (любая u_n выполняет это неравенство). Это заканчивает доказательство.

Доказанная теорема обобщает в некотором смысле подобного типа теоремы известные из литературы (см. например [4]).

4. Основная теорема

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия E1-E4, предположим, что интеграл

$$(38) \quad \int_0^{\infty} \psi^k(s) \chi(s) ds$$

сходится. Обозначим

$$(39) \quad N = \int_0^{\infty} \psi^k(s) \chi(s) ds, \quad \mathcal{N} = \left(\frac{1}{kN} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (\text{для } k > 0).$$

Тогда для каждого $u_0 \in B$ в случае $k = 0$ и каждого $u_0 \in B$, такого что $\|u_0\| < \mathcal{N}$ в случае $k > 0$,

- 1) уравнение (1) имеет единственное максимальное решение u ,
- 2) решение это определено на I ,
- 3) существует такая постоянная $P_{u_0} \geq 0$, что

$$(40) \quad (\forall t \in I) \|u(t)\| \leq P_{u_0} \psi(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $u_0 \in B$ выполняет условия теоремы. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ для $k = 0$ и любое $\varepsilon > 0$, такое что $\|u_0\| + \varepsilon < \mathcal{N}$ для $k > 0$. Обозначим $w_0 = \|u_0\| + \varepsilon$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$(41) \quad w(t) = \psi(t)w_0 + \int_0^t \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \chi(s)w^{k+1}(s)ds.$$

Считая, что это уравнение (20) с

$$q(t, w) = \psi(t)w, \quad W(t, s, w) = \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \chi(s)w^{k+1}$$

проверяем, что ввиду предположений E1-E4 выполнены все предположения теоремы 1 для интегральных уравнений (21) (т.е. (1)) и (20) (т.е. (41)) и поэтому выполнены соответствующие тезисы этой теоремы. Для доказательства нашей теоремы нужно доказать, что уравнение (1) имеет единственное максимальное решение u , оно определено на I , а кроме этого, что выполнен тезис 3).

Введем новую искомую функцию u , связанную с искомой w , связью

$$(42) \quad z(t) = \frac{w(t)}{\psi(t)},$$

тогда функция z должна быть решением интегрального уравнения

$$(43) \quad z(t) = w_0 + \int_0^t \psi^k(s) \chi(s) z^{k+1}(s) ds,$$

или же задачи Коши

$$(44) \quad z' = \psi^k(t) \chi(t) z^{k+1}, \quad z(0) = w_0.$$

Последняя задача имеет решение

$$(45) \quad z(t) = w_0 \exp \int_0^t \chi(s) ds$$

для $k = 0$, а для $k > 0$

$$(46) \quad z(t) = \frac{w_0}{\left(1 - k w_0^k \int_0^t \psi^k(s) \chi(s) ds\right)^{\frac{1}{k}}}.$$

Решением (единственным) уравнения (41) является $w(t) = z(t)\psi(t)$, то есть

$$(47) \quad w(t) = \begin{cases} w_0 \exp \int_0^t \chi(s) ds \cdot \psi(t) & \text{для } k = 0, \\ \frac{w_0 \psi(t)}{\left(1 - k w_0^k \int_0^t \psi^k(s) \chi(s) ds\right)^{\frac{1}{k}}} & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

Легко доказать, что функция w является решением уравнения (41) для всех $t \in I$, для которых она определена. При $k = 0$ она определена на I ; для $k > 0$ ввиду того, что $kN = \frac{1}{R^k}$, то

$$\begin{aligned}
 (48) \quad 1 - k w_0^k \int_0^t \psi^k(s) \chi(s) ds &\geq 1 - k w_0^k \int_0^\infty \psi^k(s) \chi(s) ds = \\
 &= 1 - k w_0^k N = 1 - \left(\frac{w_0}{N} \right)^k.
 \end{aligned}$$

