DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XIV No 4 1981

Józef Pituch

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS CONVEXES VERS L'AXE RÉEL

1. Introduction

Désignons par S_0 la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans E, où $E_r = \{z : |z| < r\}$, $E_1 = E$. Soit K_0 la classe des fonctions presque convexes dans E. Une fonction non constante f est dite presque convexe dans E s'il existe une fonction convexe h, holomorphe et univalente dans E, telle que

$$\mathrm{Re}\,\frac{f'(z)}{h'(z)} \geqslant 0, \qquad z \in E. \tag{1.1}$$

La classe K_0 a été introduite par W.Kaplan [4] qui a démontré que les fonctions de la classe K_0 sont univalentes.

Introduisons les notations suivantes:
$\hat{C} = C \cup \{\infty\}$, où C désigne le plan complexe,
$l^+[w_0] = \{w : w = w_0+\lambda,\ \lambda \in [0;\infty)\}$, $\mathcal{N} = \{1,2,\ldots\}$,
$\mathcal{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$.

Le domaine $D \subset C$, $D \neq C$, est dit convexe vers l'axe réel négatif si pour tout point fixé $w_0 \in D$ la demi-droite $l^+[w_0]$ est contenue dans D. La classe des domaines convexes vers l'axe réel négatif sera désignée par T et la classe des fonctions $f \in S_0$ telles que $f(E) \in T$ sera notée T_0. La classe T_0 a été, entre autres, étudiée dans [2], où l'auteur a utilisé la notion d'extrémité simple caractéristique pour tout domaine $D \in T$, définie de la manière suivante: étant donné $w_0 \in D$, il existe un $R_1(w_0) > 0$ tel que les circonférences $O_n(w_0) = \{w : |w-w_0| = R_n(w_0)\}$, $R_n(w_0) = R_1(w_0) + n - 1$, $n = 1,2,\dots$, ont des points en commun avec la frontière ∂D. Par $C_n(w_0)$ on désigne le plus grand arc de la circonférence $O_n(w_0)$, contenant le point $w_0 + R_n(w_0)$, $n = 1,2,\dots$, qui appartient à D. La suite $\{C_n(w_0)\}$ est une chaîne de coupures du domaine D dans le plan $\hat{C}$ doué de la métrique sphérique, déterminant l'extrémité simple P_D du domaine D. Dans [2] l'auteur a établi le Théorème 4 et le Corollaire 1 que l'on peut énoncer comme il suit.

Théorème 1.1. Une fonction f, holomorphe dans E et non constante, satisfait à l'inégalité

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha}z)^2 f'(z)\right\} \geq 0, \quad z \in E, \tag{1.2}$$

si et seulement si $f \in L_0$ et $P_{f(E)} = f(e^{i\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{R}$.

La notation $P_{f(E)} = f(e^{i\alpha})$ indique que l'extrémité simple $P_{f(E)}$ correspond au point $z = e^{i\alpha}$.

Dans un autre travail plus étendu, préparé pour la publication, K.Ciozda étudie les sous-classes de la classe L_0, p.ex. la classe $L \subset L_0$ des fonctions f telles que $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, ainsi que les sous-classes $L(\alpha) \subset L$ des fonctions qui satisfont au Théorème 1.1 pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Avec ces notations on a $L = \bigcup_{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} L(\alpha)$, tandis que du Théorème 1.1 découle ce qui suit.

Corollaire 1.1. Une fonction f, $f'(0) = 1$, holomorphe dans E, satisfait à la condition

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha}z)^2 f'(z)\right] \geq 0, \quad z \in E,$$

si et seulement si $f \in L$ et $P_{f(E)} = f(e^{i\alpha})$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ce travail j'établis le Théorème 3.1 qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f

appartienne à la classe L_o. Je termine par l'étude d'un problème géométrique dans la classe L.

2. Considérations auxiliaires

L e m m e 2.1. [1]. Pour tout $t \in [t_1;t_2]$ fixé soit $\Phi(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots$ une fonction holomorphe et univalente pour $z \in E$, admettant pour tout $z \in E$ fixé une dérivée $\Phi'(z,t)$ continue dans l'intervalle $[t_1;t_2]$. Si pour tout couple de points, $t,t' \in [t_1;t_2]$ tels que $t < t'$ on a $\Phi(E,t) \subset \Phi(E,t')$, l'inégalité suivante a lieu:

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi'_t(z,t)}{z\Phi'_z(z,t)} \geq 0 \quad \text{pour} \quad t \in [t_1;t_2], \quad z \in E.$$

R e m a r q u e . L'énoncé donné dans [1] avait admis comme hypothèse la condition $a_1(t) > 0$; la démonstration donnée ici prouve que cette hypothèse est superflue.

