

Józef Sidorowicz

ВТОРОЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ В „ПРИНЦИПЕ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ГРАНИЦЫ“

1.⁰ "Принцип нечувствительности границы" отмечался в ряде работ М.Каца (см., скажем, [1]) и сыграл заметную роль в вероятностном подходе к некоторым задачам спектральной теории.

В простейшей форме (для многомерного винеровского процесса) он был обоснован Цисельским [2]. Результат Цисельского состоит в следующем:

Если $D \subset R^v$ - некоторая область с регулярной границей ∂D , $x, y \in D$ - фиксированные точки, $p_D(t, x, y)$ - переходная плотность винеровского процесса w_t в D , т.е. решение задачи

$$(1) \quad \frac{\partial p_D(t, x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_x p_D(t, x, y), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times D, \quad y \in D,$$

$$p_D(0, x, y) = \delta(x - y), \quad p_D(t, \sigma, y) = 0, \quad \sigma \in \partial D$$

и отрезок $[x, y]$ соединяющий x и y , лежит внутри, то при $t \rightarrow 0$ имеет место эквивалентность $\sim$:

$$(2) \quad p_D(t, x, y) \sim p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{v/2}} \exp \left\{ - \frac{|x - y|^2}{2t} \right\}.$$

Здесь, очевидно, $p(t, x, y)$ - переходная плотность винеровского процесса во всем пространстве или же фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta p.$$

Смысл формулы (2) в том, что за малое время t переход процесса w_t из x в малую окрестность точки y происходит вдоль кратчайшего пути, соединяющего x и y , т.е. отрезка $[x, y]$.

Интерес представляет оценка разности

$$\varphi_D(t, x, y) = p(t, x, y) - p_D(t, x, y),$$

причем для общих диффузионных процессов. Здесь удобен геометрический язык (см. [3], [4]). Наша работа будет иметь много точек соприкосновения со статьей С.А. Молчанова [4] и существенно на нее опирается. Перейдем к формулировке задачи.

2. Пусть M - полное риманово многообразие с метрической формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \Delta_M = (\det g)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \det g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^*)$$

- соответствующий оператор Лапласа-Бельтрами, x_t - броуновское движение на M (т.е. диффузионный процесс с инфинитезимальным оператором Δ , его конструкцию см. в [3] - [5]), $p(t, x, y)$ - соответствующая переходная плотность относительно римановой меры $dG = \sqrt{\det g} \, dx$.

Пусть далее, DSM - открытая область с гладкой границей ∂D и компактным замыканием. На первом этапе, чтобы не иметь дело с сопряженными точками на M (определение см. [5]) мы предложим

*) Здесь и в дальнейшем используются тензорные обозначения.

а) что D принадлежит области регулярности некоторой полу-геодезической системы координат (см. [4], § 2). Тогда для любых $x, y \in D \cup \partial D$ существует единственная минимальная геодезическая γ_{xy} , соединяющая x и y , причем x и y не сопряжены вдоль γ_{xy} .

Второе предположение б) состоит в том, что D - геодезически выпуклая область. Это значит, что для любых пар $x, y \in D$, $\gamma_{xy} \subset D$.

в) Пусть $\varphi(x, y) = |\gamma_{xy}|$ - риманово расстояние между x и y . Введем еще один важный геометрический функционал

$$(3) \quad d(x, y) = \min_{z \in \partial D} [\varphi(x, z) + \varphi(z, y)].$$

Это длина кратчайшей кусочно геодезической "бильярной" траектории соединяющей x и y и отражающейся от ∂D (см. рис.1).

Всюду имеется в виду гладкость класса C^∞ , хотя это условие можно существенно ослабить.

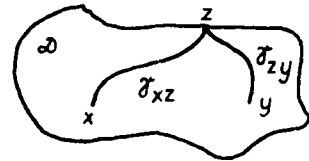


Рис.1

Предположим, наконец, (г), что $\min$ в (3) достигается в единственной точке $z_0 \in \partial D$ и что точки x и y не сопряжены, вдоль геодезической ломаной γ_{xz_0y} , состоящей из двух дуг: γ_{xz_0} - участок до отражения и γ_{z_0y} - участок после отражения. В терминологии [5] это значит, что точки x и y не фокальны. Мы остановимся на этом геометрическом вопросе подробнее в п.п. 5⁰, тот факт, что x и y не фокальны означает невырожденность матрицы $J(S)$ якобиевых полей вдоль γ_{xz_0y} .