Так как $w_0 < N$, то $1 - [w_0 : N]^k > 0$ и функция w из формулы (47) для $k > 0$ так же определена для $t \in I$. Этим заканчивается доказательство тезисов 1) и 2). Заметим, что из формулы (47), неравенства (48) и того, что $w_0 = \|u_0\| + \varepsilon$ имеем

$$(49) \quad w(t) \leq \begin{cases} e^{N(\|u_0\| + \varepsilon)} \psi(t) & \text{для } k = 0, \\ \frac{\|u_0\| + \varepsilon}{\left(1 - \left(\frac{\|u_0\| + \varepsilon}{N}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}} \psi(t) & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда

$$(50) \quad w(t) \leq P_{u_0} \psi(t),$$

где

$$(51) \quad P_{u_0} = \begin{cases} e^{N\|u_0\|} & \text{для } k = 0, \\ \frac{\|u_0\|}{(1 - kN\|u_0\|^k)^{\frac{1}{k}}} & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

(учитывая, что $N^k = \frac{1}{kN}$). Так как по теореме 1 $\|u(t)\| \leq w(t)$ для $t \in I$, то из неравенства (50) вытекает последний тезис теоремы.

З а м е ч а н и я . Доказанной теоремы "нельзя улучшить" в том смысле, что если условия теоремы не выполнены, т.е. или интеграл $\int_0^\infty \psi^k(s)\chi(s)ds$ расходится или же (в случае $k > 0$) $\|u_0\| \geq R$, то можно указать пример в котором не выполнены тезисы теоремы 2. Таким примером может быть соответствующее скалярное уравнение типа (41), считаемое как уравнение (1). Его решения определены формулой (47). Укажем соответствующие примеры. Начнем со случая $k > 0$. Очевидно, что если соответствующий интеграл расходится, то для всех $w_0 \neq 0$ все решения уравнения (41) не определены на всем I (см. формулу (47)). Пусть теперь интеграл сходится. Рассмотрим уравнение

$$(52) \quad w(t) = e^{-2t}w_0 + \int_0^t e^{-2t}e^{s}w^2(s)ds$$

являющееся уравнением (41) с $\psi(t) = e^{-2t}$, $\chi(t) = e^{-t}$, $k = 1$. Его решения имеют вид

$$(53) \quad w(t) = \frac{3w_0 e^t}{w_0 + (3-w_0)e^{3t}}.$$

Очевидно, что они определены на I если $w_0 \leq 3$, для $w_0 > 3$ они определены не на всем I . С другой стороны интеграл

$$(54) \quad \int_0^\infty \psi^k(s)\chi(s)ds = \int_0^\infty e^{-3s}ds = \frac{1}{3}$$

сходится, $N = \frac{1}{3}$, $R = 3$. Мы видим, что для $w_0 < R$ решения уравнения (52) определены на всем I и

$$(55) \quad w(t) = \frac{3w_0 e^{3t}}{w_0 + (3-w_0)e^{3t}} e^{-2t} = \frac{3w_0}{w_0 e^{-3t} + (3-w_0)} e^{-2t} \leq \\ \leq \frac{3w_0}{3-w_0} e^{-2t} = \frac{3w_0}{3-w_0} \psi(t),$$

т.е. выполнены тезисы теоремы 2. Для $w_0 = \mathcal{N} = 3$ решением уравнения (52) является функция $w(t) = 3e^t$, определенная на всем I , но здесь не выполнено условие $w(t) \leq P_{w_0} e^{-2t} = P_{w_0} \psi(t)$ (для любой постоянной P_{w_0}). Условия $\|u_0\| < \mathcal{N}$ "нельзя улучшить".

Такой же эффект наблюдаем в случае $k = 0$, если интеграл $\int_0^\infty \chi(s) ds$ расходится, то хотя все решения соответствующего уравнения определены на I , но не выполнено условие $w(t) \leq P_{w_0} \psi(t)$ (см. формулу (47) для $k = 0$). Здесь наблюдается эффект несколько другого рода, чем в случае $k > 0$ - сходимости интеграла не требуется для существования решения на всем I , а только для существования соответствующей оценки.