L e m m e 2.2. Si q est une fonction holomorphe dans E telle que $\operatorname{Re} q(z) > 0$ pour $z \in E$,

$$q(z) \neq \frac{1 - z^2}{z}, \quad z \in E, \tag{2.1}$$

il existe pour tout $r \in (0;1)$ exactement un point $z_o \in E$ tel que

$$q(rz_o) = \frac{1 - z_o^2}{z_o}, \tag{2.2}$$

où l'on a évidemment $z_o = z_o(r)$.

D é m o n s t r a t i o n . Désignons par d la fonction définie par la formule: $d(z) = \dfrac{1 - z^2}{z}$, $z \in E$. On voit aisément que

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} \operatorname{Re} d(z) = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} z, & z \in E \setminus \{0\}, \\ \operatorname{Re} d(z) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

L'application d est univalente dans E et représente E sur le plan C dépourvu du segment $\{ti : -2 \leq t \leq 2\}$. De l'hypothèse et de (2.3) il résulte que $q(E) \subset d(E^+)$, où $E^+ = \{z : z \in E \wedge \operatorname{Re} z > 0\}$; il s'ensuit qu'il existe une fonction ω holomorphe dans E, $|\omega(z)| < 1$, $\operatorname{Re}\omega(z) > 0$ pour $z \in E$, telle que $q(z) = \frac{1-\omega^2(z)}{\omega(z)}$; de là on tire $q(rz) = \frac{1-\omega^2(rz)}{\omega(rz)}$. Evidemment $\omega(\bar{E}_r) \subset E$, donc à plus forte raison $\omega(\bar{E}_r) \subset \bar{E}$. Par conséquent $\omega(rz)$ représente le cercle E sur son sous-ensemble. En vertu d'un théorème de Brouwer, il existe un point $z_0 \in \bar{E}$ tel que $\omega(rz_0) = z_0$. Des propriétés de la fonction ω il résulte que $\operatorname{Re} z_0 > 0$, $z_0 \in E$.

Nous allons maintenant montrer qu'il n'existe qu'un seul point z_0 si r est donné et jouit des propriétés mentionnées. S'il existait un autre point z_0' tel que $\omega(rz_0') = z_0'$, alors pour la fonction $h : h(z) = \omega(rz)$, $|h(z)| < 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$ pour $z \in E$, on aurait $\rho(h(z_0), h(z_0')) \leq \rho(z_0, z_0')$ (en vertu du Théorème 3 [3], p.322), où ρ désigne la distance hyperbolique et où l'égalité n'a lieu que si $h(E) = E$ et si h est une fonction univalente. Puisque dans notre cas $h(E) \subset E^+$, l'égalité est impossible, donc $\rho(z_0, z_0') = \rho(h(z_0), h(z_0')) < \rho(z_0, z_0')$. La contradiction ainsi obtenue achève la démonstration du lemme.

Supposons que la fonction q satisfasse aux hypothèses du Lemme 2.2 et soit $\{r_n\}$, $n=1,2,\ldots$, $r_n \in (0;1)$ une suite croissante telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Le nombre $n \in \mathcal{N}$ étant donné, désignons par z_n^0 le point unique de l'ensemble E^+ pour lequel a lieu l'égalité

$$q(r_n z_n^0) = \frac{1 - {z_n^0}^2}{z_n^0}. \tag{2.4}$$

Pour tout $n \in \mathcal{N}$ l'existence d'un tel point z_n^0 résulte du Lemme 2.2.

L e m m e 2.3. Tous les points d'accumulation de la suite $\{z_n^o\}$ sont de la forme $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

D é m o n s t r a t i o n . Supposons qu'il existe une suite partielle $\{z_{n_k}^o\}$, $k=1,2,\ldots$, de la suite $\{z_n^o\}$, $n=1,2,\ldots$, telle que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}^o = z^o \in E$. En vertu de l'hypothèse (2.4), on a

$$q(r_{n_k}, z_{n_k}^o) = \frac{1 - {z_{n_k}^o}^2}{z_{n_k}^o}.$$

Comme $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k} z_{n_k}^o = z_o$, on obtient à la limite

$$q(z_o) = \frac{1 - z_o^2}{z_o}\ .$$

Cette égalité étant en contradiction avec la propriété de la fonction q, le Lemme 2.3 se trouve établi.

