DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XIV No 2 1981

Zbigniew Grande

SUR UN THÉORÈME DE NIKODYM

Le théorème suivant a été démontré par Nikodym dans son article [3]:

Si la fonction complexe définie sur l'intervalle ouvert (a,b) est mesurable au sens de Lebesgue et si la fonction $|f|^2$ est intégrable, l'ensemble des points de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f est de mesure lebesguienne pleine $(= b - a)$.

Ce théorème sera généralisé, dans l'article présent, aux fonctions plus abstraites.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace métrique, σ-compact avec une mesure μ finie, complète et telle que tous les ensembles boréliens de l'espace X soient μ-mesurables (c'est-à-dire appartiennent à $\mathcal{M}$) et qu'il existe pour tout ensemble $A \in \mathcal{M}$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble compact $B \subset A$ tel que $\mu(B) > \mu(A) - \varepsilon$. Supposons qu'il existe un couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$, où $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ soit une famille d'ensembles de mesure μ positive et $\Longrightarrow$ désigne la convergence des suites d'ensembles de la famille $\mathcal{F}$ vers les points $x \in X$ définie de la manière suivante:

$J_n \Longrightarrow x$ lorsque $x \in J_n$ et $d(J_n) \longrightarrow 0$ avec $n \to \infty$ ($d(J_n)$ désigne comme d'habitude le diamètre de l'ensemble J_n); tel qu'il existe pour tout point $x \in X$ une suite d'ensembles $J_n \in \mathcal{F}$ qui converge au sens $\Longrightarrow$ vers ce point x[1].

[1] Le couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ est un exemple de base de différentiation définie par Bruckner dans [1].

Admettons, encore, que le couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ satisfasse au théorème de Vitali qui est suivant:

si l'ensemble $A \subset X$ est couvert par des ensembles de la famille $\mathcal{F}$ de manière qu'il existe pour tout point $x \in A$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble J appartenant à cette couverture tel que $x \in J$ et $d(J) < \varepsilon$, il existe pour tout nombre $\varepsilon_1 > 0$ un système fini d'ensembles $J_1, \ldots, J_k$ appartenant à cette couverture tel que $J_k \cap J_l = \emptyset$ lorsque $k \neq l$ et

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(J_i) - \varepsilon_1 \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) + \varepsilon_1 \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) + \varepsilon_1,$$

où μ^* désigne la mesure extérieure générée par μ (comparer [1]).

Soit Y un espace séparable de Banach avec la norme $\|\cdot\|$.

D é f i n i t i o n 1. (comparer [2]) Soit $f: X \longrightarrow Y$ une fonction intégrable relativement à la mesure μ. Un point $x \in X$ est dit point de Lebesgue de la fonction f lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \|f(t) - f(x)\| \, d\mu(t) = 0$$

pour toute suite d'ensembles $J_n \in \mathcal{F}$ convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x.

D é f i n i t i o n 2. (comparer [2]). Soit $f: X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable et telle que la fonction $\|f\|^2$ soit intégrable relativement à la mesure μ. Un point $x \in X$ s'appelle point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) = 0$$

pour toute suite d'ensembles $J_n \in \mathcal{F}$ convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x.

R e m a r q u e 1. Soit $f: X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable et telle que la fonction $\|f\|^2$ soit intégrable relativement à la mesure μ. Si $x \in X$ est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f, le point x est également un point de Lebesgue de la fonction f.

D é m o n s t r a t i o n . En effet, on a

$$\int_{J_n} \|f(t)\| d\mu < \sqrt{\mu(J_n)} \sqrt{\int_{J_n} \|f(t)\|^2 \, d\mu},$$

d'où il vient

$$\frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \|f(t) - f(x)\| d\mu(t) \leqslant \frac{\sqrt{\mu(J_n)}}{\mu(J_n)} \sqrt{\int_{J_n} \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t)}$$

$$\sqrt{\frac{\int_{J_n} \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t)}{\mu(J_n)}}$$

et notre remarque est démontrée.