3. Наша первоначальная цель состоит в доказательстве следующего результата.

Т е о р е м а 1. В предположениях а), б), в), г)

$$(4) \quad p(t, x, y) - p_D(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\hat{H}(x, y)}{(2\pi t)^{y/2}} \exp \left\{ -\frac{d^2(x, y)}{2t} \right\},$$

где $p_D(t, x, y)$ - переходная плотность броуновского движения x_t в D (т.е. решение задачи типа (I) с естественной заменой Δ на Δ_M), $d(x, y)$ определяется формулой (3), а

$$\hat{H}(x, y) = d^{\frac{y-1}{2}}(x, y) \left(\frac{d\hat{s}}{d\varphi} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Выражение $\frac{d\hat{s}}{d\varphi} = \frac{d\hat{s}}{d\varphi}(x, y)$ имеет простой геометрический смысл: $d\hat{s}$ - это площадь "освещенная" на геодезической гиперповерхности, ортогональной к $\mathcal{F}_{z_0 y}$ в точке y пучком геодезических, выходящих из точки x в телесном угле $d\varphi$ и "отраженных" на ∂D (см. рис.2).

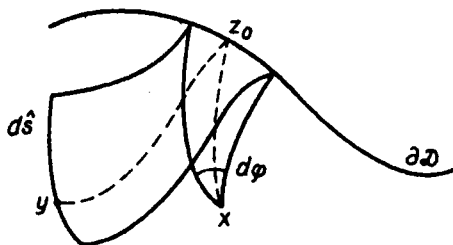


Рис.2

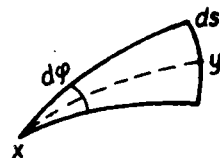


Рис.3

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сформулируем сначала основной результат [4], § 2, точнее некоторое его усиление, фактически также содержащееся в [4]. В предположении а)

$$(5) \quad p(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{H(x, y)}{(2\pi t)^{y/2}} \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(x, y)}{2t} \right\},$$

где $H(x, y) = \varphi^{\frac{y-1}{2}}(x, y) \left(\frac{d\hat{s}}{d\varphi} \right)^{-1/2}$ (см. рис.3).

Асимптотика равномерна по $x, y \in D \cup \partial D$ (поскольку D принадлежит единой полугеодезической системе координат).

Л е м м а 1. Асимптотическое равенство (5) можно дифференцировать по x и оценка равномерна по $x, y \in D$.

Доказательство легко извлечь из [4]. В самом деле там доказана следующая точная формула ([4], 2.12 при $b \equiv 0$)

$$(6) \quad p(t, x, y) = \hat{p}(0, t, x, x) \exp \left\{ -\frac{q^2(x, y)}{2t} \right\},$$

где $\hat{p}(s, t, x, y)$ - фундаментальное решение некоторого (неоднородного по времени) параболического уравнения. Поскольку $\hat{p}(s, t, x, y)$ нас интересует "в близких точках" (фактически $x=y$), то его можно строить применяя слегка модифицированный метод параметрикса (в деталях изложений в [6]). Хорошо известно (см. [6]), что асимптотическое разложения, основанные на параметриксе допускают почленное дифференцирование. Отсюда немедленно получается лемма 1.

Перейдем к доказательству теоремы.