Désignons par $\mathcal{P}(a;b)$ la classe des fonctions p holomorphes dans E et telles que $p(a) = b$ et $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in E$. On a le théorème suivant.

T h é o r è m e 2.1. Pour tout $z \in E$ fixé, $|z| = r$, a lieu l'inégalité

$$\lim_{z_o \to e^{i\alpha_o}} \ \min_{p \in \mathcal{P}\left(z_o;\frac{1-z_o^2}{z_o}\right)} \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{e^{i\alpha}(1-e^{-i\alpha}z)^2}\left[1-r_o^2z^2-r_o^2p(r_oz)\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-r}{1+r}\cos\alpha_o,\quad \alpha_o \in \left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right],\quad \alpha = \alpha(z_o),\qquad z_o = r_oe^{i\alpha_o}.$$

D é m o n s t r a t i o n . Considérons, pour $z \in E$, $|z| = r$ et $z_o = r_oe^{i\alpha_o}$ fixés, la fonctionnelle

$$J(p) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{e^{i\alpha}(1-ze^{-i\alpha})^2}\left[1-r_o^2z^2-r_ozp(r_oz)\right]\right\},\quad p \in \mathcal{P}\left(z_o;\ \frac{1-z_o^2}{z_o}\right).$$

On sait (voir p.ex. [5], p.137, th. 7.3) que la fonctionnelle $J(p) = \operatorname{Re} F(p(\zeta),\dots,p^{(m)}(\zeta),\zeta)$, $\zeta \in E$, où $F(X_1,\dots,X_{m+2})$ est une fonction analytique dans le voisinage de tout point $(p(\zeta),\dots,p^{(m)}(\zeta),\zeta)$, définie sur la classe $\mathcal{P}(0;1)$, n'admet un maximum et un minimum dans cette classe que pour la fonction $Q_0(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(e^{it_k}+z)/(e^{it_k}-z)$, où $n \leq m+1$, $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

Dans notre cas $m = 0$, donc on peut mettre la fonction Q_0 sous la forme

$$Q_0(z) = \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}.$$

Entre les fonctions des classes $\mathcal{P}(0;1)$ et $\mathcal{P}(a;b)$ a lieu la simple relation:

$$p(\zeta) = Q\left(\frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}\right)\operatorname{Re} b + i \operatorname{Im} b,$$

$$p \in \mathcal{P}(a;b), \qquad Q \in \mathcal{P}(0;1);$$

il en résulte que pour la fonctionnelle $J(p)$ le minimum et le maximum sont réalisés par la fonction

$$q_0 \in \mathcal{P}\left(z_0; \frac{1 - z_0^2}{z_0}\right)$$

de la forme

$$q_0(z) = \xi \frac{1 + \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{-it}}{1 - \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{-it}} + \eta i, \quad \text{où} \quad \xi + \eta i = \zeta = \frac{1 - z_0^2}{z_0}.$$

Un simple calcul fournit

$$q_0(z) = \frac{\frac{1-z_0^2}{z_0} - \frac{z_0}{\bar z_0}(1-\bar z_0^2)e^{-it} + \left(\frac{1-\bar z_0^2}{\bar z_0}e^{-it} - \frac{1-z_0^2}{z_0}\bar z_0\right)z}{1 + z_0 e^{-it} - (e^{-it} + \bar z_0)z}$$

Par conséquent, le minimum de $J(p)$ sur la classe $\mathscr{P}\left(z_0;\frac{1-z_0^2}{z_0}\right)$ est égal à

$$\min_{t\in[0;2\pi]} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{e^{i\alpha}(1-e^{-i\alpha}z)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left[1-r_0^2z^2-\frac{r_0z\left[\frac{1-z_0^2}{z_0}-\frac{z_0}{\bar z_0}(1-\bar z_0^2)e^{-it}+\left(\frac{1-\bar z_0^2}{\bar z_0}e^{-it}-\frac{1-z_0^2}{z_0}\bar z_0\right)r_0^2z^2\right]}{1+z_0e^{-it}-(\bar z_0+e^{-it})r_0z}\right]\right\}$$