R e m a r q u e 2. Soit $f: X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable et bornée. Le point $x \in X$ est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f si et seulement si x est un point de Lebesgue de la fonction f.

D é m o n s t r a t i o n . D'après la remarque 1 il suffit de démontrer que tout point de Lebesgue de la fonction f est également un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f. En désignant par M_f le nombre tel que $\|f(t)\| \leqslant M_f$ pour tout $t \in X$, on a

$$\int_{J_n} \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant 2M_f \int_{J_n} \|f(t) - f(x)\| \, d\mu(t),$$

d'où il vient notre remarque.

Dans la démonstration du théorème 1 étant une généralisation du théorème de Nikodym, cité au début, nous appliquerons encore la remarque suivante:

R e m a r q u e 3. Soit $f:X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable. Il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un compact $A \subset X$ tel que $\mu(X - A) < \varepsilon$ et la fonction partielle f/A est continue.

La démonstration de cette remarque est la même que celle du théorème 8.2 de [4].

T h é o r è m e 1. Soit $f:X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable et telle que la fonction $\|f\|^2$ est intégrable relativement à la mesure μ. L'ensemble des points de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f est mesure μ pleine $(= \mu(X))$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, au contraire, que le théorème ne soit pas vrai. Il existe donc un ensemble A tel que $\mu^*(A) > 0$ et quel que soit le point $x \in A$, il existe un nombre rationnel $\alpha(x) > 0$ et une suite d'ensembles $J_n(x) \in \mathcal{F}$ convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x et telle que

$$(1) \qquad \frac{1}{\mu(J_n(x))} \int_{J_n(x)} \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) > \alpha(x)$$

$(n=1,2,\ldots)$. La mesure extérieure $\mu^*(A)$ étant positive et l'ensemble des nombres rationnels étant dénombrable, il existe un nombre rationnel $\alpha > 0$ tel que

$$(2) \qquad \mu^*\left(\left\{x \in A: \alpha(x) = \alpha\right\}\right) > 0.$$

Désignons par A_1 l'ensemble $\{x \in A: \alpha(x) = \alpha\}$ et fixons un nombre $\sigma > 0$ tel que $\sigma < \frac{\mu^*(A_1)}{4}$. Il existe, d'après la remarque 3, un compact B_σ tel que $\mu(X) - \sigma < \mu(B_\sigma)$ et sur lequel la fonction partielle f/B_σ est continue. On a

$$(3) \qquad \mu^*(A_1 \cap B_\sigma) > 0.$$

En effet, si par contre $\mu^*(A_1 \cap B_\delta) = 0$, on aurait

$$\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(A_1 \cap (X - B_\delta)) + \mu^*(A_1 \cap B_\delta) \leqslant \mu^*(X - B_\delta) < \delta < \frac{\mu^*(A_1)}{4}$$

en contradiction avec (2).

Posons

$$A_2 = A_1 \cap B_\delta. \tag{4}$$

On a, d'après (3) et (4),

$$\mu^*(A_2) > 0, \quad A_2 \subset B_\delta \quad \text{et} \quad A_2 \subset A_1. \tag{5}$$

La fonction partielle f/B_δ étant continue et l'ensemble B_δ étant compact, la fonction f est uniformément continue et bornée sur l'ensemble B_δ. Soit $M > 0$ le nombre tel que $\|f(x)\| \leqslant M$ pour tout $x \in B_\delta$. Fixons le point $x \in A_2$. On a pour tout ensemble $E \in \mathcal{M}$,

$$(6) \int_E \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant \int_E \|f(t)\|^2 \, d\mu + 2 \int_E \|f(t)\| \cdot \|f(x)\| d\mu(t) +$$

$$+ \int_E \|f(x)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant \int_E \|f(t)\|^2 \, d\mu + 2M \int_E \|f(t)\| \, d\mu + M^2 \mu(E) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_E \|f(t)\|^2 \, d\mu + 2M^2 \mu(E) \text{ (1)}$$

Il en résulte, qu'il existe pour tout nombre $\eta_1 > 0$ un nombre $\eta_2 > 0$ tel que, quel que soit l'ensemble $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) < \eta_2$, on a

---

(1) puisque $\int_E (\|f(t)\| - M)^2 \, d\mu(t) \geqslant 0$.

$$\int_E \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) < \eta_1$$

pour tout point $x \in A_2$.