Функция $q_D(t, x, y) = p(t, x, y) - p_D(t, x, y)$ в цилиндре $[0, \infty) \times D$ удовлетворяет уравнению

$$(7) \quad \frac{\partial q_D}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_M q_D$$

при условии

$$q_D(s, \sigma, y) = p(s, \sigma, y), \quad \sigma \in \partial D, y \in D,$$

$$q_D(0, x, y) \equiv 0, \quad x, y \in D$$

и согласно классическому методу тепловых потенциалов (см. [7], гл. III) ее можно искать в виде:

$$(8) \quad q_D(t, x, y) = \int_0^t \int_{\partial D} \varphi(\tau, \xi, y) \frac{\partial}{\partial n_\xi} p(t-\tau, x, \xi) dS_\xi d\tau,$$

где плотность $\varphi(\tau, \xi, y)$ распределения меры в потенциале двойного слоя удовлетворяет уравнению

$$(9) \quad \varphi(t, x, y) = -\frac{1}{6_y} \int_0^t \int_{\partial D} \varphi(\tau, \xi, y) \frac{\partial}{\partial n_\xi} p(t-\tau, x, \xi) dS_\xi d\tau + \\ + \frac{1}{6_y} p(t, x, y).$$

В этих формулах n_ξ — внутренняя кономаль к ∂D в точке $\xi \in \partial D$, 6_y — постоянная $6_y = 2^{-\frac{y+1}{2}}$, dS_ξ — элемент римановой площади поверхности ∂D , $p(t, x, y)$ — фундаментальное решение задачи $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_M p$ во всем пространстве M (имеющее при $t \rightarrow 0$ асимптотику (5)).

Уравнение (9) фредгольмово по x , вольтеррово по t . Его можно решить методом последовательных приближений. Нулевое приближение имеет вид:

$$\dot{q}(t, \xi, y) = \frac{1}{6_y} p(t, \xi, y).$$

Тогда

$$(10) \quad q_D^0(t, x, y) = \frac{1}{6_y} \int_0^t d\tau \int_{\partial D} p(\tau, \xi, y) \frac{\partial}{\partial n_\xi} p(t-\tau, x, \xi) dS_\xi.$$

Анализируя последующие приближения, можно доказать, что при фиксированных x, y и $t \rightarrow 0$

$$q_D(t, x, y) \sim q_D^0(t, x, y)$$

(это доказывается точно так же, как в "параметриксе", см. [4], добавление 1).

Итак, учитывая равномерную асимптотику (5) мы приходим к основной формуле

$$(11) \quad q_D(t, x, y) \sim \frac{1}{6\nu} \int_0^t d\tau \int_{\partial D} dS_\xi (2\pi\tau)^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(\xi, y)}{2\tau}\right\} H(\xi, y) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left\{ \left[2\pi(t-\tau)\right]^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)}\right\} H(x, \xi) \right\}.$$

Вычислим производную

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial n_\xi} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)}\right\} H(x, \xi) = -\frac{\exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)}\right\} H(x, \xi)}{2(t-\tau)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial n_\xi} \varphi^2(x, \xi) + \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)}\right\} \frac{\partial}{\partial n_\xi} H(x, \xi).$$

Легко видеть, что

$$-\frac{\partial}{\partial n_\xi} \varphi^2(x, \xi) = H_1(x, \xi) > 0$$

и что

$$\left| \frac{\partial H(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right| < \text{const.}^*)$$

*) Поскольку $H(x, \xi)$ выражается через якобиевы поля вдоль $\sigma_{x\xi}$ см. [4], 2.19-2.23, то она непрерывно дифференцируема в силу теоремы о дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по параметру ξ , входящему в уравнение 2.19 [4].

Поэтому, исследуя главный член асимптотики, мы можем отбросить второй член в формуле (12). Значит

$$(13) \quad u_y(t, x, y) \sim \frac{1}{6\sqrt{t}} \int_0^t d\tau \int_{\partial D} d\xi \frac{H(x, \xi) H(\xi, y) H_1(x, \xi)}{2(2\pi)^3 [\tau(t-\tau)]^{3/2} (t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)} - \frac{\varphi^2(\xi, y)}{2\tau} \right\}.$$

В формуле (13) применим метод Лапласа, сначала по τ , а затем по ξ . После замены $\tau = tu$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \frac{\exp \left\{ -\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2(t-\tau)} - \frac{\varphi^2(\xi, y)}{2\tau} \right\}}{[\tau(t-\tau)]^{3/2} (t-\tau)} = \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^1 du \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{\varphi^2(x, \xi)}{1-u} + \frac{\varphi^2(\xi, y)}{u} \right] \right\}}{[u(1-u)]^{3/2} (1-u)}. \end{aligned}$$