Désignons par $A(z,z_0,t)$ l'expression qui figure sous le signe Re. Prenant le commun dénominateur et faisant la réduction on trouve que le numérateur est divisible par $z-e^{-i\alpha}$ et on obtient ainsi l'égalité

$$A(z,z_0,t) = \frac{L(z,z_0,t)}{M(z,z_0,t)},$$

$$\begin{aligned} L(z,z_0,t) = {} & (z-e^{i\alpha})(r_0^3e^{-it}+r_0^4e^{-i\alpha})z^2 - \\ & - (r_0^2+r_0e^{i\alpha}e^{-it}-r_0^3e^{-i\alpha}e^{-it}-r_0^2e^{-2i\alpha})z - \\ & - (r_0e^{-it}+e^{-i\alpha}), \end{aligned}$$

$$M(z,z_0,t) = e^{-i\alpha}(z-e^{i\alpha})^2\left[1+r_0e^{i\alpha}e^{-it} - (e^{-it}+r_0e^{-i\alpha})r_0z\right].$$

Après un simple calcul, on a

$$A(z,z_0,t) =$$

$$= \frac{\left[r_0^4 e^{-i\alpha} z^2 - (r_c^2 - r_0^2 e^{-2i\alpha})z - e^{-i\alpha}\right] + \left[r_0^3 z^2 - (r_0 e^{i\alpha} - r_0^3 e^{-i\alpha})z - r_0\right] e^{-it}}{e^{-i\alpha}(z - e^{i\alpha})\left[(1 - r_c^2 e^{-i\alpha} z) + (r_0 e^{i\alpha} - r_0 z)e^{-it}\right]} .$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{z_0 \to e^{i\alpha_0}} A(z,z_0,t) = \frac{1 + 2iz \sin\alpha_0 - z^2}{e^{-i\alpha_0}(z - e^{i\alpha_0})^2} = -e^{i\alpha_0} \frac{z + e^{-i\alpha_0}}{z - e^{i\alpha_0}} ,$$

d'où il résulte que

$$\lim_{z_0 \to e^{i\alpha_0}} \operatorname{Re} A(z,z_0,t) = \operatorname{Re}\left[e^{i\alpha_0} \frac{z + e^{-i\alpha_0}}{e^{i\alpha_0} - z}\right] =$$

$$= \frac{\cos\alpha_0 (1 - |z|^2)}{\left|1 - z e^{-i\alpha_0}\right|^2} \geqslant \frac{1 - r}{1 + r} \cos\alpha_0 , \quad \alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

et le Théorème 2.1 se trouve ainsi établi.

3. Théorèmes fondamentaux

Nous allons maintenant énoncer et démontrer l'important théorème suivant.

Théorème 3.1. Pour que $f \in L$ il faut et il suffit que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1 - z^2}{z} - \frac{1}{zf'(z)}\right\} \geqslant 0, \quad z \in E. \tag{3.1}$$

Démonstration. 1° Nécessité. Soit $f \in L$; posons $F(z,t) = f\left(\frac{z + \gamma(t)}{1 + \bar{\gamma}(t)z}\right) - t$, $t \in [0; \infty)$, où la fonction γ, $\gamma(0) = 0$, $|\gamma(t)| < 1$, est choisie en sorte que

$F(0,t) = 0$. Cela est possible, puisque $[F(0,t) = 0] \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow [f[\gamma(t)] = t]$; il suffit d'admettre $\gamma(t) = f^{-1}(t)$, $t \in [0;\infty)$. La fonction γ est bien définie, car $f \in L$ entraîne $l^+[0] \subset f(E)$.