Fixons maintenant le nombre $\varepsilon > 0$. La fonction partielle f/B_6 étant uniformément continue, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

(7) $\|f(y_1) - f(y_2)\| < \varepsilon$ pour tout couple de points $y_1, y_2 \in B_6$ tels que $\rho(y_1, y_2) < \delta$ (ρ désigne la métrique de l'espace X).

Fixons encore le nombre $\eta > 0$. La famille

$$\left\{ J_n(x) \in \mathcal{F} \ : \ x \in A_2, \ n=1,2,\ldots \ \text{et} \ d(J_n(x)) < \delta \right\}$$

couvre l'ensemble A_2 et satisfait à l'hypothèse du théorème de Vitali, il existe donc un système fini d'ensembles $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{F}$ appartenant à cette couverture, disjoints deux à deux et tels que

(8) $$\sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) - \eta \leqslant \mu^*(A_2) \leqslant \mu^*\left(A_2 \cap \bigcup_{i=1}^{k} K_i\right) + \eta \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) + \eta$$

et $d(I_i) < \delta$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Il existe pour tout $i = 1, \ldots, k$ un point $x_i \in A_2$ tel que $I_i = J_{n_i}(x_i)$. Les inégalités (8), (1) et (2) entraînent.

(9) $$\sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} \|f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) > \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) \geqslant \alpha \left[\mu^*(A_2) - \eta\right].$$

D'autre part, on a,

$$(10)\quad \int_{I_i} \|f(t)-f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) = \int_{I_i\cap B_6} \|f(t)-f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) + $$
$$+ \int_{I_i-B_6} \|f(t)-f(x)\|^2 \, d\mu(t).$$

Mais $d(I_i)<\delta$ $(i = 1,\dots,k)$, on a donc d'après (7),

$$\int_{I_i\cap B_6} \|f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant \int_{I_i\cap B_6} \varepsilon^2 d\mu \leqslant \varepsilon^2\mu(I_i).$$

Il en résulte

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i\cap B_6} \|f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant \varepsilon^2(\mu^*(A_2) + \eta).$$

Selon (8)

$$\mu\left(B_6 \cap \bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \geqslant \mu^*\left(A_2 \cap \bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) - 2\eta,$$

d'où il vient

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) - \mu\left(B_6 \cap \bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \leqslant 2\eta$$

et par conséquent

$$(12)\quad \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i - B_6) \leqslant 2\eta.$$

Il résulte de (6) que

$$\int_{I_i-B_6} \|f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{I_i-B_6} \|f(t)\|^2 \, d\mu(t) + 2M^2 \mu(I_i-B_6)$$

et d'après (12), on a

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} \| f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{k} I_i - B_\delta} \|f(t)\|^2 \, d\mu(t) + 4M^2\eta.$$

Les inégalités (11) et (13) impliquent d'après (10) que

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} \| f(t) - f(x_i)\|^2 \, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} (I_i - B_\delta)} \| f(t)\|^2 \, d\mu(t) + 4M^2\eta + \varepsilon^2(\mu^*(A_2) + \eta)$$

et par conséquent on obtient, d'après (9),

$$(14)\qquad \alpha\left[\mu^*(A_2) - \eta\right] \leqslant 2 \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} (I_i - B_\delta)} \| f(t)\|^2 \, d\mu(t) +$$

$$+ 4M^2\eta + \varepsilon^2(\mu^*(A_2) + \eta).$$

Remarquons, encore, que l'intégrale

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} (I_i - B_\delta)} \| f(t)\|^2 \, d\mu \longrightarrow 0, \text{ lorsque } \eta \longrightarrow 0, \text{ puisque}$$

d'après (12) on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} (I_i - B_\delta)\right) \leqslant 2\eta.$$

En tendant de ε et η vers zéro, on obtient de l'inégalité (14) l'inégalité suivante

$$\alpha \, \mu^*(A_2) \leq 0,$$

en contradiction avec (2). Ainsi $\mu^*(A) = 0$ et le théorème est complétement démontré.