Очевидны следующие следствия из теоремы 2:

С л е д с т в и е 1. Если выполнены все условия теоремы 2 и функция ψ ограничена, то все рассматриваемые решения уравнения (1) ($\|u_0\| < \mathcal{N}$ для $k > 0$) ограничены, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$, то все эти решения стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Заметим, что здесь не нарушается порядок сходимости: если $\psi(t) \sim e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, то и $\|u(t)\| \sim e^{-\gamma t}$ (при $t \rightarrow \infty$).

Введем следующие определения. Пусть $u, t \in I$, является решением уравнения (1) с фиксированным параметром u_0 . Будем изменять этот параметр, вводя новый параметр $\nu \in B$ и уравнение

$$(56) \quad u_\nu(t) = p(t, u_0 + \nu) + \int_0^t U(t, s, u_\nu(s)) ds.$$

В формулировках, которые дадим ниже, предполагается, что при всех рассматриваемых значениях параметра ν , уравнение (56) имеет единственное максимальное решение u_ν и оно определено на всем I .

Решение $u, t \in I$, уравнения (1) называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $\nu \in B$, таких, что $\|\nu\| \leq \delta$, соответствующие решения $u_\nu, t \in I$, таковы, что для всех $t \in I$ имеем $\|u_\nu(t) - u(t)\| \leq \varepsilon$. То же решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и существует такое $\gamma > 0$, что для всех $\nu \in B$ таких, что $\|\nu\| < \gamma$ для соответствующих решений $u_\nu, t \in I$, уравнений (56) имеем $\|u_\nu(t) - u(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

С л е д с т в и е 2. Если выполнены условия E1-E4, интеграл (38) сходится и функция ψ ограничена, то решение $u = 0, t \in I$, уравнения (1) с $u_0 = 0$ устойчиво, если $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то это решение асимптотически устойчиво.

Докажем это. Начнем с устойчивости. Пусть функция ψ ограничена и $\alpha = \sup_{t \in I} \psi(t)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пользуясь обозначениями (39) выберем

$$(57) \quad \delta = \begin{cases} e^{-N} \frac{\varepsilon}{\alpha} & \text{для } k = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \min\left(N, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

Пусть $\nu \in B$, такое, что $\|\nu\| \leq \delta$. Очевидно, что в случае $k = 0$ уравнение (56) для $u_0 = 0$ имеет единственное максимальное решение $u_\nu, t \in I$ (теорема 2), для $k > 0$ имеем

$\|\nu\| \leq \delta \leq N \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} < N$ и поэтому и в этом случае уравнение (56) имеет такое же решение $u_\nu, t \in I$ (та же теорема). По теореме 2 для этих решений $\|u_\nu(t)\| \leq P_\nu \psi(t)$ для $t \in I$, где (см. формулу (51))

$$(58) \quad P_{\nu} = \begin{cases} e^N \|\nu\| & \text{для } k = 0, \\ \frac{\|\nu\|}{(1 - kN\|\nu\|^k)^{\frac{1}{k}}} & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

Для $k = 0$ и $\|\nu\| \leq \delta$ имеем $\|u_{\nu}(t)\| \leq e^N \|\nu\| \psi(t) \leq e^N \delta \alpha = \varepsilon$ для $t \in I$, решение $u = 0$ устойчиво.

Пусть $k > 0$, тогда ввиду того, что $\|\nu\| \leq \delta \leq \mathcal{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$, то $1 - kN\|\nu\|^k \geq 1 - kN \mathcal{N}^k \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (см. формулу (39)) и

$$P_{\nu} \leq 2^{\frac{1}{k}} \|\nu\| \leq 2^{\frac{1}{k}} \delta \leq 2^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

поэтому $\|u_{\nu}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \psi(t) \leq \varepsilon$ для $t \in I$. Решение $u = 0$ устойчиво.