A cause de l'univalence $\gamma([0;\infty))$ représente un arc de Jordan dont l'origine est $z = 0$. Des propriétés géométriques de la classe L il résulte que l'on a $F(E,t) = f(E) - t$ et $F(E,t) \subset F(E,t')$ pour $t < t'$, $t \in [0;\infty)$. En vertu du Lemme 2.1 on en tire

$$\operatorname{Re} \frac{F'_t(z,t)}{zF'_z(z,t)} \geqslant 0, \quad z \in E. \tag{3.2}$$

D'autre part, on a

$$F'_t(z,t) =$$

$$= f'\left(\frac{z+\gamma(t)}{1+\bar{\gamma}(t)z}\right) \frac{\gamma'(t) + \gamma'(t)\bar{\gamma}(t)z - \bar{\gamma}'(t)z^2 - \gamma'(t)\gamma(t)z}{[1+\bar{\gamma}(t)z]^2} - 1,$$

$$zF'_z(z,t) = zf'\left(\frac{z+\gamma(t)}{1+\bar{\gamma}(t)z}\right)\frac{1-|\gamma(t)|^2}{[1+\bar{\gamma}(t)z]^2} .$$

De l'identité $f[\gamma(t)] = t$ il résulte que $\gamma'(0) = 1$; tenant encore compte de l'égalité $\gamma(0) = 0$ on déduit de (3.2) la condition

$$\operatorname{Re} \left.\frac{F'_t(z,t)}{zF'_z(z,t)}\right|_{t=0} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1-z^2}{z} - \frac{1}{zf'(z)}\right\}, \quad z \in E.$$

Avec (3.2), cela établit la première partie du Théorème 3.1.

2° Suffisance. Evidemment $f'(0) = 1$. Supposons que l'inégalité (3.1) ait lieu pour la fonction f holomorphe dans E. Considérons deux cas:

A) Il existe dans E des points pour lesquels l'égalité a lieu dans (3.1). En vertu du principe de l'extrémum pour les fonctions harmoniques on obtient

$$\frac{1-z^2}{z} - \frac{1}{zf'(z)} = ci, \quad c \in \mathcal{R},$$

c'est-à-dire

$$f'(z) = \frac{1}{1 - z^2 - ciz}. \tag{3.3}$$

Comme f est une fonction holomorphe, le dénominateur ne peut s'annuler dans le cercle E; par conséquent, les zéros du dénominateur dans le second membre de (3.3) sont nécessairement situés sur la circonférence unité. De là on tire que $c \in [-2;2]$. Intégrant l'équation (3.3) et tenant compte de la normalisation $f(0) = 0$ on trouve

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{4-c^2}}\left(\ln\frac{2z+ci+\sqrt{4-c^2}}{2z+ci-\sqrt{4-c^2}} - \ln\frac{ci+\sqrt{4-c^2}}{ci-\sqrt{4-c^2}}\right), \quad z \in E. \tag{3.4}$$

Pour tout $c \in (-2;2)$ la fonction f représente le cercle E sur une bande dont les bords sont parallèles à l'axe réel. Pour $c = -2$ ou $c = 2$ la fonction f représente E sur un demi-plan dont le bord est parallèle à l'axe réel, donc $f \in L$.

B) Dans le cercle E il n'existe pas de points pour lesquels ait lieu l'égalité dans (3.1). Par conséquent, on a:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1-z^2}{z} - \frac{1}{zf'(z)}\right\} > 0, \quad z \in E. \tag{3.5}$$

Il existe, de plus, une fonction q holomorphe dans E telle que $\operatorname{Re} q(z) > 0$, $z \in E$, et

$$(3.6) \qquad \frac{1 - z^2}{z} - q(z) = \frac{1}{zf'(z)}, \quad z \in E.$$

Comme $f'(z) \neq \infty$ (f étant holomorphe) il s'ensuit que

$$(3.7) \qquad q(z) \neq \frac{1 - z^2}{z}, \quad z \in E.$$

Considérons les points r_n et z_n^o qui interviennent dans le Lemme 2.3 et posons $h_n(z) = q(r_n z)$. Avec ces notations on a

$$h_n(z_n^o) = \frac{1 - {z_n^o}^2}{z_n^o}, \quad z_n^o = r_n^o e^{i\alpha_n}, \quad r_n^o \in (0;1).$$

Soit z^o un des points d'accumulation de la suite $\{z_n^o\}$. Il existe une suite $\{n_k\}$, $k=1,2,\dots$, $n_k \nearrow \infty$, de nombres naturels telle que

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}^o = z^o, \quad |z^o| = 1, \quad \operatorname{Re} z^o \geq 0$$

(Lemme 2.3). En posant $z_o = z_{n_k}^o$ pour un n_k fixé et $p = h_{n_k}$ on tire du Théorème 2.1