Экстремум по u , как легко видеть, достигается в точке

$$u_0 = \frac{\varphi(\xi, y)}{\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)}, \quad u_0 \in [0, 1]$$

и является невырожденным. Одномерный метод Лапласа немедленно дает, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 du \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{\varphi^2(x, \xi)}{1-u} + \frac{\varphi^2(\xi, y)}{u} \right] \right\}}{[u(1-u)]^{3/2} (1-u)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \\ & \sim \sqrt{2\pi t} \frac{[\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^{2-1}}{\varphi(x, \xi) [\varphi(x, \xi) \varphi(\xi, y)]^{\frac{2-1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} [\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^2 \right\}, \end{aligned}$$

Полученный результат подставим в формулу (13). Тогда

$$(14) \quad q_D(t, x, y) \sim \frac{1}{t^{\frac{\nu-1}{2}}} \int_{\partial D} dS_{\xi} \frac{H(x, \xi) H(\xi, y) H_1(x, \xi)}{2(2\pi t)^{\frac{\nu-1}{2}}} \times \\ \times \frac{[\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^{\nu-1}}{\varphi(x, \xi) [\varphi(x, \xi) \varphi(\xi, y)]^{\frac{\nu-1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} [\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^2 \right\}.$$

Так как точки x и y несопряжены (т.е. вдоль кратчайшей геодезической γ_{xy} , $\det_{\xi=z_0} \text{Hess} \left\{ \frac{1}{2} [\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^2 \right\} \neq 0$,

то можно применить $(\nu-1)$ -мерный метод Лапласа по ξ . Функция $h(\xi) = \frac{1}{2} [\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^2$ достигает минимума в точке $\xi = z_0$. Имеем:

$$(15) \quad q_D(t, x, y) \sim \frac{1}{t^{\frac{\nu-1}{2}}} \frac{H(z_0, y) H(x, z_0) H_1(x, z_0)}{2(2\pi t)^{\frac{\nu-1}{2}}} \frac{[\varphi(x, z_0) + \varphi(z_0, y)]^{\nu-1}}{\varphi(x, z_0) [\varphi(x, z_0) \varphi(z_0, y)]^{\frac{\nu-1}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2t} [\varphi(x, z_0) + \varphi(z_0, y)]^2 \right\} (\sqrt{2\pi t})^{\nu-1} \times \\ \times \left\{ \det_{\xi=z_0} \text{Hess} \left[\frac{1}{2} [\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y)]^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\hat{H}(x, y)}{(2\pi t)^{\frac{\nu}{2}}} \exp \left\{ -\frac{d^2(x, y)}{2t} \right\}.$$

4°. В итоге мы "почти доказали" теорему 1. Отсутствует только явное геометрическое описание постоянной $\hat{H}(x, y)$. Ее вычисление можно проводить либо непосредственно преобразуя выражение (15) в духе [4] (§ 2 и добавление), либо используя косвенные соображения.

Мы изберем второй путь и будем варьировать точки x и y . Рассмотрим геодезическую ломанную $\gamma_{xz_0y}(s)$, $s \leq d(x, y)$ и вдоль нее нормальные якобиевы поля $\dot{j}(s)$, $s \leq d(x, y)$, имеющие разрыв в точке $s_0 = \varphi(x, z_0)$, но подчиненные в ней условиям "нормального отражения":

$$(16) \quad \begin{aligned} \|\dot{j}(s_0-0)\| &= \|\dot{j}(s_0+0)\|, \\ \dot{j}(s_0-0) + \dot{j}(s_0+0) &= \text{const } n(z_0) \\ (\dot{j}, \dot{j}(s_0-0)) &= (\dot{j}, \dot{j}(s_0+0)), \\ \dot{j}^\perp(s_0-0) + \dot{j}^\perp(s_0+0) &= \text{const } n(z_0), \end{aligned}$$

где $\dot{j}^\perp$ - компонента поля $\dot{j}$, ортогональная γ_{xz_0y} . Хорошо известно (см. [6]), что такие якобиевы поля возникают при вариациях геодезических ломанных, испытывающих нормальное отражение на границы ∂D .