Для доказательства асимптотической устойчивости берем любое $\gamma > 0$ для $k = 0$ и любое $\gamma \in (0, \mathcal{N})$ для $k > 0$. Тогда ввиду того, что $\|u_{\nu}(t)\| \leq P_{\nu} \psi(t)$ для $t \in I$ и $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, имеем $\|u(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что требовалось доказать.

5. Вопросы устойчивости решений уравнения (1)

Т е о р е м а 3. Если выполнены условия $E1$, $E2$, $E3'$, $E4'$, интеграл $\int_0^{\infty} \psi^k(s) \chi(s) ds$ сходится и функция ψ ограничена на I , то для любого $u_0 \in B$ в случае $k = 0$ и любого $u_0 \in B$ такого что $\|u_0\| < \mathcal{N}$ в случае $k > 0$, решение $u, t \in I$, уравнения (1) устойчиво. Если $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то это решение асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $u_0 \in B$ будет таким как в формулировке теоремы, выберем любое $\varepsilon > 0$.

Введем обозначение

$$(59) \quad \tilde{P} := \begin{cases} 1 & k = 0, \\ \frac{\mathcal{N}}{\left[1 - \left(\frac{\|u_0\| + \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}} & k > 0, \end{cases}$$

и пусть

$$(60) \quad \delta := \begin{cases} e^{-N} \frac{\varepsilon}{\alpha} & k = 0, \\ \min\left(\frac{1}{2} (\mathcal{N} - \|u_0\|), e^{-\tilde{P}^k N} \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) & k > 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sup_{t \in I} \psi(t)$. Возьмем любое $v \in B$, такое, что $\|v\| \leq \delta$. Тогда для $k > 0$ имеем

$$(61) \quad \begin{aligned} \|u_0 + v\| &\leq \|u_0\| + \|v\| \leq \|u_0\| + \delta \leq \|u_0\| + \frac{1}{2} (\mathcal{N} - \|u_0\|) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{N} + \|u_0\|) < \mathcal{N} \end{aligned}$$

и по теореме 2 уравнение (56) имеет решение u_v , $t \in I$, то же очевидно имеет также место и в случае $k = 0$.

Рассмотрим вытекающую из теоремы 2 оценку решения u_v в случае $k > 0$. По этой теореме $\|u_v(t)\| \leq P_{u_0+v} \psi(t)$, где (см. формулу (51))

$$(62) \quad P_{u_0+v} = \frac{\|u_0 + v\|}{(1 - kN\|u_0 + v\|^k)^{\frac{1}{k}}}.$$

Для всех $v \in B$, таких что $\|v\| \leq \delta$ (и в частности для $v = 0$) имеем (используем здесь формулы (60) и (39))

$$\begin{aligned}
 (63) \quad 1 - kN\|u_0 + v\|^k &\geq 1 - kN(\|u_0\| + \|v\|)^k \geq \\
 &\geq 1 - kN(\|u_0\| + \delta)^k \geq 1 - kN\left(\|u_0\| + \frac{1}{2}(R - \|u_0\|)\right)^k = \\
 &= 1 - \frac{kN}{2^k} (\|u_0\| + R)^k = 1 - \left(\frac{\|u_0\| + R}{2R}\right)^k
 \end{aligned}$$

и ввиду формул (62), (59) и неравенств (61) и (63) имеем

$$(64) \quad P_{u_0+v} \leq \frac{R}{\left[1 - \left(\frac{\|u_0\| + R}{2R}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}} = \tilde{P}.$$

Поэтому для всех $v \in B$, таких, что $\|v\| \leq \delta$ имеем для $k > 0$ и $t \in I$

$$(65) \quad \|u_v(t)\| \leq \tilde{P} \psi(t).$$

Рассмотрим разность исследуемого решения $u, t \in I$, уравнения (1) и решений $u_v, t \in I$ (для $\|v\| \leq \delta$) уравнений (56). Для них (для $t \in I$)

$$\begin{aligned}
 (66) \quad \|u_v(t) - u(t)\| &\leq \\
 &\leq \|p(t, u_0 + v) - p(t, u_0)\| + \int_0^t \|U(t, s, u_v(s)) - U(t, s, u(s))\| ds
 \end{aligned}$$