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{e^{i\alpha_{n_k}}\left(1-e^{-i\alpha_{n_k}}z\right)^2}\left[1-r_{n_k}^o z^2 - r_{n_k}^o z h_{n_k}(r_{n_k} z)\right]\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1 - r}{1 + r}\cos\alpha_o,$$

$$|z| = r, \quad \alpha_o \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cependant $h_{n_k}(z) = q(r_{n_k} z)$ et $r_{n_k} \to 1$, en passant donc à la limite on obtient l'inégalité

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{e^{i\alpha_0}\left(1-e^{-i\alpha_0}z\right)^2}\left[1 - z^2 - zq(z)\right]\right\} \geqslant \frac{1-r}{1+r}\cos\alpha_0 \geqslant 0.$$

Si l'égalité y avait lieu pour $z \in E$, on aurait

$$\frac{1 - z^2 - zq(z)}{e^{i\alpha_0}\left(1 - e^{-i\alpha_0}z\right)^2} = ci, \qquad c \in \mathcal{R},$$

d'où $e^{-i\alpha_0} = ci$, $c = \pm 1$, $\alpha_0 = \pm\frac{\pi}{2}$. Si $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, on a $c = -1$ et on obtient

$$\frac{1 - z^2 - zq(z)}{i(1 + iz)^2} = -i,$$

c'est-à-dire $1 - z^2 - zq(z) = 1 - 2iz - z^2$, donc $q(z) = -2i$. De même, si $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$, on a $c = 1$, donc $q(z) = 2i$, en contradiction avec l'hypothèse que $\mathrm{Re}\, q(z) > 0$ pour $z \in E$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{e^{i\alpha_0}\left(1 - e^{-i\alpha_0}z\right)^2}\left[1 - z^2 - zq(z)\right]\right\} > 0, \quad z \in E. \tag{3.8}$$

La suite $\{z_n^0\}$, $n=1,2,\ldots$, converge vers le point $e^{i\alpha_0}$. Sinon il existerait un autre point d'accumulation de cette suite, soit $e^{i\alpha_1}$ et, par un raisonnement analogue au précédent, on obtiendrait

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{e^{i\alpha_1}\left(1 - e^{-i\alpha_1}z\right)^2}\left[1 - z^2 - zq(z)\right]\right\} > 0, \quad z \in E. \tag{3.9}$$

Des inégalités (3.8) et (3.9) il résulte que la fonction

$$g(z) = e^{i(\alpha_0-\alpha_1)}\left(\frac{1 - ze^{-i\alpha_0}}{1 - ze^{-i\alpha_1}}\right)^2, \quad z \in E,$$

admet ses valeurs seulement dans l'ensemble $C\setminus(-\infty;0]$. La fonction g est constante et égale à 1 pour $\alpha_0 = \alpha_1$, tandis que pour $\alpha_0 \neq \alpha_1$ elle effectue la représentation univalente de E sur le domaine $C \setminus [0;\infty)$. Par conséquent, $\alpha_0 = \alpha_1$. Les inégalités (3.6) et (3.8) impliquent la suivante

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha_0}\left(1 - ze^{-i\alpha_0}\right)^2 f'(z)\right] > 0.$$

De là on conclut, en tenant compte du Lemme 1.1 que $f \in L(\alpha_0)$, donc $f \in L$. Le Théorème 3.1 se trouve ainsi démontré.

Supposons maintenant que $F \in L_0$, $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ et posons $f(z) = \dfrac{F\left(ze^{-i\cdot\arg a_1}\right) - a_0}{|a_1|}$, $z \in E$. Evidemment $f \in L$ et $f'(z) = |a_1|^{-1}\cdot F'\left(ze^{-i\cdot\arg a_1}\right)\cdot e^{-i\cdot\arg a_1}$. Profitant de l'inégalité (3.1) pour la fonction f, on obtient par un simple calcul

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta F'(0)} - \frac{\zeta}{\overline{F}'(0)} - \frac{1}{\zeta F'(\zeta)}\right] \geq 0, \quad \zeta = ze^{-i\cdot\arg a_1}, \ z \in E.$$

On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 3.2. Pour que $f \in L_0$, il faut et il suffit que soit vérifiée l'inégalité

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{zf'(0)} - \frac{z}{\overline{f}'(0)} - \frac{1}{zf'(z)}\right] \geq 0, \quad z \in E.$$

4. Remarques finales

On pourrait se demander s'il y a besoin de démontrer le Théorème 3.1 qui est équivalent au Théorème 1.1. L'introduction du Théorème 3.1 est légitime du fait même que la démonstration de cette équivalence est non triviale. Le caractère de ces deux théorèmes est, en outre, bien différent. Si l'on remplace dans (2.1) l'expression qui figure sous le signe Re par son inverse, l'inverse de la dérivée de la fonction f et d'une certaine expression dépendant de z présente dans (1.2) un caractère multiplicatif. Au contraire, dans la condition (3.1), l'inverse de la dérivée et d'une certaine expression dépendant de z figure additivement.