Обозначим через $\mathcal{X}(s)$, $s \leq d(x, y)$ матрицу нормальных якобиевых полей вдоль $\gamma_{xz_0y}(s)$, $s \leq d(x, y)$, которая выделяется начальными условиями в точке $s=0$ (т.е. в $x \in D$) $\mathcal{X}(0) = 0$, $\dot{\mathcal{X}}(0) = E$ и обозначим через $\psi_{z_0}(x, v) =$

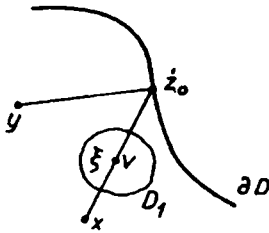


Рис. 4

$= \det \mathcal{X}(\tau)$, где τ - расстояние от x до v вдоль $\gamma_{xz_0y}(s)$ (см. рис. 4).

Легко видеть, что $\psi_{z_0}(x, y) = \frac{d\hat{S}}{d\varphi}(x, y)$,

где последнее выражение было введено выше в формулировке теоремы 1.

Рассмотрим теперь момент $t_1 = t\alpha$,

$$\alpha < \frac{\varphi(x, z_0)}{d(x, y)}. \text{ Применим уравнение Колмо-}$$

горова-Чепмена и соображения, основанные на грубых оценках Варадана (см. [4], § 2, § 3). Полагая, $V = \gamma_{xz_0y}(d(x, y)\alpha)$ получим

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \frac{\hat{H}(x, y)}{(2\pi t)^{y/2}} \exp\left\{-\frac{d^2(x, y)}{2t}\right\} \Big|_{t \rightarrow 0} \sim q_D(t, x, y) \Big|_{t \rightarrow 0} \\
 & \sim \int_D p(\alpha t, x, \xi) q_D((1-\alpha)t, \xi, y) d\xi \Big|_{t \rightarrow 0} \\
 & \sim \int_D \frac{H(x, \xi)}{(2\pi \alpha t)^{y/2}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2\alpha t}\right\} \frac{\hat{H}(\xi, y)}{[2\pi(1-\alpha)t]^{y/2}} \exp\left\{-\frac{d^2(\xi, y)}{2(1-\alpha)t}\right\} d\xi \Big|_{t \rightarrow 0} \\
 & \sim \frac{H(x, v) \hat{H}(v, y)}{\left[2\pi \frac{\varphi(x, v)}{d(x, y)} t\right]^{y/2} \left[2\pi t \frac{d(v, y)}{d(x, y)}\right]^{y/2}} \int_D \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x, \xi)}{2t\alpha} - \frac{d^2(\xi, y)}{2t(1-\alpha)}\right\} d\xi.
 \end{aligned}$$

Минимум выражения стоящего в показателе экспоненты достигается при $\xi = v$ и равен $\frac{d^2(x, y)}{2t}$ поэтому в предэкспоненциальном выражении можно (сохранить эквивалентность) заменить ξ на v . Пользуясь затем методом Лапласа в полной области, найдем, что

$$\begin{aligned}
 & \int_D \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left[\frac{\varphi^2(x, \xi)}{\varphi(x, v)} + \frac{d^2(\xi, y)}{d(v, y)}\right] d(x, y)\right\} d\xi \Big|_{t \rightarrow 0} \\
 & \sim (2\pi t)^{y/2} \exp\left\{-\frac{d^2(x, y)}{2t}\right\} \left\{\det_{\xi=v} \text{Hess} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi^2(x, \xi)}{\varphi(x, v)} + \frac{d^2(\xi, y)}{d(v, y)}\right) d(x, y)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Гессиан легко вычисляется (как в утверждении 10. 4 из [4]):

$$\begin{aligned}
 & \det_{\xi=v} \text{Hess} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi^2(x, \xi)}{\varphi(x, v)} + \frac{d^2(\xi, y)}{d(v, y)}\right) d(x, y)\right] = \\
 & = \frac{d^{y+1}(x, y)}{\varphi(x, v) d(v, y)} \frac{\psi(x, y)}{\psi(x, v) \psi(v, y)}.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (17) и производя необходимые сокращения, легко убедиться, что

$$(18) \quad \hat{H}(x, y) = \frac{\hat{H}(v, y) d^{\frac{\nu-1}{2}}(x, y)}{d^{\frac{\nu-1}{2}}(v, y)} \frac{\sqrt{\psi(v, y)}}{\sqrt{\psi(x, y)}}$$

(при этом дополнительно используется формула (5) и тот факт, что $\frac{d\hat{S}}{d\varphi}(x, y) = \psi(x, y)$).