и по предположениям $E3', E4'$

$$(67) \quad \|u_\nu(t) - u(t)\| \leq$$

$$\leq \psi(t) \|\nu\| + \int_0^t \frac{\psi(s)}{\psi(s)} \chi(s) \left[\max(\|u_\nu(s)\|, \|u(s)\|) \right]^k \|u_\nu(s) - u(s)\| ds.$$

Из проведенного выше анализа в случае $k > 0$, ввиду неравенства (65) верного также для решения u (для $\nu = 0$) имеем $\|u_\nu(s)\| \leq \tilde{P} \psi(s)$, $\|u(s)\| \leq \tilde{P} \psi(s)$ и поэтому $\max(\|u_\nu(s)\|, \|u(s)\|) \leq \tilde{P} \psi(s)$. Учитывая это в формуле (67) получаем

$$(68) \quad \|u_\nu(t) - u(t)\| \leq \psi(t) \|\nu\| + \psi(t) \int_0^t \psi^{k-1}(s) \chi(s) \tilde{P}^k \|u_\nu(s) - u(s)\| ds,$$

или

$$(69) \quad \frac{\|u_\nu(t) - u(t)\|}{\psi(t)} \leq \|\nu\| + \int_0^t \tilde{P}^k \psi^k(s) \chi(s) \frac{\|u_\nu(s) - u(s)\|}{\psi(s)} ds.$$

Заметим, что неравенство это верно и в случае $k = 0$. По лемме Гронуолля отсюда

$$(70) \quad \|u_\nu(t) - u(t)\| \leq \|\nu\| \left(\exp \tilde{P}^k \int_0^t \psi^k(s) \chi(s) ds \right) \psi(t)$$

и по нашим предположениям о сходимости интеграла, формулам (60), (59) и того, что $\|\nu\| \leq \delta$

$$(71) \quad \|u_\nu(t) - u(t)\| \leq \delta e^{\tilde{P}^k N} \psi(t) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \psi(t).$$

В случае, когда ψ ограничено ($\psi(t) \leq \alpha$) получаем отсюда $\|u_\nu(t) - u(t)\| \leq \varepsilon$ для $t \in I$, т.е. устойчивость решения u ; когда $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ отсюда вытекает, что

$\|u_\gamma(t) - u(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. асимптотическая устойчивость (как γ можно взять $\gamma = \frac{1}{2} (K - \|u_0\|)$). Это заканчивает доказательство.

Рассмотрим в качестве примера систему дифференциальных уравнений (15). Считая, что она эквивалентна в пространстве l^∞ интегральному уравнению (17) и так как интеграл

$$\int_0^\infty \psi^k(s) \chi(s) ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2}$$

сходится, то из теоремы 2 вытекает, что, если $\|c\| < \frac{2}{\pi}$, то все решения системы (15) с $x_n(0) = c_n$ определены на I и оцениваются условием типа $\|x_n(t)\| \leq P_c \frac{1}{1+t^2}$. Из теоремы 3 вытекает, что решения с $\|c\| < \frac{1}{\pi}$ асимптотически устойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн: Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва 1970.
- [2] K. Deimling: Ordinary differential equations in Banach spaces. Berlin-Heidelberg-New York 1977.
- [3] G.E. Ladas, V. Lakshmikantham: Differential equations in abstract spaces. New York-London 1972.
- [4] Я.Д. Мамедов, С.А. Аширов: Нелинейные уравнения Вольтерра. Ашхабад 1977.
- [5] J. Muszyński: Behaviour of solutions of an integral equation, Časopis Pěst. Mat., 101 (1976) 327-342.

- [6] J. Muszyński: On a nonlinear integral equation, Czech. Mat. J., 31 (1981) 413-420.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received December 22, 1980.