Montrons encore la relation entre les notions du point de Lebesgue et du point de continuité approximative d'une fonction $f : X \longrightarrow Y$. Dans ce but introduisons les définitions suivantes:

Un point $x \in X$ est dit point de densité d'un ensemble $A \in \mathcal{M}$ par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(J_n \cap A)}{\mu(J_n)} = 1$$

pour toute suite d'ensembles $J_n \in \mathcal{F}$ convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x.

Une fonction μ-mesurable $f : X \longrightarrow Y$ s'appelle approximativement continue au point $x \in X$ par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset Y$ tel que $f(x) \in U$, le point x est un point de densité de l'ensemble $f^{-1}(U)$ par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$.

R e m a r q u e 4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction μ-mesurable et bornée. Pour qu'un point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction f, il faut et il suffit que la fonction f soit approximativement continue au point x par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$.

D é m o n s t r a t i o n . Fixons le nombre $\varepsilon > 0$ et posons

$$E_\varepsilon = \left\{ t \in X : \| f(t) - f(x) \| \geq \varepsilon \right\}.$$

La fonction f est approximativement continue au point x par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ si et seulement si le point x est un point de densité de l'ensemble $X - E_\varepsilon$ par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$. Soit $\{J_n\} \subset \mathcal{F}$ la suite d'ensembles convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x.

Posons

$$A = X - E_\varepsilon$$

et remarquons que

$$\int_{J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) = \int_{J_n \cap A} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) +$$

$$+ \int_{J_n \cap E_\varepsilon} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) \leqslant \varepsilon \, \mu(J_n \cap A) + 2M_f \, \mu(J_n \cap E_\varepsilon)$$

(M_f est tel que $\| f(t) \| \leqslant M_f$ pour tout point $t \in X$). Il en résulte que

$$\frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) \leqslant \varepsilon + 2 \, M_f \frac{\mu(E_\varepsilon \cap J_n)}{\mu(J_n)} .$$

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\mu(E_\varepsilon \cap J_n)}{\mu(J_n)} = 0$ et ε est un nombre arbitraire, on a donc

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) = 0$$

et x est un point de Lebesgue de la fonction f.

D'autre part, si x est un point de Lebesgue de la fonction f, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite d'ensembles $J_n \Longrightarrow x$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{E_\varepsilon \cap J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(J_n)} \int_{J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) = 0$$

et

$$\frac{1}{\mu(J_n)} \int_{E_\varepsilon \cap J_n} \| f(t) - f(x) \| \, d\mu(t) \geqslant \varepsilon \, \frac{\mu(E_\varepsilon \cap J_n)}{\mu(J_n)} ,$$

d'où il vient que x est un point de densité de l'ensemble $X - E_\varepsilon$ par rapport au couple $(\mathcal{F}, \Longrightarrow)$ et la démonstration est achevée.

TRAVAUX CITES

[1] A.M. Bruckner: Differentiation of integrals, Amer. Math. Monthly 78 (9) (1971) 1-51.

[2] Z. Grande: Sur le produit de deux dérivées, Demonstratio Math. 9 (1976) 321-332.

[3] O. Nikodym: Sur un théorème concernant les fonctions au carré sommable, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938) 91-96.

[4] J. Oxtoby: Measure and category. New York-Heidelberg-Berlin 1971.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, PEDAGOGICAL UNIVERSITY, BYDGOSZCZ
Received February 8, 1980.