Соотношение (18) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно $\hat{H}(x, \cdot)$ вида

$$\hat{H}(x, \cdot) = \hat{H}(v, \cdot) \frac{\alpha(x)}{\alpha(v)}, \quad \alpha(x) = \frac{d^{\frac{\nu-1}{2}}(x, \cdot)}{\sqrt{\psi(x, \cdot)}}.$$

Отсюда ясно, что $\hat{H}(x, \cdot) = \alpha(x) \text{const.}$ Легко показать, (при $x \rightarrow y$), что $\text{const} = 1$. Теорема 1 полностью доказана.

5°. Если точки x, y фокальны, то результат теоремы 1 уже не действует. Здесь, как и в § 3 [4] можно применять уравнение Колмогорова-Чепмена (ср. п.п. 4°).

$$(19) \quad p_D(t, x, y) = \int_D p_D(t_1, x, \xi) p_D(t - t_1, \xi, y) \sigma d(\xi).$$

Нетрудно показать, что для фокальных точек x и y можно подобрать так t_1 , что точки (x, ξ) и (ξ, y) будут не фокальными (и не сопряженными) в некотором открытом подмножестве $D_1 \subset D$ в котором $\varphi(x, \xi) + \varphi(\xi, y) \leq d(x, y) + \varepsilon$. Но тогда в формуле (19) можно сузить область интегрирования до D_1 с малой относительной ошибкой и применить к каждому из сомножителей под интегралом формулы (4) и (5).

Дело сведется к изучению некоторого интеграла (типа (17)), к которому следует применять тот или иной вариант метода Лапласа. Не останавливаясь на вычислениях (они вполне в духе § 3 [4]) отметим только два результата:

Т е о р е м а 2. Если точки $x, y \in D$ соединены конечным числом геодезических ломаных длины $d(x, y): \gamma_1, \dots, \gamma_N$ а вдоль каждой из них x и y не сопряжены, то

$$(20) \quad p(t, x, y) - p_D(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (2\pi t)^{-\nu/2} \exp\left\{-\frac{d^2(x, y)}{2t}\right\} \sum_{i=1}^N \hat{H}_{\gamma_i}(x, y)$$

(смысл обозначения $\hat{H}_{\gamma_i}(x, y)$ очевиден).

Т е о р е м а 3. Если точки x и y фокальны, и, более того, множество

$$\left\{z_0 \in \partial D : \rho(x, z_0) + \rho(z_0, y) = d(x, y)\right\}$$

содержит открытое подмножество, то

$$(21) \quad p(t, x, y) - p_D(t, x, y) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{C(x, y)}{(2\pi t)^{\nu-\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{d^2(x, y)}{2t}\right\},$$

для постоянной $C(x, y)$, в принципе, можно дать явное выражение.

Теорема 3 применима, например, к двумерному винеровскому процессу в эллипсе с фокусами x и y .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. К а ц : Вероятность и сложные вопросы в физике. Москва 1965.

- [2] Z. Cieślowski: Heat conduction and the principle of not feeling the boundary, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 14 (1966) 435-440.
- [3] Г. Мак-кин: Стохастические интегралы. Москва 1973.
- [4] С.А. Молчанов: Диффузионные процессы и риманова геометрия, Uspehi Mat. Nauk 30 (1975) 181.
- [5] М.М. Постников: Введение в теорию Морса. Москва 1971.
- [6] А. Фридман: Уравнения с частотными производными параболического типа. Москва 1968.
- [7] Е.М. Ландис: Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва 1971.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, HIGHER ENGINEERING SCHOOL, KOSZALIN
Received April 2nd, 1980.