En outre, le Corollaire 1.1, qui correspond au Théorème 1.1 pour la classe L, présente un caractère différent de celui du Théorème 3.1. Comme nous l'avons vu, on a $L = \bigcup_{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} L(\alpha)$ et la conclusion du corollaire se rapporte aux différentes couches de la classe L et ne présente pas de caractère global. Au contraire, la conclusion du théorème se rapporte globalement à la classe L tout entière.

Certaines propriétés des fonctions de la classe L, qui ne sont pas directement mises en évidence par le Théorème 1.1, sont aussi une conséquence immédiate du Théorème 3.1. Par exemple, comme l'a montré K.Ciozda dans [2], il existe une fonction $F \in L_0$ telle que $F(E_r)$ n'est pas un domaine convexe vers l'axe réel pour $r \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. D'autre part, du Théorème 3.1 résulte directement ce qui suit.

C o r o l l a i r e 4.1. Si $f \in L$, le domaine $f(E_r^-)$ est pour tout $r \in (0;1)$ et pour toute fonction $f \in L$ presque convexe, E_r étant l'ensemble $E_r^- = \{z: |z|<1 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}$.

D é m o n s t r a t i o n . Comme f est univalente, $f(E_r^-)$ est un domaine borné par une courbe de Jordan composée des arcs:

$$\gamma_1 : w = f(\zeta), \quad \zeta = re^{i\theta}, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right],$$

$$\gamma_2 : w = f(\zeta), \quad \zeta = ti, \quad t \in [-r;r].$$

De la condition (3.1) il résulte que le vecteur normal à la frontière du domaine $f(E_r^-)$ sur l'arc γ_1 a une partie réelle non positive; par conséquent, l'arc γ_1 est un arc analytique ne se réduisant pas à un segment de droite et il coupe toute droite parallèle à l'axe réel une fois au plus.

Soit $z(t) = f(ti)$, $t \in [-r;r]$. Il s'ensuit que $z'(t) = if'(it)$, donc $-iz'(t) = f'(it)$ est un vecteur normal. De l'inégalité (3.1) il résulte que $-t \operatorname{Im} f'(it) \leqslant 0$ pour $t \in [-r;r] \setminus \{0\}$ et $\operatorname{Im} f'(ti) = 0$ pour $t = 0$, $f'(0) = 1$. Dans l'intervalle $[-r;r]$ la partie imaginaire du vecteur normal à la courbe γ_2, dirigé vers l'extérieur du domaine $f(E_r^-)$, change de signe exactement une fois.

Il en résulte que γ_2 coupe toute droite parallèle à l'axe réel deux fois au plus. Donc $f(E_r^-)$ est presque convexe. Quant aux autres propriétés des classes L et L_0, et aussi de certaines de ses sous-classes, qui découlent du Théorème 3.1 et du Théorème 3.2, elles ne sauraient être traitées ici, le présent travail n'ayant qu'un caractère préliminaire. Elles feront l'objet d'un mémoire plus étendu, consacré à l'étude des fonctions de la classe L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bielecki, Z. Lewandowski: Sur certaines classes de fonctions α-étoilées. Ann. Univ. M.Curie-Skłodowska, Sec.A, 15 (1961) 45-55.

[2] K. Ciozda: Sur la classe des fonctions convexes vers l'axe réel négatif, Bull. Acad. Polon. Sci. 27 (1979) 255-261.

[3] Г.М. Г о л у з и н : Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966.

[4] W. K a p l a n : Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J., 1 (1952) 169-185.

[5] J. P f a l t z g r a f f , B. P i n c h u k : A variational method for classes of meromorphic functions, J. Anal. Math. 24 (1971) 101-150.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, PHYSICS AND CHEMISTRY, TECHNICAL UNIVERSITY, LUBLIN

Received April 28, 1980.