DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol XIV No 3 1981

Zbigniew Grande

UNE REMARQUE SUR LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE

Soient (X,ϱ_1) et (Y,ϱ_2) deux espaces métriques, séparables et complets et R l'espace des nombres réels.

D é f i n i t i o n ([1], Df. 2). On dit que les fonctions $g_t:X\to R$, où $t\in T$ et T est un ensemble d'indices, sont presque qualitativement semiéquicontinues supérieurement au point x_0 lorsqu'il existe un ensemble $A\subset X$ ayant la propriété de Baire et étant de deuxième catégorie dans chaque entourage ouvert du point x_0 tel que $x_0\in A$ et les fonctions partielles g_t/A, $t\in T$, sont semiéquicontinues supérieurement au point x_0 (c'est-à-dire:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \bigwedge_{x\in A}\ \bigwedge_{t\in T}\left[\varrho_1(x,x_0)<\delta \Longrightarrow g_t(x)-g_t(x_0)<\varepsilon\right]).$$

Dans l'article [1] se trouve le problème suivant:

Problème. Une fonction $f:X\times Y\to R$ dont les sections $f_x(t)=f(x,t)$ $(t\in Y)$ sont presque qualitativement semiéquicontinues supérieurement en tout point $y\in Y$ et dont les sections $f^y(t)=f(t,y)$ $(t\in X)$ ont la propriété de Baire doît-elle avoir la propriété de Baire?

Dans cette note je montre que la réponse à ce problème est niée.

T h é o r è m e . Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $f:R\times R\to R$ n'ayant pas de la propriété de Baire et telle que les sections f_x sont presque qualitativement semiéquicontinues supérieurement en tout point $y \in Y$ et dont les sections f^y ont la propriété de Baire.

D é m o n s t r a t i o n . Rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots, \text{ où } \alpha < \Omega$$

et Ω désigne le premier nombre ordinal indénombrable. Supposons, encore, que $a_\alpha \neq a_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta < \Omega$. Posons pour tout $\alpha < \Omega$

$$A_\alpha = \{a_\beta : \beta < \alpha\}$$

et

$$A = \bigcup_{\alpha < \Omega} [\{a_\alpha\} \times A_\alpha].$$

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } (x,y) \in A \\ 0 & \text{lorsque } (x,y) \in (R \times R) - A. \end{cases}$$

Fixons le point $y \in R$. Il existe un indice $\alpha_0 < \Omega$ tel que $y = a_{\alpha_0}$. Il en résulte que, quel que soit $x = a_\alpha$ où $\alpha > \alpha_0$, le point $(x,y) \in A$ et $f(x,y) = 1$. Posons

$$B(y) = R - A_{\alpha_0}.$$

On voit facilement que l'ensemble $B(y)$ est résiduel et que $y \in B(y)$. Si $x = a_\alpha$ et $\alpha \leq \alpha_0$, $(x,y) \notin A$ et $f(x,y) = 0$ et $f(x,t) = 0$ pour tout $t \in B(y)$. Dans le cas contraire, si $x = a_\alpha$ et $\alpha > \alpha_0$, $(x,y) \in A$ et $f(x,y) = 1$ et $f(x,t) - f(x,y) \leq 0 < \varepsilon$ pour tout $t \in B(y)$, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$. Les sections f_x sont donc presque qualitativement semiéquicontinues supérieurement en tout point $y \in R$.

Toutes les sections f^y ont la propriété de Baire, puisque l'ensemble $\{t \in R: f^y(t) \neq 1\}$ est au plus dénombrable, quel que soit $y \in R$. En effet, étant fixé le point $y \in R$, il existe un nombre ordinal $\alpha_1 < \Omega$ tel que $y = a_{\alpha_1}$ et par conséquent $(x,y) \in A$ pour tout $x = a_\alpha$ tel que $\alpha > \alpha_1$. Il en résulte que

$$\{t \in R: f^y(t) \neq 1\} = \{t \in R: f^y(t) = 0\} = \{t \in R: t = a_\alpha \text{ et } \alpha \leq \alpha_1\}.$$

Le nombre ordinal α_1 étant au plus dénombrable, le dernier ensemble est le même.

Remarquons, encore, qu'il résulte du théorème de Kuratowski-Ulam ([3], Th. 15.2, p.57) que l'ensemble A ne possède pas de la propriété de Baire, comme tous les ensembles $A_x = A_\alpha$, où $x = a_\alpha$ sont au plus dénombrables et tous les ensembles $A^y = \{t \in R: (t,y) \in A\}$ sont tels que leurs complémentaires $R - A^y$ sont au plus dénombrables. Par conséquent la fonction f n'a pas de la propriété de Baire et la démonstration est finie.

Problème. Dans la démonstration de notre théorème nous avons usé de l'ensemble A dont l'existence est equivalent à l'hypothèse du continu (voir [4]). Notre théorème rèste-t-il vrai sans l'hypothèse du continu?

Remarque. L'exemple de la fonction f de la démonstration de notre théorème démontré également qu'il existe (dans l'hypothèse du continu) une fonction $f: R \times R \to R$ nonmesurable au sens de Lebesgue et telle que toutes ses sections f_x sont approximativement semiéquicontinues supérieurement et toutes ses sections f^y sont mesurables au sens de Lebesgue (comparer [2]).

TRAVAUX CITES

[1] Z. G r a n d e , S. S t a w i k o w s k a : La semiéquicontinuité et la propriété de Baire, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979) 48-52.

[2] Z. G r a n d e : La semiéquicontinuité approximative et la mesurabilité, Colloq. Math. (sous presse).
[3] J. O x t o b y : Measure and category, New York 1971.
[4] W. S i e r p i ń s k i : Hypothèse du continu. Warszawa-Lwów 1934.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, PEDAGOGICAL UNIVERSITY, BYDGOSZCZ
Received March 29, 1980